La calculatrice est autorisée mais c'est un outil d'aide, pour vérifier … La calculatrice n'est pas un être pensant.

Dans tous ces exercices, les justifications attendues sont celles amenées par les propriétés du cours et les calculs. En aucun cas, la lecture sur l'écran de la calculatrice n'est une justification.

Le devoir est en temps limité : soyez efficace en traitant d'abord rapidement les questions que vous maîtrisez le mieux.

Le barème tient compte de la cohérence des résultats.

Exercice 1 Second degré 10 points

I- Formules

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

Écrire les formules permettant de calculer le discriminant et les racines de l'expression du second degré.
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
Si $\Delta < 0$, l'expression $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines.

Si $\Delta = 0$, l'expression $ax^2 + bx + c$ a une et une seule racine qui vaut $\dfrac{-b}{2a}$ *(voir au II-1) pour une application)*

Si $\Delta > 0$, l'expression $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes.
Les racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *(voir au II-2) pour une application)*

II- Applications :
Les trois questions sont indépendantes.

1) a) Déterminer le réel a pour que l'équation $ax^2 + 4x + 9 = 0$ admette une et une seule solution.

On veut : discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times a\times 9 = 0$, d'où, $a = \dfrac{4^2}{4\times 9} = \dfrac{4}{9}$

b) Calculer alors cette solution.

$\dfrac{4}{9}x^2 + 4x + 9 = 0$ si et seulement si $4x^2 + 36x + 81 = 0$ si et seulement si $(2x + 9)^2 = 0$

$x = -\dfrac{9}{2}$.

ou encore : $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2\times\frac{4}{9}} = \dfrac{-4\times 9}{2\times 4} = -\dfrac{9}{2}$

2) Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 2 = 0$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 2\times 2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$
Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions :
Les solutions sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-3}{2\times 2} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+3}{2\times 2} = 2$.

3) Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On sait que $f(0) = 1$ et que $f(2) = f(4) = 0$

Déterminer les coefficients a, b et c

$f(0) = 1$, donc, $c = 1$

$f(2) = f(4) = 0$, donc, on sait qu'on peut factoriser l'expression en : $a(x-2)(x-4) = ax^2 - 6ax + 8a$.

On a donc : $8a = 1$, soit : $a = \frac{1}{8}$.

En remplaçant dans l'expression : $ax^2 - 6ax + 8a = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$.

$a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = 1$.

ou encore :

On écrit le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} f(0)=0+0+c=1 \\ f(2)=4a+2b+c=0 \\ f(4)=16a+4b+c=0 \end{cases} \quad \text{On en déduit : } \begin{cases} c=1 \\ 4a+2b=-1 \\ 16a+4b=-1 \end{cases}$$

En multipliant par exemple la deuxième équation par 2, et, en la soustrayant à la troisième équation :
$16a + 4b - (8a + 4b) = -1 - (-2)$, soit : $8a = 1$.

On retrouve évidemment : $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = 1$.

Exercice 2 taux d'évolution 3 points

Dans une entreprise A, le chiffre d'affaires a augmenté en 2009 de 10 %, puis il a diminué en 2010 de 15 % et enfin, il a augmenté de 5 % en 2011.

De fin 2008 à fin 2011, le chiffre d'affaires a-t-il augmenté ou diminué ?

Justifier votre réponse.

De 2009 à 2011, le chiffre d'affaires a été multiplié par : $1{,}1\times0{,}85\times1{,}05 = 0{,}981\,75$

Comme $0{,}981\,75 < 1$, le CA a diminué.

Exercice 3 Fonctions 7 points

1) On sait que f est une fonction décroissante sur un intervalle I contenant les deux réels a et b.

Soit $a < b$. Donner l'ordre des images $f(a)$ et $f(b)$.

$f(a) > f(b)$.

2) La fonction g est définie par $g(x) = \sqrt{2x-5}$.

Sur quel ensemble est-elle définie ?

$2x - 5 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \frac{5}{2}$.

