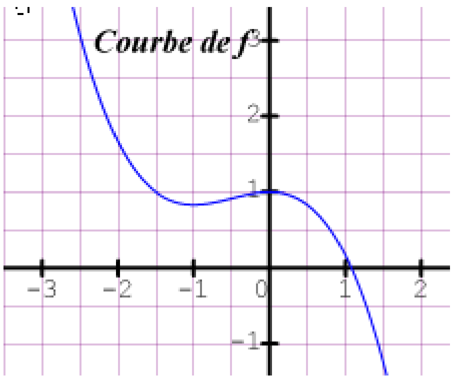
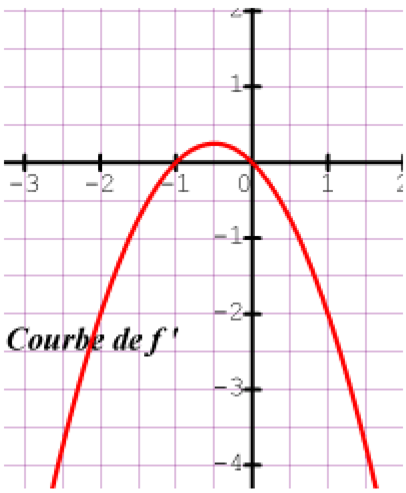
Index

27 page 118



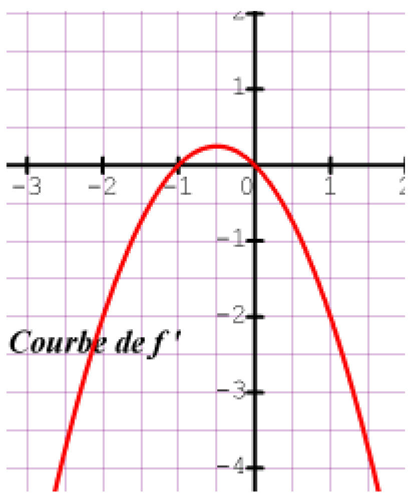


1) **Lecture graphique des variations de *f*** :

x	$-2{,}5$		-1		0		$1{,}5$
$f(x)$	3	$\searrow$	$\approx 0{,}9$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\approx -1{,}25$

2) Signe de *f '* (*x*) déduit du tableau précédent

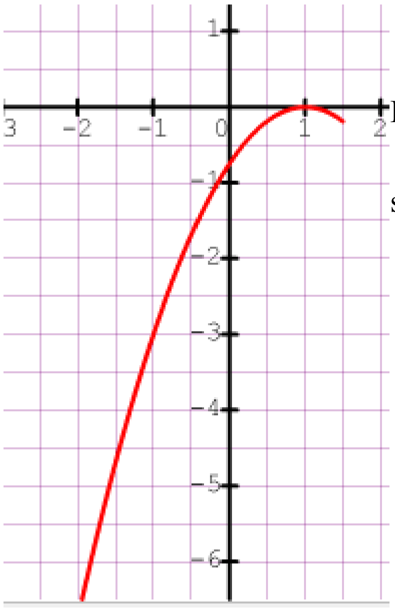
x	$-2{,}5$		-1		0		$1{,}5$
$f(x)$	3	$\searrow$	$\approx 0{,}9$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\approx -1{,}25$
signe $f'(x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	



3) la courbe possible est la courbe A.

On a bien : $f'(-1) = f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ sur $[-2{,}5\ ;\ -1[$ et sur $]0\ ;\ 1{,}5]$

