En annexe, est fourni un formulaire qui peut être utile dans un ou plusieurs exercices …

Partie I- Fonctions

Exercice 1- Calculs de dérivées

Pour chacune des fonctions, donner l'ensemble de définition et calculer sa dérivée …

1) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$ f définie si et seulement si $x - 3 \neq 0$, d'où,

$E_f =]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 5$, donc, $u'(x) = 1$, et, $v(x) = x - 3$, donc, $v'(x) = 1$

f' est donc de la forme $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \dfrac{1\times(x-3)-1\times(x+5)}{(x-3)^2} = \dfrac{-8}{(x-3)^2}$

2) $g(x) = (x^2 + 1)\times\sqrt{x}$ g définie si et seulement si $x \geqslant 0$, d'où,

$E_g = [0 ; +\infty[$

g est de la forme uv avec $u(x) = x^2 + 1$, d'où, $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ d'où $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

g' est de la forme $u'v + v'u$.

Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2+1) = \dfrac{4x^2+x^2+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$.

3) $h(x) = x^2 + 1 + \dfrac{2}{x}$ h est définie si et seulement si $x \neq 0$, d'où,

$E_h =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

h est de la forme $u + v$ avec $u(x) = x^2 + 1$, d'où, $u'(x) = 2x$ et $v(x) = 2\times\dfrac{1}{x}$, d'où, $v'(x) = 2\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$.

Pour tout $x \neq 0$, $h'(x) = 2x + 0 - 2\times\dfrac{1}{x^2} = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2(x^3-1)}{x^2}$.

Exercice 2- Une étude de fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère.

1) Calculer, pour tout x réel, l'expression de la dérivée $f'(x)$.

f est un polynôme du troisième degré, défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ (ensemble des réels).

$f'(x) = 2\times3x^2-3\times2x-12 = 6(x^2-x-2)$

2) ***<u>Démontrer</u>*** *que $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 2$.*

L'expression de $f'(x)$ est du **second degré.**

On résout : $x^2 - x - 2 = 0$ $(a = 1, b = -1, c = -2)$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)-3}{2\times1} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-1)+3}{2\times1} = 2$

Commentaire :

Il ne suffit pas de calculer $f(-1)$ et $f(2)$ …

En faisant ces calculs, vous montrez que -1 et 2 sont **<u>des</u>** solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

Pour justifier qu'on a bien ici **<u>les</u>** solutions, il faut donner des arguments supplémentaires ….

Un argument simple et immédiat est de dire : $f'(x)$ est une expression du second degré.

3) ***<u>Étudier</u>*** *le signe de la dérivée $f'(x)$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.*

<u>Comme 6 > 0,</u> le signe de $f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Commentaire :

Trop d'affirmations sans preuve … donner les signes dans le tableau sans donner le ou les arguments justifiant ces signes n'est pas : **étudier** …

Trop d'erreurs dans cette question essentielle dans une étude de fonctions ...

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-1)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Calculer la valeur des extremums locaux.

$f(-1) = 2\times(-1)^3-3\times(-1)^2-12\times(-1)+3 = -2 - 3 + 12 + 3 = 10$

$f(2) = 2\times2^3-3\times2^2-12\times2+3 = 16 - 12 - 24 + 3 = -17$

4) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Coordonnées du point de contact A : $x = 0$, $f(0) = 3$ A(0 ; 3)

Coefficient directeur de la tangente : $f'(0) = -12$

Équation de la tangente en A : $y = -12(x - 0) + 3 = -12x + 3$

<u>Partie II- Suites</u>

Exercice 3 calculs et reconnaître une suite arithmétique, une suite géométrique …

Dire dans chaque cas, si la suite donnée est une suite arithmétique, une suite géométrique, ou n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

Dans le cas où la suite est une suite arithmétique ou une suite géométrique, indiquer la raison de la suite et le premier terme u_0.

Méthode :

Si la nature de la suite n'est pas immédiate, tester avec les premiers termes ….