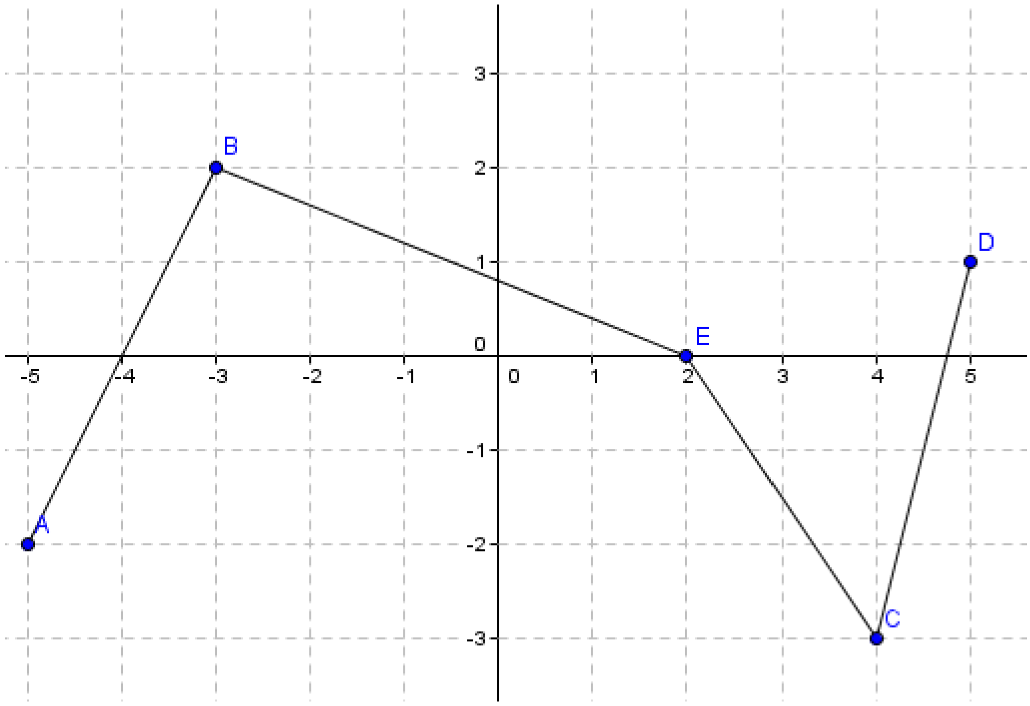
g est définie sur $\left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

3) On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur [–5 ; 5], et, on sait que $f(2) = 0$.

x	–5		–3		4		5
$f(x)$	–2	↗	2	↘	–3	↗	1

a) Tracer une courbe susceptible de représenter f.

Toute courbe définie sur [–5 ; 5] en abscisses, passant par les points $A(-5 ; -2)$, $B(-3 ; 2)$, $C(4 ; -3)$, $D(5 ; 1)$ et $E(2 ; 0)$ et respectant les variations données dans le tableau est valide.



b) Compléter, lorsque c'est possible par un symbole d'inégalité. Justifier votre réponse.

$f(-3{,}2) < f(-3{,}1)$, en effet, $-5 < -3{,}2 < -3{,}1 < -3$ et f strictement croissante sur [–5 ; –3]
$f(1{,}25) > f(\sqrt{2})$, en effet, $-3 < 1{,}25 < \sqrt{2} < 4$ et f strictement décroissante sur [–3 ; 4]
$f(3)$ …. $f(4{,}5)$. On ne peut pas conclure car f change de variations en 4 sur [3 ; 4,5].

c) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

Proposition 1 : Si $f(x) = 0$ alors $x = 2$ Faux, il existe d'autres réels que 2 qui ont pour image 0

Proposition 2 : Si $x = 2$ alors $f(x) = 0$ Vrai, l'image de 2 est 0.

Proposition 3 : Pour tout x de [–5 ; 5], $-2 \leqslant f(x) \leqslant 1$ Faux. Le minimum de f est –3 atteint en 4 et le maximum de f est 2 atteint en –3.

Proposition 4 : Pour tout x de [–5 ; 5], $-3 \leqslant f(x) \leqslant 2$ Vrai. Le minimum de f est –3 atteint en 4 et le maximum de f est 2 atteint en –3.