Index

4 page 40........1
12 page 40........1
35 page 41........1
59 page 44........2
62 page 44........2
63 page 44........2
78 page 45........3
82 page 46........3
90 page 46........5
97 page 47........5
98 page 47........6
107 page 50........7

4 page 40

a) la fonction affine $x \mapsto 3x + 4$ est strictement croissante car le coefficient 3 de x est strictement positif.

b) la fonction affine $x \mapsto 1 - 5x$ est strictement décroissante car le coefficient -5 de x est strictement négatif.

c) la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

d) la fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

---

12 page 40

La fonction homographique $f : x \mapsto \dfrac{x+7}{2x-1}$ est définie si et seulement si $2x - 1 \neq 0$

la fonction f n'est pas définie pour $x = \dfrac{1}{2}$.

---

35 page 41

1) les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont : $-3 ; 0 ; 4$

2) L'équation $f(x) = 1$ a trois solutions : $-3 < x_1 < -2$, $-1 \leqslant x_2 < 0$, $4 < x_3 < 5$

3) L'équation $f(x) = -1$ a 3 solutions.

---

59 page 44

valeurs de x	-10		-3		5		14
variations de f			5				-1
	2	$\nearrow$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

1 b) $f(x)$ est positif sur $[-10 ; -3]$ est la proposition vraie.

Preuve : si $-10 \leqslant x \leqslant -3$ alors $2 \leqslant f(x) \leqslant 5$

La phrase " 1a/ $f(x)$ est positif sur $[5 ; 14]$ " est fausse. Sur cet intervalle, $f(x)$ est négatif.

La phrase " 1c/ $f(x)$ est négatif sur $[-10 ; 5]$ " est fausse. Sur cet intervalle, $f(x)$ change de signe.

On considère l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-10 ; 14]$

2 b) " cette équation admet une seule solution " est la proposition vraie.

On peut même préciser que cette solution est dans l'intervalle $[-3 ; 5]$.

3) a/ $f(-1) > f(1)$.

En effet, $-3 < -1 < 1 < 5$ et sur l'intervalle $[-3 ; 5]$, la fonction f est strictement décroissante.

---

62 page 44

Méthode :

pour chaque question, il s'agit de déterminer le minimum et le maximum sur l'intervalle indiqué.

1) Si $0 \leqslant a \leqslant 5$ alors $3 \leqslant f(a) \leqslant 4$.

2) Si $-5 \leqslant a \leqslant 5$ alors $3 \leqslant f(a) \leqslant 10$.

3) D'après 1) : Si $0 \leqslant a \leqslant 5$ alors $3 \leqslant f(a) \leqslant 4$, d'où, en multipliant par -1, on obtient : $-4 \leqslant -f(a) \leqslant -3$.

4) a étant un réel tel que $-5 \leqslant a \leqslant 0$, on a : $0 \leqslant -a \leqslant 5$

par conséquent : $3 \leqslant f(-a) \leqslant 4$

---

63 page 44

1) si $-1 \leqslant a < b \leqslant 0$ alors $0 \leqslant -b < -a \leqslant 1$

Sur $[0 ; 1]$, la fonction f est strictement décroissante donc $f(-b) > f(-a)$.

Conclusion : si $-1 \leqslant a < b \leqslant 0$ alors $f(-a) < f(-b)$

Complément : comme on connaît les extremums sur $[0 ; 1]$, on peut écrire : $0 \leqslant f(-a) < f(-b) \leqslant 1$

2) si $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ alors $-1 < a - 1 < b - 1 \leqslant 0$

Sur $[-1 ; 0]$, la fonction f est strictement croissante donc $f(a - 1) < f(b - 1)$.

Conclusion : si $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ alors $f(a - 1) < f(b - 1)$

Complément : comme on connaît les extremums sur [–1 ; 0], on peut écrire : $-2 \leqslant f(a-1) < f(b-1) \leqslant 1$

3) si $-1 \leqslant a \leqslant 0$ alors $0 \leqslant a^2 \leqslant 1$ (fonction carré décroissante sur]–∞ ; 0]

Sur [0 ; 1], le minimum est atteint en 1 et vaut f(1) = 0, le maximum est atteint en 0 et vaut 1.

