La calculatrice est autorisée mais c'est un outil d'aide, pour vérifier … La calculatrice n'est pas un être pensant.

Le barème tient compte de la cohérence des résultats.

Exercice 1 (3 points) Tableau de signes et inéquations

1) Compléter le tableau de signes de $P(x) = (3x + 1)(-x + 5)$.

(Il n'est pas demandé de justifier les résultats inscrits dans le tableau)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x+1)(-x+5)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	

2 a) Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$ $P(x) < 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{3}\right[\cup]5 ; +\infty[$

b) Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$. $P(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \left[-\frac{1}{3} ; 5\right]$.

Commentaires : $3x + 1$ et $-x + 5$ sont des **expressions du premier degré.**

Une expression ($ax + b$ avec $a \neq 0$) du **premier degré s'annule en changeant de signes**. (*Ce qui est vrai pour une expression du premier degré n'est pas nécessairement vrai pour d'autres expressions*).

Il suffit de connaître la solution de l'équation $ax + b = 0$ et du signe pour une valeur de l'expression pour remplir la ligne donnant le signe.

Comme la fonction $x \mapsto ax + b$ est représentée par une droite, en imaginant la droite, on retrouve les signes.

$3x + 1$ s'annule en $-\frac{1}{3}$ et le coefficient $3 > 0$ d'où ….

$-x + 5$ s'annule en 5 et $(-1) < 0$, d'où ….

Exercice 2 (8 points) Contrôle du cours sur le second degré et applications du cours

1) On pose $f(x) = x^2 + 3x - 10$

a) Calculer le discriminant de l'expression.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times1\times(-10) = 49 = 7^2$

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

$\Delta > 0$, donc, l'équation du second degré possède deux solutions :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\frac{-3-7}{2\times1} = -5$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+7}{2\times1} = 2$

c) Donner une factorisation de $f(x)$.

D'après ce qui précède, on sait : $f(x) = 1\times(x + 5)(x - 2) = (x + 5)(x - 2)$

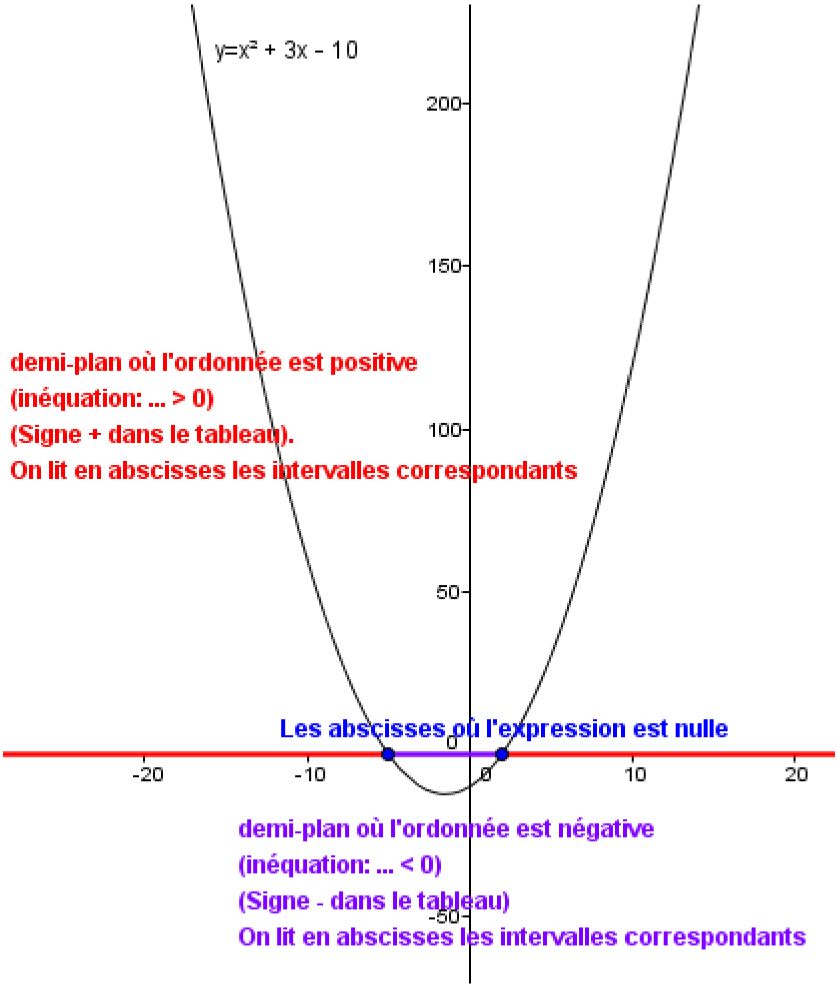
d) Dresser le tableau de signes de $f(x)$

Le coefficient de x^2 est positif, d'où, le tableau suivant (penser à l'allure de la parabole) :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x^2 + 3x - 10$		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

Commentaires :

Il suffit de penser à l'allure de la parabole représentant $x \mapsto x^2 + 3x - 10$ pour retrouver les signes de l'expression image



2) Résoudre l'équation: $2x^2 = 2x + 12$

On ramène à une comparaison à 0 : $2x^2 - 2x - 12 = 0$ (ou encore : $x^2 - x - 6 = 0$)

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times2\times(-12) = 100 = 10^2$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)-10}{2\times2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2)+10}{2\times2} = 3$.

