Index

64 page 121

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3 + x^2 - 8x$

1) Méthode :

Pour étudier la variation de la fonction f, on étudie le signe de sa dérivée,

Calcul de la dérivée de f,

Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$

Signe de f ' (x).

$f'(x)$ étant un polynôme du second degré, on cherche les racines de ce polynôme.

$\Delta = 2^2 - 4\times3\times(-8) = 100 = 10^2$

Les racines : $x_1 = \dfrac{-2-10}{2\times3} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-2+10}{2\times3} = \dfrac{4}{3}$.

Comme le coefficient 3 de x^2 est positif, on a :

$f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty;-2\right[\cup\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$,

$f'(x) < 0$ sur $]-2;3[$

$f'(x) = 0$ en -2 et 3.

Sens de variation :

f est strictement croissante sur $\left]-\infty;-2\right]$ et sur $\left[\dfrac{4}{3};+\infty\right[$,

f est strictement décroissante sur $\left[-2;\dfrac{4}{3}\right]$.

Résumé dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$4/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(4/3)$	$\nearrow$	

2) On doit comparer $f(-2)$ qui est le maximum sur $\left[-3;\dfrac{4}{3}\right]$ et $f(2)$.

$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 8\times(-2) = -8 + 4 + 16 = 12$ et $f(2) = 2^3 + 2^2 - 8\times2 = 8 + 4 - 16 = -4$
Le maximum de f sur $[-3 ; 2]$ est atteint en $x = -2$;
ce maximum est égal à $f(-2) = 12$

78 page 123

Soit les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x + 2$.

1) La fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x - 2$ a pour dérivée $h'(x) = 3x^2 + 1$

Comme $x^2 \geqslant 0$, on a $3x^2 + 1 \geqslant 1$, donc, $h'(x)$ est strictement positif.
Par conséquent, la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) $h(1) = 1 + 1 - 2 = 0$.
Comme h est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$,
pour tout $x \geqslant 1$, $h(x) \geqslant h(1)$, soit : $h(x) \geqslant 0$.

3) On a alors sur $[1 ; +\infty[$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$, soit : $f(x) \geqslant g(x)$.

---

80 page 123

1) L'affirmation « pour tout réel a de $[-3 ; -1]$, $f'(a)$ est positif » est une affirmation fausse.

Preuve : f est décroissante sur cet intervalle, donc, la dérivée est négative.

2) L'affirmation « Tous les réels de $[-3 ; 2]$ ont une image positive par f» est une affirmation vraie.

Preuve : f atteint un minimum 0,5 qui est strictement positif en -1