Conclusion : si $-1 \leqslant a \leqslant 0$ alors $0 \leqslant f(a^2) \leqslant 1$

---

78 page 45

$f : x \mapsto -5x^3 + 3$

Soit deux réels a et b tels que $a < b$

Comme la fonction cube est strictement croissante sur ℝ, on a :

$$a^3 < b^3$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité par $-5 < 0$, l'ordre change, d'où :

$$-5a^3 > -5b^3$$

En ajoutant 3 aux deux membres de l'inégalité, l'ordre reste le même :

$$-5a^3 + 3 > -5b^3 + 3$$

Ainsi : $f(a) > f(b)$

On a montré :

si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

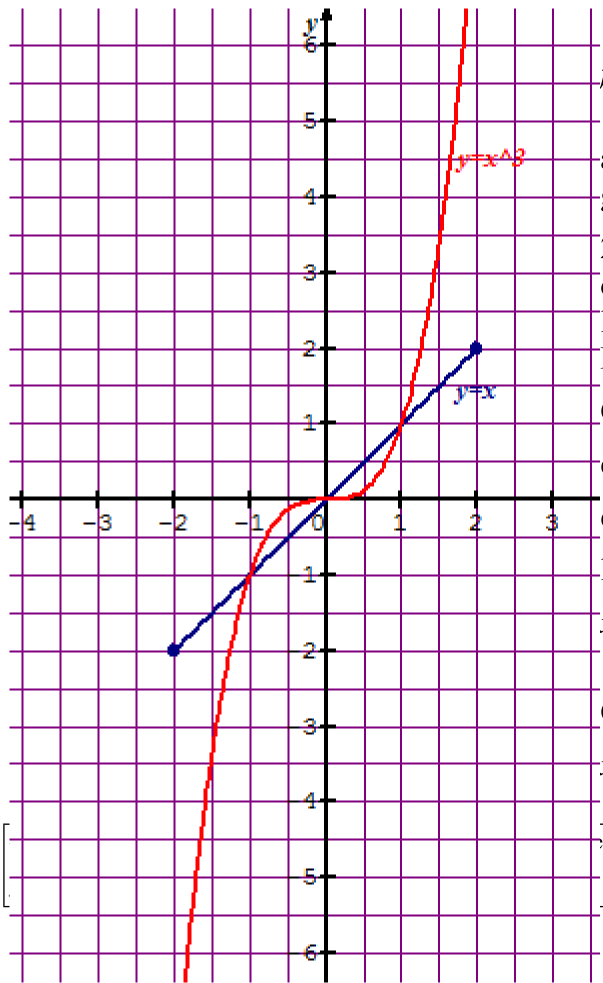
La fonction f est strictement décroissante sur ℝ.

Retenir :

Multiplier par un facteur strictement positif **conserve** l'ordre.

Multiplier par un facteur strictement négatif **inverse** l'ordre.

Ajouter un réel conserve l'ordre.



82 page 46

$f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto x$

1) Sur l'intervalle [–2 ; 2], on a les courbes (graphique à gauche)

2) Graphiquement, les points d'intersection de C_f et C_g sont les points A(– ; –1), O(0 ; 0) et B(1 ; 1)

