Exercice 1 Moyenne, écart-type

Rappel des formules pour calculer la variance V d'une série statistique.

Il existe deux formules pour calculer la variance …

L'une à partir de la définition : V = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{i=p} f_i(x_i-\bar{x})^2$

L'autre à partir de la somme des carrés des valeurs : V = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i^2 - \bar{x}^2$

Énoncé :

On considère la série suivante :

Valeurs x_i	2	3	5	10	**total**
Effectifs n_i	4	2	7	2	15
$n_i x_i$	8	6	35	20	69
$n_i x_i^2$	16	18	175	200	409

Calculez la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série en indiquant les calculs sur la copie.
(*Si vous le désirez, vous pouvez utiliser les lignes et la colonne vierges pour préparer vos calculs*)

$\bar{x} = \frac{4\times2+2\times3+7\times5+2\times10}{4+2+7+2} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5} = 4{,}6$

V = $\frac{1}{15}\times(4\times2^2+2\times3^2+7\times5^2+2\times10^2) - \left(\frac{23}{5}\right)^2 = \frac{409}{15} - \left(\frac{23}{5}\right)^2 = \frac{409\times5-23^2\times3}{75} = \frac{458}{75}$.

σ = $\sqrt{V} \approx 2{,}47$

Exercice 2 coût, recette, bénéfice, …

Rappel : ces formules doivent vous rappeler quelque chose … et peuvent être utiles dans cet exercice.

$\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Énoncé :

Monsieur Dupond veut étudier la rentabilité de fabrication d'un produit manufacturé.

* q est le nombre d'articles fabriqués.

* le coût unitaire (en euros) du produit dépend de la quantité q produite et est donnée par cette relation :

$$U(q) = 2q - 26 + \frac{102}{q}$$

1) Quel est le coût unitaire lorsque M. Dupond fabrique

a) un seul produit U(1) = 2 – 26 + 102 = 78

(Si on produit un et un seul article, le coût de production de cet article est : 78€)

b) dix produits U(10) = 20 – 26 + 10,2 = 4,2

(Si on produit exactement 10 articles, le coût de production d'un et un seul de ces articles est : 4,2€)

c) vingt produits. U(20) = 40 – 26 + 5,1 = 19,1

(Si on produit exactement 20 articles, le coût de production d'un et un seul de ces articles est : 19,1€)

2) À l'aide de la calculatrice, dressez le tableau de variations de la fonction U sur l'intervalle [1 ; 20].
Pour quelle quantité d'articles, le coût unitaire est-il minimal ?
(*rappel* : *q est un nombre entier)*

q	1		7		20
$U(q)$	78	↘	U(7)	↗	19,1

Le coût unitaire est minimal lorsque la quantité produite est égale à 7 unités.

En ce cas :

$U(7) = 14 - 26 + \dfrac{102}{7} \approx 2{,}57$ €

3) M. Dupond décide de vendre chaque article fabriqué 14 €
Justifiez en indiquant les calculs les résultats suivants :
a) Le coût total de production de q articles est $C(q) = 2q^2 - 26q + 102$

Pour q objets fabriqués, $C(q) = U(q)\times q = \left(2q - 26 + \dfrac{102}{q}\right)q = 2q^2 - 26q + 102$

b) Le bénéfice (s'il existe) est donné pour q articles fabriqués et vendus par $B(q) = -2q^2 + 40q - 102$
Chaque article est vendu 14€, donc, le prix de vente de q articles est $14q$, et,
$B(q) = 14q - C(q) = 14q - (2q^2 - 26q + 102) = -2q^2 + 40q - 102$

4) En remarquant que la fonction B est une fonction polynôme du second degré, déterminez sur quel intervalle la production est rentable pour M. Dupond et donnez la quantité à fabriquer pour un bénéfice maximal.

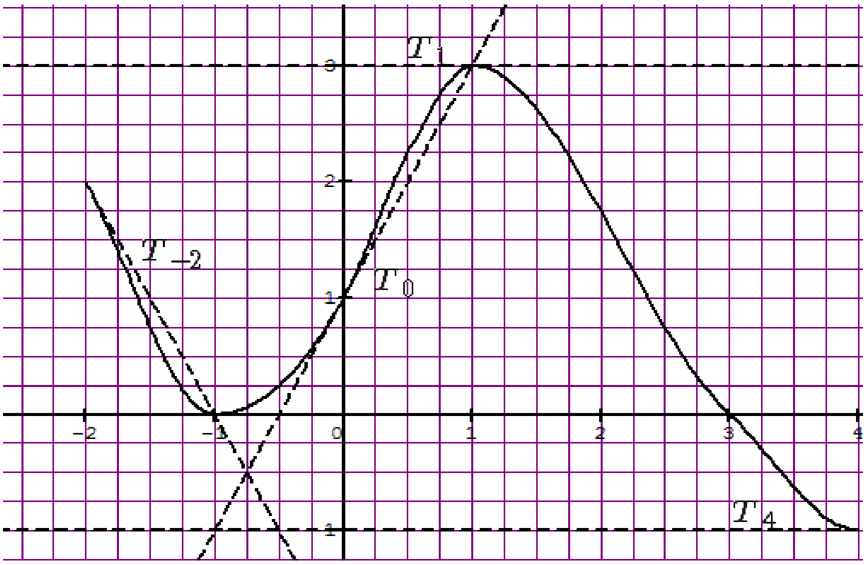
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 40^2 - 4\times(-2)\times(-102) = 784 = 28^2$

$q_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-40-28}{2\times(-2)} = 17$ et $q_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-40+28}{2\times(-2)} = 3$.

$B(q) \geqslant 0$ si et seulement si $q \in [3 ; 17]$ puisque le coefficient –2 de q^2 est négatif.

le maximum est atteint pour $q = \dfrac{-b}{2a} = 10$ unités

Exercice 3 Tangentes et nombre dérivé.



Une fonction f dérivable sur l'intervalle [–2 ; 4] est représentée ci-dessus par la courbe $\mathscr{C}$.
Les droites T_{-2} , T_0 , T_1 , T_4 indiquent les tangentes aux points de $\mathscr{C}$. d'abscisses respectives –1, 0, 1 et 4.
1) **Par lecture graphique**, donnez
a) $f(-2) = 2$ et $f'(-2) = -2$. $f(-2)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse –2
$f'(-2)$ est le coefficient directeur de T_{-2}
b) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$. $f(0)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0
$f'(0)$ est le coefficient directeur de T_0
c) $f(1) = 3$ et $f'(1) = 0$. $f(1)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1
$f'(1)$ est le coefficient directeur de T_1
d) $f(4) = -1$ et $f'(4) = 0$. $f(4)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 4
$f'(4)$ est le coefficient directeur de T_4

2) Déterminez une équation des tangentes T_{-2} et T_0 .
T_{-2} est la droite passant par le point de coordonnées (–2 ; 2) et de coefficient directeur –2 :
une équation de T_{-2} est $y = -2(x + 2) + 2 = -2x - 2$
T_0 est la droite passant par le point de coordonnées (0 ; 1) et de coefficient directeur 2 :
une équation de T_0 est $y = 2(x - 2) + 1 = 2x + 1$