et $f'(x) > 0$ sur $]-1\ ;\ 0[$



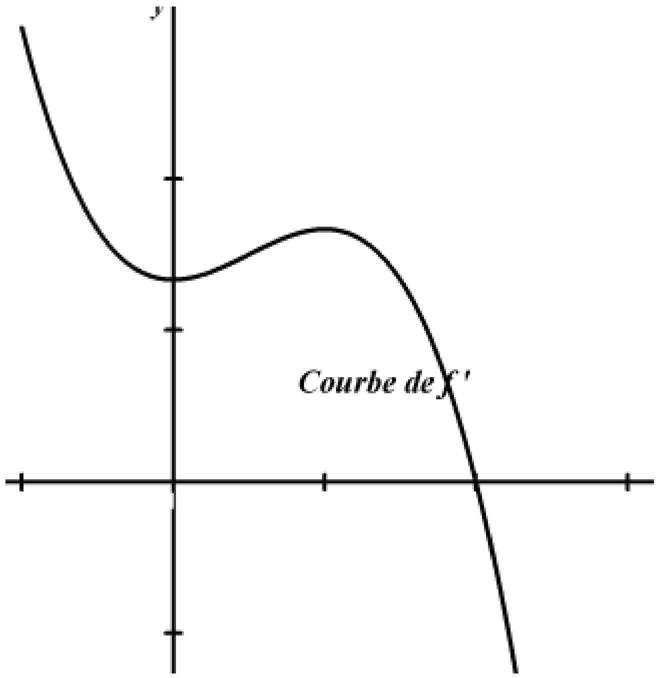
La courbe proposée en B ne peut pas être la courbe de f'.

la fonction représentée ainsi est négative, donc, la fonction f serait décroissante sur [–2,5 ; 1,5]

---

31 page 118

1) Lecture graphique du signe de f'

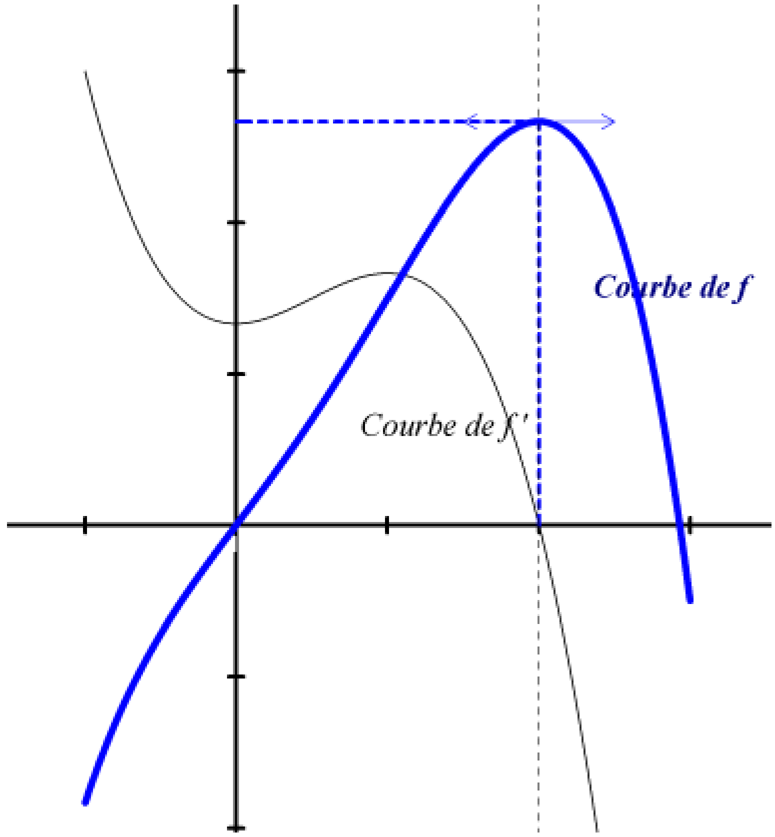


x	–1		2		3
signe $f'(x)$		+	**0**	–	

2) Tableau de variations de la fonction f déduit du tableau précédent.

x	–1		2		3
signe $f'(x)$		+	**0**	–	
Variations de f		↗		↘	

Exemple de courbe possible :



36 page 119

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2$

f, étant un polynôme défini sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et,

pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$.