Comme $x^3 - x = 0$

équivaut à $x^3 = x$

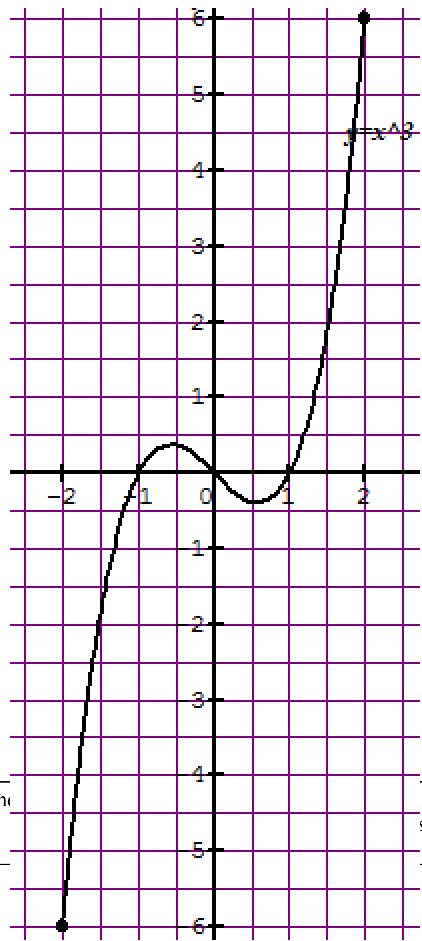
équivaut à $f(x) = g(x)$,

les solutions de l'équation

$x^3 - x = 0$ sont les réels –1, 0 et 1.

Comme $x^3 - x \geqslant 0$ équivaut à

$x^3 \geqslant x$ équivaut à $f(x) \geqslant g(x)$,



les solutions de l'équation

$x^3 - x \geqslant 0$ sont les réels de l'ensemble $[-1 ; 0] \cup [1 ; 2]$

(Graphiquement C_f au-dessus de C_g).

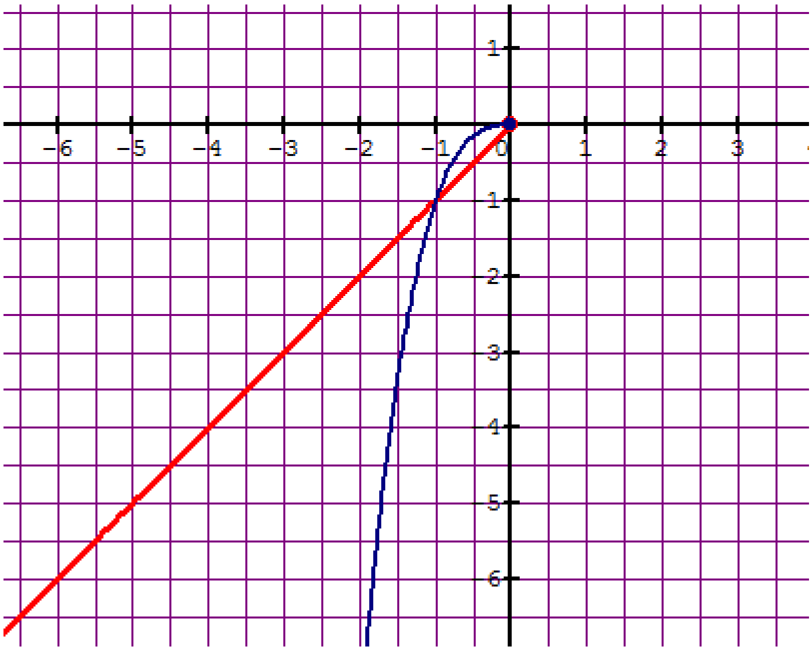
3) Soit $h : x \mapsto x^3 - x$

La courbe C_h coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses –1, 0 et 1, puisqu'on a :

$h(-1) = 0$, $h(0) = 0$ et $h(1) = 0$

La courbe C_h est au-dessus de l'axe des abscisses sur chacun des intervalles $[-1 ; 0]$ et $[1 ; 2]$ puisque pour x appartenant à l'un de ces intervalles $h(x) \geqslant 0$.

90 page 46



$f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^3$ sur $]-\infty\ ; 0]$

2) Comme C_f est au-dessus de C_g sur $]-\infty\ ; -1[$, on a : $f(x) > g(x)$ pour $x \in\ ]-\infty\ ; -1[$.
Comme C_f est au-dessous de C_g sur $]-1\ ; 0[$, on a : $f(x) < g(x)$ pour $x \in\ ]-1\ ; 0[$.

Conclusion : $x - x^3 > 0$ pour $x \in\ ]-\infty\ ; -1[$ et $x - x^3 < 0$ pour $x \in\ ]-1\ ; 0[$.

Complément : Algébriquement, on a : $x - x^3 = x(1 - x^2) = x(1 - x)(1 + x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 + x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - x^3$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

97 page 47

une entreprise fabrique des lots de cartes de vœux.

