Exercice 1 Algorithmes 4 points

1) L'algorithme suivant permet d'afficher tous les termes de 1 à n après avoir choisi une valeur de n, d'une suite (u_n) définie par récurrence.

D'après cet algorithme, que vaut u_0 ?

$u_0 = 5$ (instructions : *n* prend la valeur 0 et *u* prend la valeur 5)

Comment est défini u_{n+1} en fonction de u_n (relation de récurrence) ?

$u_{n+1} = 3u_n - 4$ (instruction : *u* prend la valeur 3**u* – 4)

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  u PREND_LA_VALEUR 5
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 3*u - 4
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer n : 6
11
29
83
245
731
2189

***Algorithme terminé***
```

2) Voici un algorithme qui permet de donner la plus petite valeur de l'indice n d'une suite (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 2 \times v_n + 1$ telle que $v_n > 1500$.

Compléter la ligne 10

```
1   VARIABLES
2     n EST_DU_TYPE NOMBRE
3     v EST_DU_TYPE NOMBRE
4   DEBUT_ALGORITHME
5     n PREND_LA_VALEUR 0
6     v PREND_LA_VALEUR 2
7     TANT_QUE (v<=1500) FAIRE
8       DEBUT_TANT_QUE
9       n PREND_LA_VALEUR n+1
10      v PREND_LA_VALEUR        2*v + 1
11      FIN_TANT_QUE
12    AFFICHER n
13  FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
9
***Algorithme terminé***
```

Exercice 2 calculs de termes d'une suite, manipulation d'indices 4 points

Pour chacune de ces deux suites, calculer les termes u_1, u_2, u_{n+1}, u_{2n}, $u_n + 1$.

1) La suite (u_n) est définie par : $u_n = n^2 + 3n + 1$

2) La suite (u_n) est définie par $u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$

Indices / Suites	1	2	n+1	2n		calcul de $u_n + 1$
$u_n = n^2 + 3n + 1$	$u_1 = 1^2+3\times1+1 = 5$	$u_2 = 2^2+3\times2+1 = 11$	$u_{n+1} = (n+1)^2+3(n+1)+1 = n^2+2n+1+3n+3+1 = n^2+5n+5$	$u_{2n} = (2n)^2+3\times(2n)+1 = 4n^2 + 6n + 1$		$u_n + 1 = n^2+3n+1+1 = n^2+3n+2$
$u_n = \dfrac{2n+1}{3n+1}$	$u_1 = \dfrac{2\times1+1}{3\times1+1} = \dfrac{3}{4}$	$u_2 = \dfrac{2\times2+1}{3\times2+1} = \dfrac{5}{7}$	$u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+1}{3(n+1)+1} = \dfrac{2n+3}{3n+4}$	$u_{2n} = \dfrac{2(2n)+1}{3\times(2n)+1} = \dfrac{4n+1}{6n+1}$		$u_n + 1 = \dfrac{2n+1}{3n+1} +1 = \dfrac{2n+1+3n+1}{3n+1} = \dfrac{5n+2}{3n+1}$
Remarques	*Ces deux suites sont définies en fonction de n, il suffit de remplacer n par l'indice indiqué ...*					*on ajoute 1 à l'image u_n.*

Exercice 3 Suites arithmétiques 6 points

1) La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$ est-elle une suite arithmétique ? Justifier votre réponse.

$u_0 = 1$; $u_1 = 2\times u_0 + 1 = 2\times1 + 1 = 3$ et $u_2 = 2\times u_1 + 1 = 2\times3 + 1 = 7$
Comme $u_1 - u_0 = 3 - 1 = 2$ et $u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$ sont différents, la suite u_n n'est pas une suite arithmétique.

2) La suite (v_n) définie par $v_n = 3 - 2n$ est-elle une suite arithmétique ? Justifier votre réponse ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} - v_n = (3 - 2(n+1)) - (3 - 2n) = -2$ (calculs à faire …)

La suite (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison -2.