Étude du signe de la dérivée :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$3x-2$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$x(3x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étude du sens de variation de la fonction *f* :

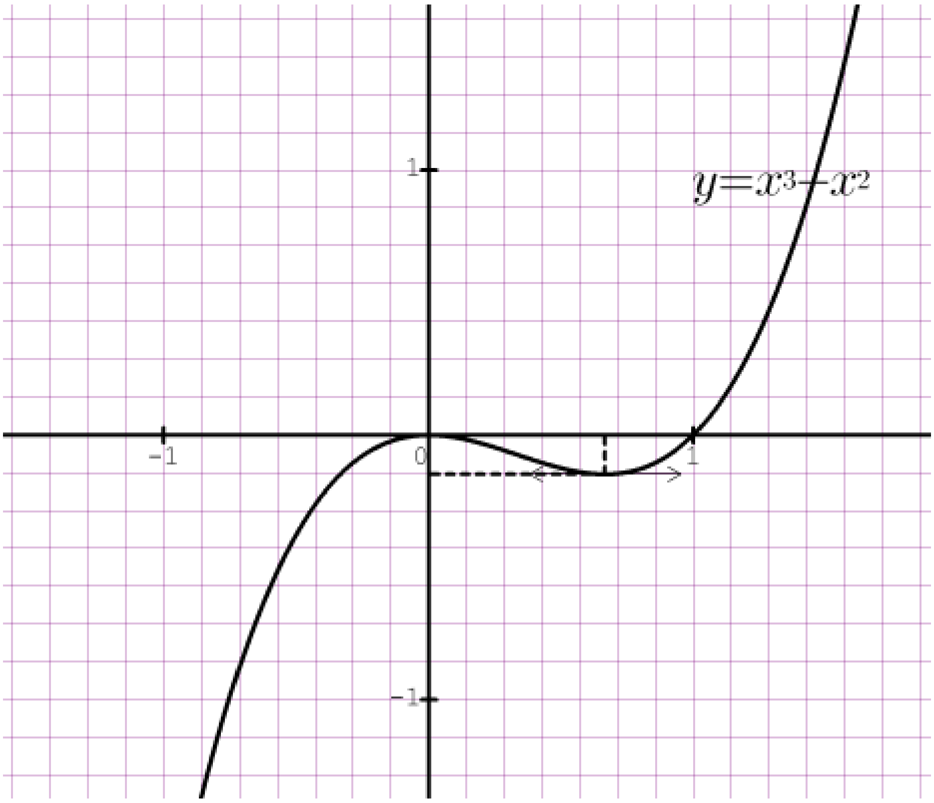
Comme $f'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; 0]$ et sur $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$, la fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$,

Comme $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{2}{3}\right]$, la fonction f est décroissante sur $\left[0 ; \frac{2}{3}\right]$.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{2}{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8-4\times 3}{27} = -\frac{4}{27}$.

Représentation graphique :



41 page 119

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^4 - x^3$

f, étant un polynôme défini sur ℝ, est dérivable sur ℝ, et,

pour tout x réel, $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$.

Étude du signe de la dérivée :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	$\vdots$	$+$	
$4x-3$		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	
$x(3x-2)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Étude du sens de variation de la fonction *f* :

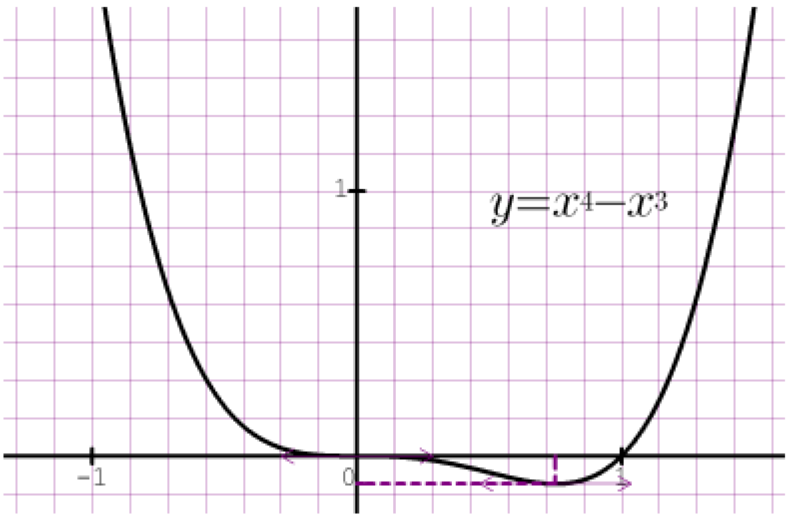
Comme $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$,

Comme $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$, la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{81-27\times 4}{256} = -\frac{27}{256}$$

Représentation graphique :



43 page 119

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.