Si la suite semble être une suite arithmétique, évaluer $u_{n+1} - u_n$ ou reconnaître $u_n = an + b$ (premier degré)

Si la suite semble une suite géométrique, évaluer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ou reconnaître $u_n = u_0 \times q^n$

1) (u_n) définie par $u_n = \frac{2^n}{3}$.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3} \times \frac{3}{2^n} = 2$ ***ou bien*** $u_n = \frac{1}{3} \times 2^n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{2^0}{3} = \frac{1}{3}$ et de raison 2.

2) (u_n) définie par $u_n = 2(n + 1) - 4(n + 3)$

$u_n = 2(n + 1) - 4(n + 3) = 2n + 2 - 4n - 12 = -2n - 10$ (on reconnaît : $u_n = an + b$)

ou bien : $u_{n+1} - u_n = -2(n + 1) - 10 - (-2n - 10) = -2$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -10$ et de raison -2.

3) (u_n) définie par $u_n = n(n + 1) - 4(n + 3)$

$u_0 = -12$, $u_1 = -14$, $u_2 = -14$

La suite n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique, puisque $u_2 - u_1 = 0$ et $u_1 - u_0 = -2$, et, $\frac{u_1}{u_0} = \frac{7}{6}$, $\frac{u_2}{u_1} = 1$

ou bien : on développe : $u_n = n^2 - 3n - 12$ (second degré)

La suite n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

Exercice 4 Une étude de suite

M. Étienne Konom' dépose chaque 31 décembre 900 € sur un livret à intérêts composés au taux annuel de 3 %.

Les intérêts sont capitalisés le 31 décembre à minuit.

Le premier dépôt a eu lieu le 31 décembre 2010.

On note u_n le capital en € disponible pour M. É. Konom' sur son livret le 1er janvier de l'année 2010 + n.

On a donc : $u_0 = 0$ et $u_1 = 900$.

1) a) Calculer u_2 et u_3.

$u_2 = 1{,}03 \times u_1 + 900 = 1\,827$

$u_3 = 1{,}03 \times u_2 + 900 = 2\,781{,}81$

Commentaires :

Lisez bien l'énoncé avant de commencer par supposer des propriétés (fausses) …

Prenez le temps de notée :
année 2010 + n : 1^er janvier 2010 ($n = 0$), $u_0 = 0$
1^er janvier 2011 ($n = 1$), $u_1 = 900$
1^er janvier 2012 ($n = 2$), $u_2 = \ldots$
Encore une fois, ce n'est pas le résultat brut qui est intéressant mais la façon d'obtenir ce résultat … c'est-à-dire les deux **opérations** à effectuer et leur **signification**.

b) Expliquer pourquoi on a la relation suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 900$.

À l'année n, le capital vaut u_n.
À l'année $n + 1$, le capital vaut u_{n+1}.
Le capital u_n a rapporté 3 % de u_n en intérêts, d'où, $1{,}03 \times u_n$ lors de la capitalisation des intérêts auxquels on ajoute les 900 € déposés, ce qui donne : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 900$.

Commentaires :

Ne confondez pas les années n, $n + 1$ et les capitaux u_n, u_{n+1} …
Ce ne sont pas les années qui sont multipliées par 1,03, mais, les capitaux …

2) On définit la suite (v_n) par :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 30\,000$. *(Remarque : v_n est exprimée en fonction de u_n)*

a) Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

$v_0 = u_0 + 30\,000 = 0 + 30\,000 = 30\,000$
$v_1 = u_1 + 30\,000 = 900 + 30\,000 = 30\,900$
$v_2 = u_2 + 30\,000 = 1\,827 + 30\,000 = 31\,827$
$v_3 = u_3 + 30\,000 = 2\,781{,}81 + 30\,000 = 32\,781{,}81$

b) En posant $\frac{v_1}{v_0}$, $\frac{v_2}{v_1}$, $\frac{v_3}{v_2}$, quelle conjecture peut-on émettre quant à la suite (v_n) ?

$$\frac{30900}{30000} = \frac{31827}{30900} = \frac{32781{,}81}{31827} = 1{,}03.$$

On peut conjecturer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03.