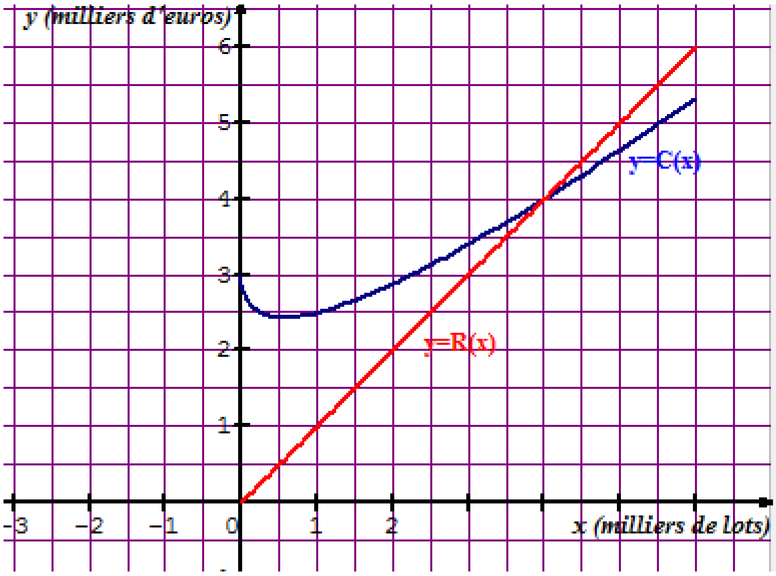
Le coût de fabrication de x milliers de lots est : $C(x) = x - 1{,}5\sqrt{x} + 3$ en milliers d'euros.

Chaque lot est vendu 1€.

1) La recette $R(x) = 1 \times x = x$ milliers d'euros.

2) a) Représentation des fonctions R et C sur l'intervalle [0 ; 6]

Copie d'écran :



b) Par lecture graphique,

R(x) ⩾ C(x) a pour ensemble de solutions l'intervalle [4 ; +∞[

c) L'usine doit fabriquer et vendre au moins 4 milliers de lots pour faire du bénéfice

Compléments :

Le bénéfice est $B(x) = R(x) - C(x) = 1{,}5\ \sqrt{x}\ - 3$

On cherche $B(x) \geqslant 0$, soit : $1{,}5\ \sqrt{x}\ - 3 \geqslant 0$

$$\text{qui équivaut à } \sqrt{x} \geqslant \frac{3}{1{,}5}\text{, soit : } \sqrt{x} \geqslant 2.$$

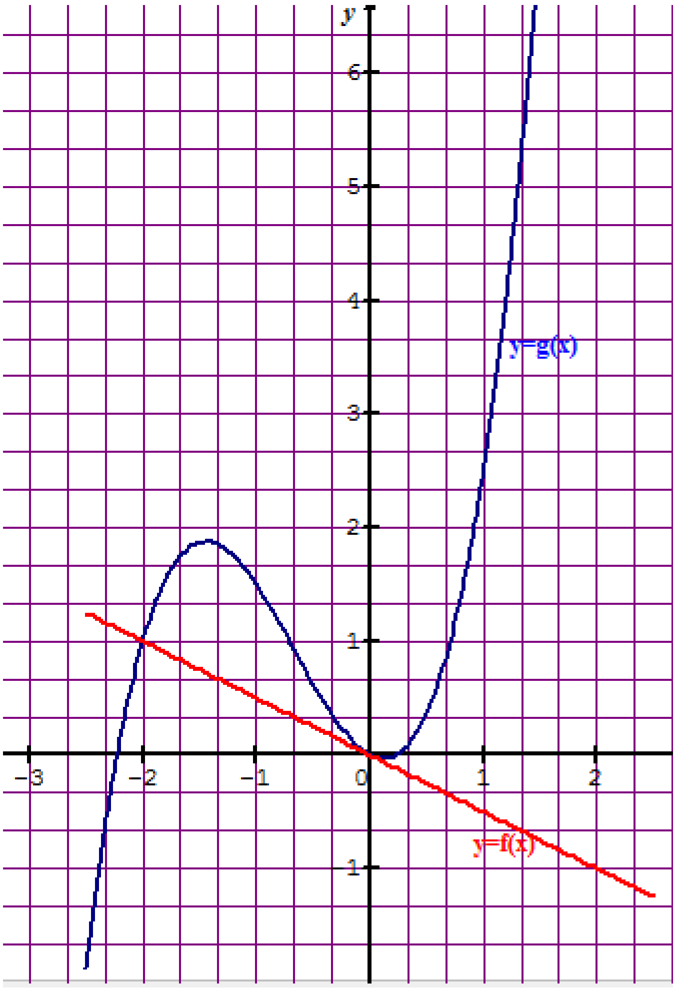
Comme la fonction carrée est strictement croissante sur (0 ; +∞[, on en déduit : $x \geqslant 4$.