1 a) f, étant un polynôme défini sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x + 1)$

b) Le signe de $f'(x)$ permet de déterminer le sens de variations de f.

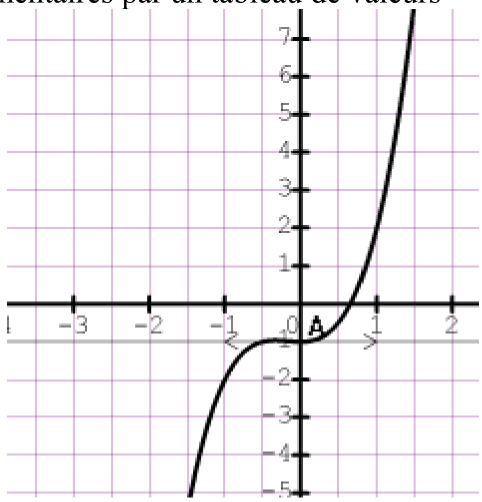
x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$+$	
$3x+1$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f\left(\frac{-1}{3}\right)$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

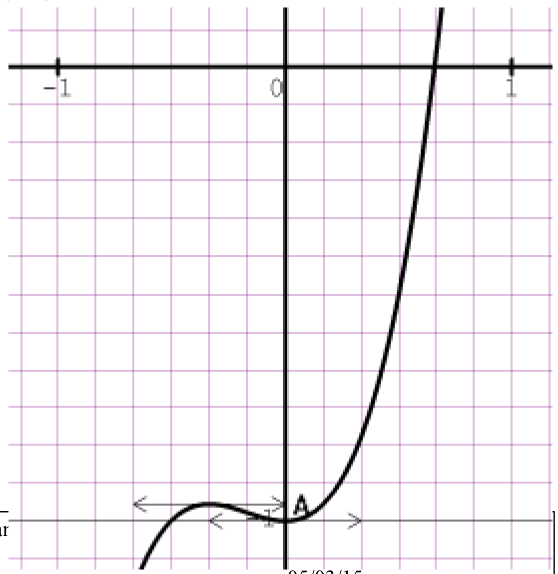
$f\left(\frac{-1}{3}\right) = 2\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{-2+3-27}{27} = -\frac{26}{27}$ et $f(0) = -1$

2) le coefficient directeur de la tangente T à C_f au point $A(0\,;\,1)$ est égal à $f'(0) = 0$.

3) Construction

- respecter l'énoncé …. unités : 1 cm en abscisses et 0,5 cm en ordonnée
- Placer le point A et sa tangente T (tangente parallèle à l'axe des abscisses).
- Placer le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3};-\frac{26}{27}\right)$ et sa tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- Déterminer quelques points supplémentaires par un tableau de valeurs





Remarques : le choix des unités donne l'impression d'une courbe horizontale …

En changeant d'unités

45 page 119

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1) Déterminer le sens de variation de f.

Point méthode :

On calcule la dérivée de f.

On détermine le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

On applique la propriété fondamentale : signe de la dérivée et variation de fonctions.

Application à l'exercice :

f, étant un polynôme défini sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 9 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Par conséquent, la dérivée s'annule en 3, et est positive (un carré est toujours positif et nul).

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Synthèse dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\nearrow$	

2) Équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

Le coefficient directeur de T est $f'(0) = 9$.

Le point de coordonnées $(0 ; f(0))$ est un point de T. Or, $f(0) = 0$,

une équation de T est donc : $y = 9x$.

3) La position de T par rapport à C_f est donnée par l'étude du signe de la différence : $f(x) - 9x$.

On pose $d(x) = f(x) - 9x = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 9x = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 = x^2(\frac{1}{3}x - 3)$.

Comme $x^2 \geqslant 0$, le signe de $d(x)$ est celui de $\frac{1}{3}x - 3$ (expression du premier degré).

$\frac{1}{3}x - 3 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 9$.