Commentaires :

À cette question, il est impossible d'affirmer que (v_n) est une suite géométrique.

On n'admet pas la conjecture, mais on la propose …

Admettre la conjecture revient à affirmer sans preuve la supposition.

c) Démonstration de la conjecture :

** Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis, v_{n+1} en fonction de u_n.*

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 30\,000$ et $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 900$, il vient :

$v_{n+1} = u_{n+1} + 30\,000$ *(v_{n+1} est exprimé en fonction de u_{n+1})*

$= 1{,}03u_n + 900 + 30\,000 = 1{,}03u_n + 30\,900$ *(v_{n+1} est exprimé en fonction de u_n)*

*** Exprimer u_n en fonction de v_n.*

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 30\,000$, on a : $u_n = v_n - 30\,000$ *(u_n est exprimé en fonction de v_n)*

**** En déduire v_{n+1} en fonction de v_n.*

$v_{n+1} = 1{,}03u_n + 30\ 900$

$= 1{,}03(v_n - 30\ 000) + 30\ 900$

$= 1{,}03 - 30\ 900 + 30\ 900 = 1{,}03v_n$.

Ce dernier résultat confirme-t-il la conjecture émise au 2/b) ?

Comme $v_{n+1} = 1{,}03v_n$,

par définition d'une suite géométrique, (v_n) est une suite géométrique de premier terme 30 000 et de raison 1,03.

La conjecture est confirmée.

Commentaires :

Revoir ce que signifie " exprimer une quantité **en fonction d**'une autre quantité "

Par exemple : Dans l'expression $y = f(x) = 2x + 1$ ***y* est exprimé en fonction de *x*.**

On en déduit : $2x = y - 1$, puis, $x = \dfrac{y-1}{2} = g(y)$ ***x* est exprimé en fonction de *y***

3) Si la question 2/ n'est pas réussie, on admettra pour la suite de l'exercice que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03.

a) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = 30\,000\times(1{,}03)^n - 30\ 000$.

Par propriété des suites géométriques, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$v_n = v_0\times\ (1{,}03)^n = 30\,000\times(1{,}03)^n$ et $u_n = v_n - 30\ 000 = 30\,000\times(1{,}03)^n - 30\ 000$

b) De quelle somme peut disposer N. É. Konom' au 1er janvier 2016. (On arrondira au centième d'euro).

On calcule $u_6 = 30\ 000\times 1{,}03^6 - 30\ 000 = 5\ 821,\ 57$ € à 0,01 près par excès.

c) M. É. Konom' voudrait disposer d'un capital de 15 000 €. En quelle année aura-t-il ce capital disponible ?

La calculatrice donne : $u_{13} = 14\ 056,\ 01$ et $u_{14} = 15\ 377{,}69$

En 2024, M. É. Konom ' pourra disposer d'un capital de 15 000 €.

Partie III- Probabilités

Exercice 5 Contrôle de définitions et propriétés

C'est le cours des années précédentes qui s'applique dans cet exercice !!!

Cours rappelé cette année lors de l'introduction de la nouvelle notion : variable aléatoire …

Rappel :

Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ (ou $P(A \cup B) + P(A\cap B) = P(A) + P(B)$)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

1) Les tableaux suivants permettent-ils de définir une loi de probabilité ?

Tableau 1 :

issues	–1	2	4	8
probabilités	0,5	0,2	0,1	0,2

Ce tableau définit une loi de probabilité, car, les probabilités sont comprises entre 0 et 1, et leur somme vaut 1.

