Exercice 1 (Connaissances du cours)

Compléter les tableaux suivants: (vous pouvez répondre sur la feuille photocopiée)

1) Fonctions de référence:

Fonction *f*	**Fonction dérivée *f '***	**Intervalles de dérivabilité**
$f: x \mapsto k$ (fonction constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^n$ (n entier supérieur ou égal à 2)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty\ ;0[$ $]0\ ;+\infty[$
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;+\infty[$

2) Dérivées et opérations.

Dans le tableau suivant u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et le quotient $\frac{u}{v}$ est défini.

Opérations sur les fonctions		**fonction dérivée**
Somme: $f = u + v$		$(u+v)' = u'+v'$
Produit:	$f = ku$ (k constante)	$(ku)' = ku'$
	$f = uv$	$(uv)' = u'v+v'u$
Quotient:	$f = \frac{1}{v}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
	$f = \frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

Exercice 2 (Applications du cours, calculs)

Pour **chacune** des fonctions suivantes, préciser sur quelle partie de $\mathbb{R}$, la fonction est dérivable et calculer la dérivée.

$f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$

f, étant la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (fonctions puissances), est dérivable sur $\mathbb{R}$, (f est un polynôme),
Pour tout x réel, $f'(x) = 3\times 2x - 4\times 1 + 0 = 6x - 4$

$g : x \mapsto (x + 1)\times \sqrt{x}$

g est le **produit** de deux fonctions : $u : x \mapsto x + 1$ (fonction affine) et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ (fonction racine carrée)

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 1$.

v est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g est donc dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et,

pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1\times\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) = \frac{2x+x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$.

(autre écriture possible : $g'(x) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$)

$h : x \mapsto \frac{3x+5}{2x+1}$

h est définie si et seulement si $2x + 1 \neq 0$ si et seulement si $x \neq -\frac{1}{2}$.

h est le quotient de $u : x \mapsto 3x + 5$ (fonction affine) et $v : x \mapsto 2x + 1$ (fonction affine).

h est donc dérivable sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$.

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$

Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, $h'(x) = \frac{3(2x+1)-2(3x+5)}{(2x+1)^2} = \frac{-7}{(2x+1)^2}$.

Exercice 3 ***(Étude d'une fonction)***

Avertissement : il ne s'agit pas de lecture graphique …. mais le graphique donné à la fin de l'exercice peut être une aide pour contrôler les résultats obtenus.

En cas d'incohérence entre vos résultats et le graphique et si vous ne retrouvez pas la provenance de votre erreur, indiquez-le sur votre copie.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

1) Calculer, pour tout x réel, $f'(x)$ et démontrer que $f'(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$

$f'(x) = \frac{1}{4}\times(4x^3) - \frac{2}{3}\times(3x^2) + \frac{1}{2}\times 2x - 2$.

$f'(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Or, $(x^2 + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = f'(x)$.

2) a) **Étudier** le signe de $f'(x)$.

Comme $x^2 + 1 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.

b) **En déduire** le tableau de variations de la fonction f. (On admettra que $f(2) = -\frac{7}{3}$).

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $(x-2)$ signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$

$f(0) = 1$ et $f(3) = \frac{81}{4} - \frac{2}{3}\times 27 + \frac{9}{2} - 6 + 1 = \frac{81-72+18-20}{4} = \frac{7}{4}$.

Justifier **à l'aide du tableau de variations** que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions

f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 2]$, d'où,

Si $x \leqslant 0$ alors $f(x) \geqslant f(0)$, soit : $f(x) \geqslant 1$

Si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$, soit : $-\frac{7}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$

f est strictement croissante sur $[2\ ; +\infty[$, d'où,

Si $2 \leqslant x \leqslant 3$ alors $f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(3)$, soit : $-\frac{7}{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{7}{4}$

si $x \geqslant 3$ alors $f(x) \geqslant f(3)$, soit : $f(x) \geqslant \frac{7}{4}$.

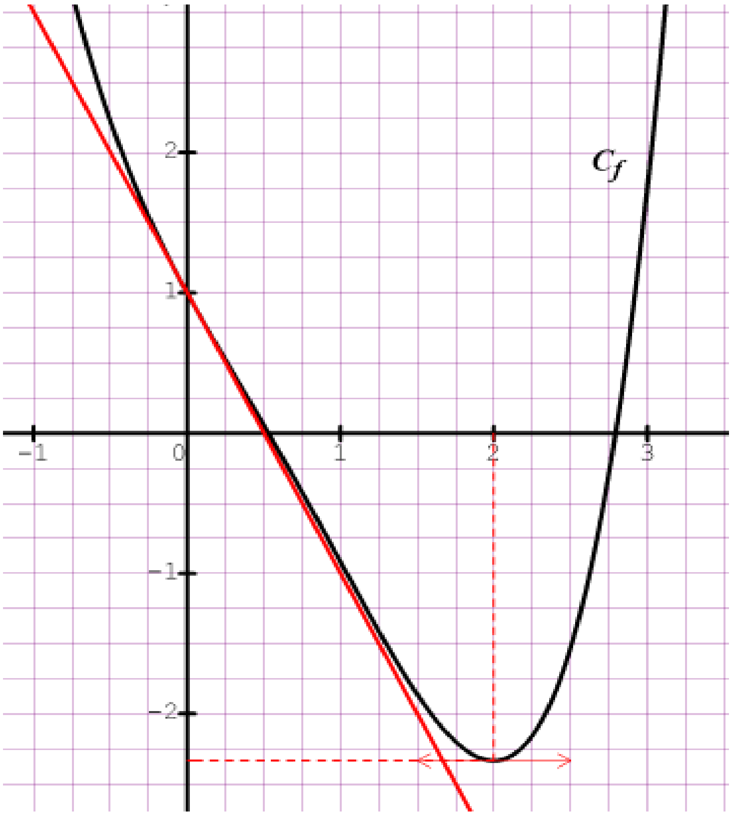
Sur l'intervalle $[0\ ; 2]$, f est strictement décroissante et f change de signe, donc, f s'annule sur l'intervalle $[0\ ; 2]$.

Sur l'intervalle $[2\ ; 3]$, f est strictement croissante et f change de signe, donc, f s'annule sur l'intervalle $[2\ ; 3]$.

3) Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 et construire cette tangente sur le graphique.

Le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $f'(0) = -2$

Construction : La tangente passe par le point A(0 ; 1) et a pour coefficient directeur –2.



2
1
−1
−2
−1
0
1
2
3
C_f