---

98 page 47

f et g sont définies sur [–2,5 ; 2,5] par $f(x) = -\ \frac{x}{2}$ et $g(x) = x^3 + 2x - \frac{x}{2}$.

1) La courbe $\mathscr{C}$ représentant f est un segment de droite passant par O (origine du repère).
copie d'écran :



2) Les deux courbes ont pour points communs : O(0 ; 0) et A(–2 ; 1)
3) Par lecture graphique,
$f(x) \geqslant g(x)$ a pour ensemble de solutions l'ensemble [-2,5 ; -2] ∪ {0}

Compléments :

Résolution algébrique :

$f(x) \geqslant g(x)$ équivaut à $-\dfrac{x}{2} - (x^3 + 2x - \dfrac{x}{2}) \geqslant 0$

On résout l'inéquation : $-x^3 - 2x \geqslant 0$, ou $x^3 + 2x \leqslant 0$
Comme $-x^3 - 2x = -x^2(x+2)$ ou $x^3 + 2x = x^2(x+2)$
On résout :
$-x^2(x+2) \geqslant 0$ ou $x^2(x+2) \leqslant 0$
Comme $-x^2 \leqslant 0$, Comme $x^2 \geqslant 0$
on a : $x^2 = 0$ ou $x + 2 \leqslant 0$ on a : $x^2 = 0$ ou $x + 2 \leqslant 0$
Finalement : $x = 0$ ou $x \leqslant -2$

107 page 50

Analyse des données :

Cubes pleins : prix de revient 1 € le cm^3 (volume)

Cubes vides : 1 € le cm² (aire)

On note x (en cm) la mesure de longueur d'une ar^te.