Tableau 2 :

issues	1	2	3	4
probabilités	0,5	–0,2	0,4	0,3

Ce ne sont pas des probabilités puisque $-0,2 \notin [0 ; 1]$

2) Lors d'une expérience aléatoire, on a obtenu les résultats suivants où A et B sont deux événements de l'univers E : $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cup B) = 0,9$

Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A})$

On sait : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) + P(A \cup B)$, d'où, $P(A \cap B) = 0,8 + 0,6 - 0,9 = 0,5$

et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Illustration :

Dans un groupe de 100 personnes, certains font de la course, d'autres (ou le mêmes) font du cyclotourisme.

90 personnes font de la course **ou** du cyclo.

80 personnes font de la course (dont 50 font du cyclo) (30 font seulement de la course)

60 personnes font du cyclo (dont 50 font de la course) (10 font seulement du cyclo).

50 personnes font de la course **et** du cyclo.

10 ne font ni cyclo, ni vélo.

20 ne font pas de la course (dont 10 font du cyclo).

40 ne font pas du cyclo (dont 30 font de la course).

	B : font du cyclo	$\overline{B}$: ne font pas de cyclo	
A : font de la course	$0,5=P(A\cap B)$	$0,3=P(A\cap\overline{B})$	$0,8=P(A)$
$\overline{A}$: ne font pas de la course	$0,1=P(\overline{A}\cap B)$	$0,1=P(\overline{A}\cap\overline{B})$	$0,2=P(\overline{A})$
	$0,6=P(B)$	$0,4=P(\overline{B})$	1

Exercice 6 une expérience aléatoire

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire successivement au hasard avec remise entre chaque tirage 4 cartes dans un jeu de 32 cartes.

On appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de cartes " cœur " obtenues.

1) Soit C l'événement : «obtenir une carte " cœur " ».

Quelle est la probabilité de C, notée P(C) ?

Le jeu contient 8 cartes " cœur " sur 32 cartes.

Le tirage étant au hasard, on a : $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

2) a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

X prend les valeurs : 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.

(Sur quatre tirages, on peut avoir 4 cœurs, ou 3 cœurs, ou 2 cœurs, ou 1 cœur ou n'avoir aucun cœur)

*b) **Justifier** que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.*

En appelant succès, le tirage d'une carte à cœur, on a une épreuve de Bernoulli de paramètre $P(C) = \frac{1}{4}$.

On **répète 4 fois** de façon **identique** et **indépendante** puisqu'on remet la carte à chaque tirage.

(identique : la même épreuve (tirage d'une carte))

(indépendante : la même probabilité)

L'expérience aléatoire est donc un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X associée à ce schéma suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{4}$.