3) Résoudre l'équation: $x^2 = x - 1$

On ramène à une comparaison à 0 : $x^2 - x + 1 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions.

4) Résoudre l'inéquation: $-x^2 + 2x - 4 < 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times(-4) = -12$

Comme $\Delta < 0$ ET le coefficient -1 de x^2 est strictement négatif, l'expression $-x^2 + 2x - 4$ est toujours strictement négative.

$\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

5) Résoudre l'inéquation: $3x^2 - x - 10 < 0$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times3\times(-10) = 121 = 11^2$

L'expression possède deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-11}{2\times3} = -\dfrac{5}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+11}{2\times3} = 2$.

Comme le coefficient 3 de x^2 est positif, cette expression est strictement négative pour les valeurs entre les racines (exclues).

$\mathcal{S} = \left]\dfrac{-5}{3} ; 2\right[$

Exercice 3 ***(3 points)*** ***Pourcentage et mise en équation, …***

On considère un rectangle qui a une longueur double de sa largeur.

En augmentant chaque dimension de ce rectangle de 10 %, son aire a augmenté de 10,5cm².

Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

(On peut noter x la largeur ….)

Premier rectangle.

Soit x la largeur.

La longueur est $2x$.

Deuxième rectangle :

La largeur vaut : $1{,}1x$ (ajouter 10 % revient à multiplier par 1,1)

La longueur vaut : $1{,}1\times2x. = 2{,}2x$.

Aire du premier rectangle : $x\times2x = 2x^2$

Aire du deuxième rectangle : $1{,}1x\times2{,}2x = 2{,}42x^2$

Augmentation de l'aire : $2{,}42x^2 - 2x^2 = 0{,}42x^2$

Mise en équation : (et résolution)

$0{,}42x^2 = 10{,}5$ cm², donc, $x^2 = \dfrac{10{,}5}{0{,}42} = 25$

Comme $x > 0$ (c'est une longueur), on obtient : $x = 5$ cm.

Commentaires : Une mise en équation est la traduction en " opérations " du texte …

On relève les informations et on les traduit au fur et à mesure ...

Exercice 4 (3 points) Pourcentage d'évolution et mise en équation.

Un capital de 50 000 € est placé pendant deux ans au taux annuel de *t* %. Les intérêts sont capitalisés chaque année.

À la fin de la deuxième année, le capital s'élève à 56 180 €.
Quel est le taux du placement ?
(Ne pas oublier le rôle du coefficient multiplicateur).

Chaque année, le capital est multiplié par $1 + \dfrac{t}{100}$, d'où, en deux ans,

$50\,000 \times \left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2 = 56\,180$, donc, $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2 = \dfrac{56180}{50000} = 1{,}123\,6$

Comme $1 + \dfrac{t}{100} > 0$, on obtient : $1+\dfrac{t}{100} = 1{,}06$

$\dfrac{t}{100} = 0{,}06 = \dfrac{6}{100}$.

Exercice 5 (3 poins) Parabole …

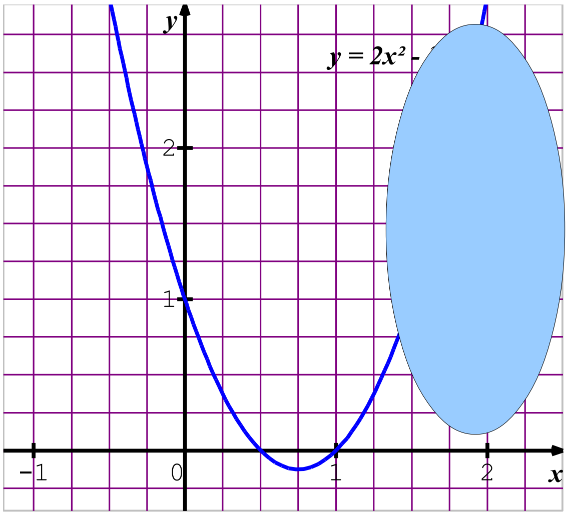
Une élève de 1ère, Emma Lémat', a fait une tâche sur sa feuille.

Aidez-la à retrouver l'équation de la parabole. (Justifiez votre réponse).

la méthode la plus rapide :

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ et (1 ; 0).

On sait que $a = 2$, que les racines sont $\dfrac{1}{2}$ et 1, donc, $y = 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.



Autre méthode :

Une équation de la parabole est de la forme : $y = 2x^2 + bx + c$.

Par lecture graphique : Si $x = 0$ alors $y = 1$

Si $x = 1$ alors $y = 0$

On a donc : $1 = 2\times0^2 + b\times0 + c$, soit : $c = 1$

et $0 = 2\times1^2 + b\times1 + 1$, d'où, $b = -3$

Conclusion : Une équation de la parabole est de la forme : $y = 2x^2 - 3x + 1$.