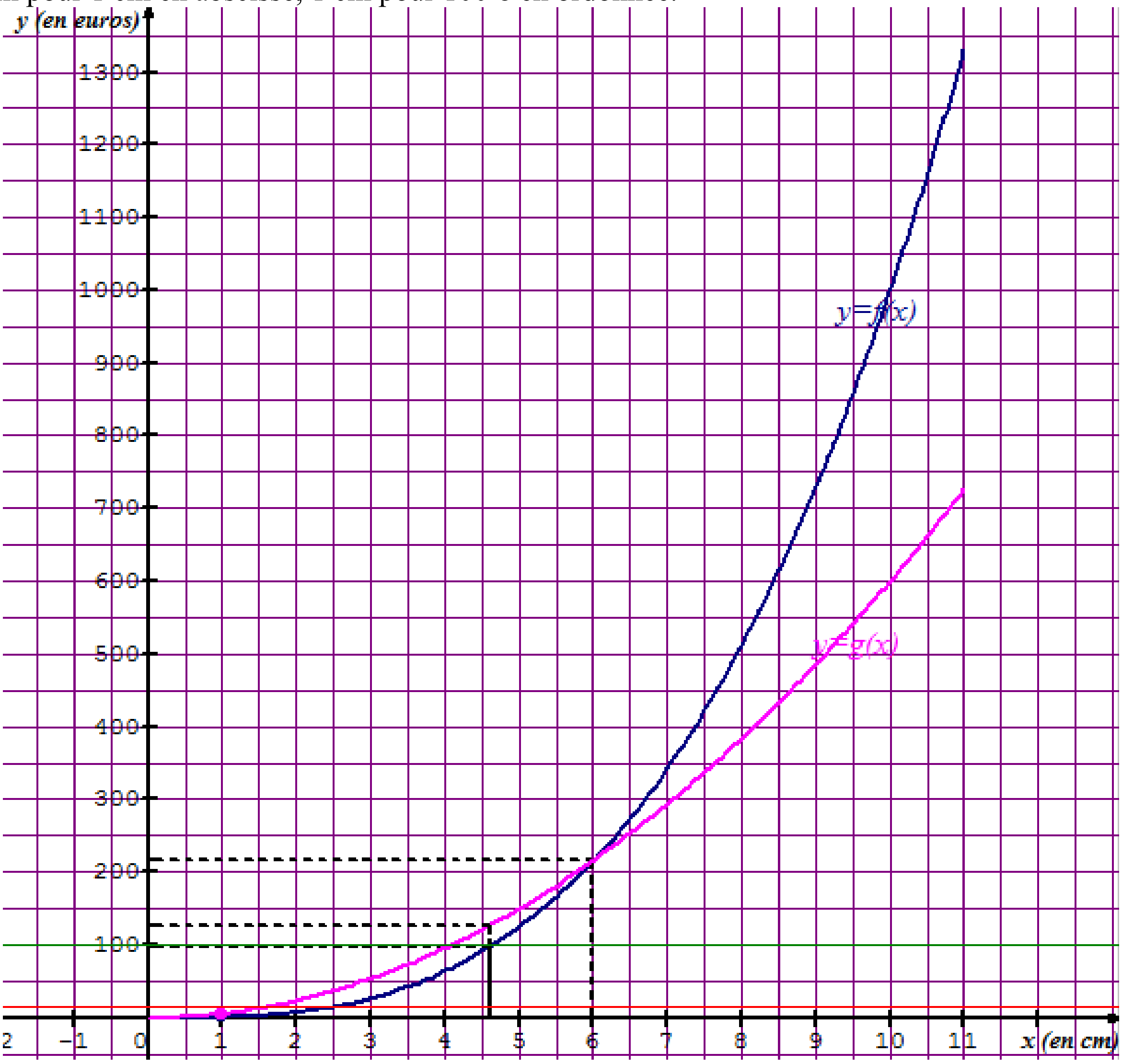
f est la fonction donnant le prix de revient $f(x)$ pour un cube plein.
g est la fonction donnant le prix de revient $g(x)$ pour un cube vide.

1) Le volume d'un cube est : $\mathcal{V}(x) = x^3$, d'où, $f(x) = x^3$.

Une face d'un cube est un carré, d'où, l'aire d'une face est x^2, et, le cube ayant 6 faces superposables, on a :

$g(x) = x^2$.

2) Représentation graphique :
unité : 1 cm pour 1 cm en abscisse, 1 cm pour 100 € en ordonnée.



En bleu, représentation graphique de f : $y = f(x)$.
En magenta, représentation graphique de g : $y = g(x)$.
3 a) Le prix de revient est 100 € pour un cube plein lorsque $x \approx 4{,}6$ cm.
Si $x \approx 4{,}6$ cm, le prix de revient du cube vide est d'environ 125 €.

b) Le prix de revient est 15 € pour un cube vide lorsque $x \approx 1{,}5$ cm.
Si $x \approx 1{,}5$ cm, le prix de revient du cube plein est d'environ 3 €.

c) $f(x) = g(x)$ lorsque les prix de revient sont égaux.

On lit $x = 6$ cm. (Le prix de revient est d'environ 220 €).

4) Résolution algébrique :

Pour le 3a) : $x^3 = 100$ équivaut à $x = \sqrt[3]{100} \approx 4{,}64$ cm et $6 \times x^2 = 6 \times \sqrt[3]{100}^2 \approx 129{,}27$ €

Pour le 3b), : $x \geqslant 0$ et $6x^2 = 15$ équivaut à $x = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}58$ cm

et $x^3 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3 \approx 3{,}95$ €.

Pour le 3c), $x^3 = 6x^2 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$