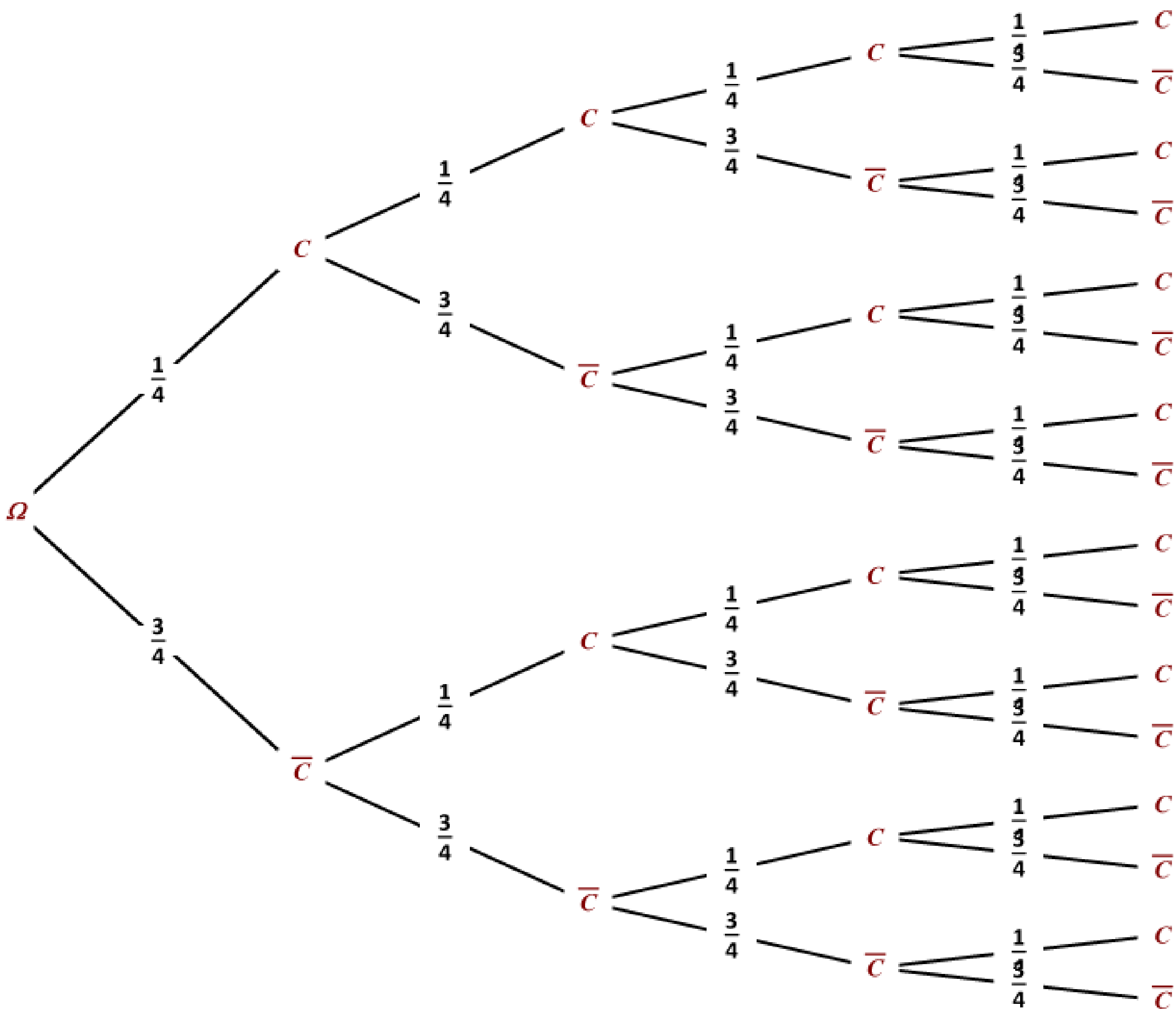
X suit la loi binomiale qu'on peut noter : $\mathcal{B}(4\ ;\ \frac{1}{4})$.

3) a) Compléter l'arbre pondéré commencé en annexe traduisant l'expérience aléatoire.

Cet arbre permet de visualiser le nombre de chemins donnant le nombre de succès (ou d'échecs).

Pour calculer la probabilité le long d'un chemin, on multiplie les probabilités rencontrées sur ce chemin.

On ne confond pas : $\overbrace{p \times p \times \ldots \times p}^{n \text{ fois}} = p^n$ avec $\overbrace{p + p + \ldots + p}^{n \text{ fois}} = n \times p$



b) *Calculer les probabilités suivantes :*

$P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$ (le seul chemin : $\overline{CCCC}$)

$P(X=4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$ (le seul chemin : $CCCC$)

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{256-81}{256} = \frac{175}{256}$

$P(X \leqslant 3) = 1 - P(X=4) = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$

Annexe :

Formulaire

Avertissement :

ce formulaire est donné sans commentaires, sans les conditions d'utilisation … c'est évidemment voulu !

Fonctions définies par : $f(x) =$	k	x	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
Dérivées définies par $f'(x) =$	0	1	nx^{n-1}	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Fonctions définies par : $f =$	$u+v$	uv	ku	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$
Dérivées définies par $f' =$	$u'+v'$	$u'v+v'u$	ku'	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$\Delta = b^2 - 4ac.$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

suite arithmétique	suite géométrique
Il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$	Il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_k + (n-k)r.$	$u_n = u_k \times q^{n-k}$