3) La suite (w_n) est une suite arithmétique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison 3.

Calculer w_1, w_2.

$w_1 = w_0 + 3 = 5$,
$w_2 = w_1 + 3 = 8$,

Donner l'expression de w_n en fonction de n.

$w_n = 2 + 3n$.

4) Voici la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

S = 6 + 9 + 12 + ... + 501.

a) Combien cette somme comporte de termes ?

On ajoute 3 au terme précédent … On a donc en posant $u_0 = 6$, $501 = 6 + 3n$

on en déduit : $n = \dfrac{501-6}{3} = 165$. $u_{165} = 501$

De u_0 à u_{165}, on compte 166 termes.

b) En remarquant qu'on peut écrire S = 501 + 498 + ... + 6, calculer 2S, puis S.

S =	6 +	9 +	12 +	… +	495 +	498 +	501	On écrit deux fois la somme … et on obtient :
S =	501 +	498 +	495 +	… +	12 +	9 +	6	
2S =	507 +	507 +	507 +	… +	507 +	507 +	507	166 fois 507

$2S = 507\times166$, donc, $S = \dfrac{507\times166}{2} = 507\times83 = 42\,081$

Exercice 4 Fonction ***5 points***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+8}$

1) Calculer la dérivée f ' (x).

f est le quotient de deux polynômes (fonction rationnelle)

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^2 + 8$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$

$$f' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{1\times(x^2+8)-2x\times(x+1)}{(x^2+8)^2} = \frac{x^2+8-2x^2-2x}{(x^2+8)^2} = \frac{-x^2-2x+8}{(x^2+8)^2}$$

2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{-(x-2)(x+4)}{(x^2+8)^2}$ *(Si vous ne trouvez pas ce résultat vous l'admettrez pour les questions suivantes 3/ et 4/).*

En développant le numérateur de $\dfrac{-(x-2)(x+4)}{(x^2+8)^2}$,

on a : $\dfrac{-(x-2)(x+4)}{(x^2+8)^2} = \dfrac{-(x^2+4x-2x-8)}{(x^2+8)^2} = \dfrac{-x^2-2x+8}{(x^2+8)^2}$

3) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f.

Puisque $f'(x)$ est donné sous sa forme factorisée, il suffit de chercher le signe de chacun des facteurs :
-1 est toujours négatif.
$x-2$ change de signe en 2 et comme 1, le coefficient de x est positif, on a dans l'ordre : – 0 +
$x+4$ change de signe en -4 et comme 1, le coefficient de x est positif, on a dans l'ordre : – 0 +
$(x^2+8)^2$, étant le carré d'une expression, est toujours positive.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
-1		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	
$x-2$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$(x^2+8)^2$		$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$f(-4)$	↗	$f(2)$	↘	

$f(-4) = \dfrac{-3}{24} = \dfrac{-1}{8}$ et $f(2) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{8}$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -4]$ et sur $[2 ; +\infty[$, et est strictement croissante sur $[-4 ; 2]$.

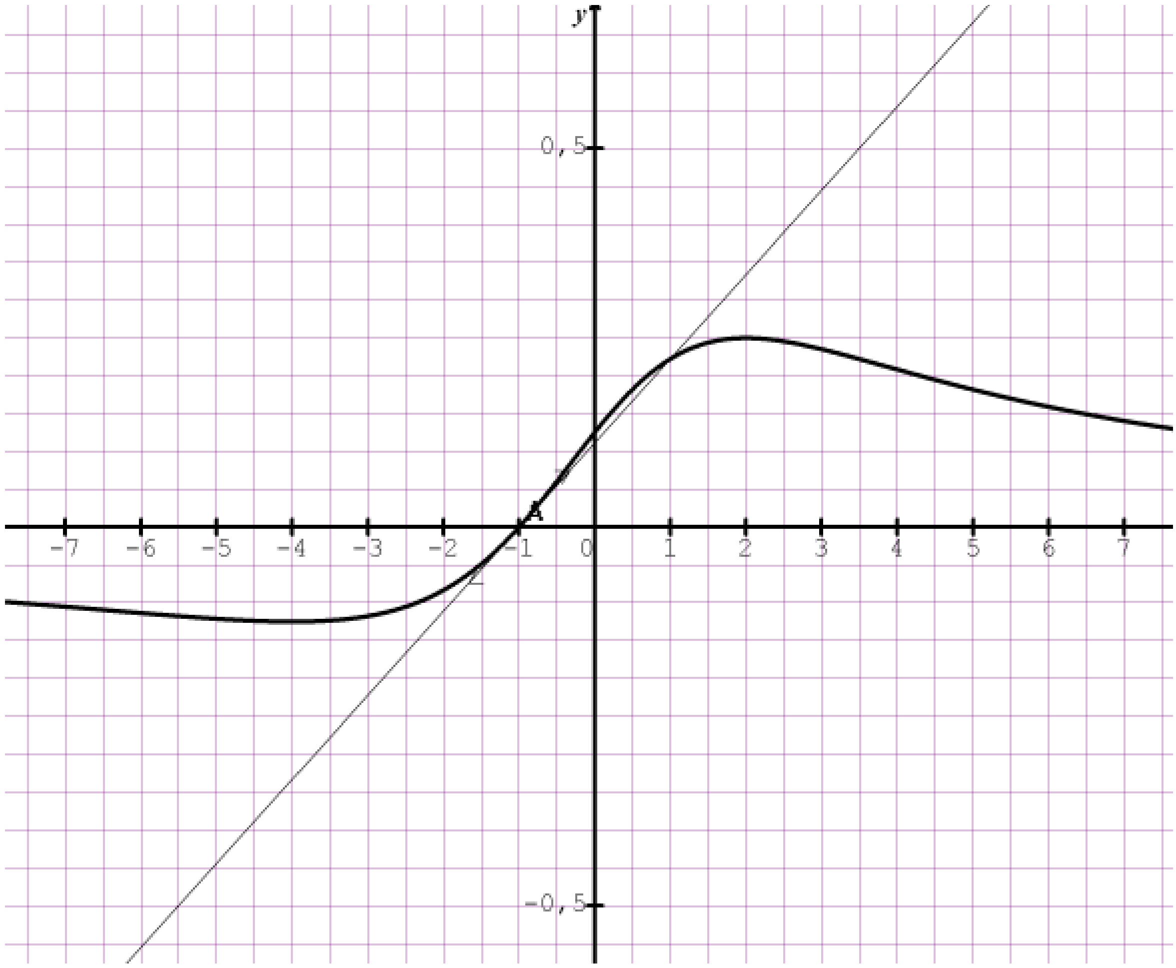
4) Déterminer une équation de la tangente à C_f, courbe représentative de f, au point d'abscisse -1.

Le coefficient directeur est $f'(-1) = \dfrac{9}{9^2} = \dfrac{1}{9}$.

La tangente passe par le point $A(-1 ; f(-1))$ et $f(-1) = 0$

une équation de la tangente à C_f en -1 est : $y = \dfrac{1}{9}(x-(-1)) + 0 = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{1}{9}$.

Graphique (non demandé)


y
0,5
-0,5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
A