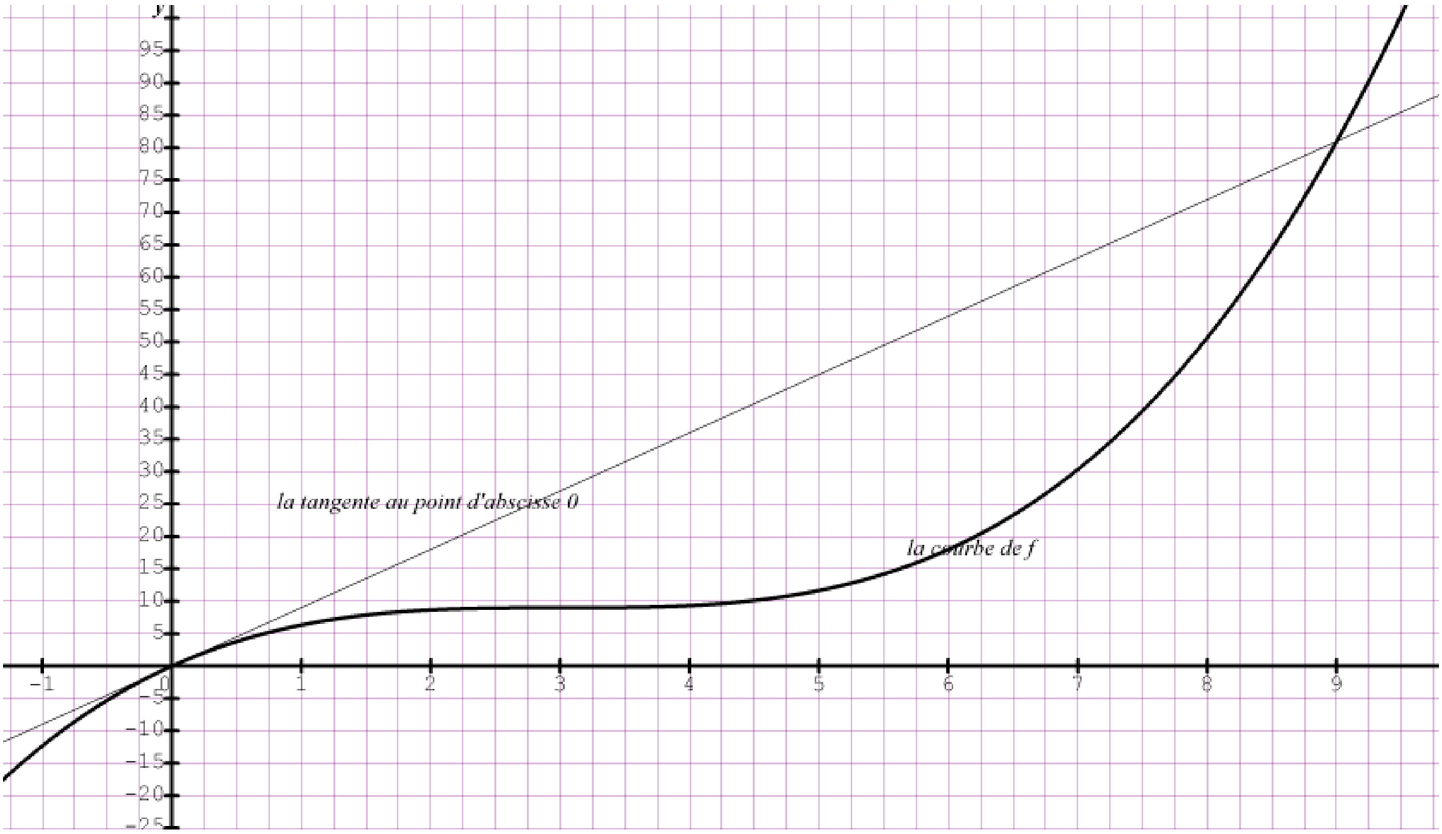
Synthèse dans un tableau :

x	$-\infty$		0		9		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$\frac{1}{3}x - 3$		–		–		+	
$d(x)$		–	0	–	0	+	
position relative de T et C_f		C_f au-dessous de T		C_f au-dessous de T		C_f au-dessus de T	

point de contact O(0 ; 0)

La tangente coupe la courbe au point d'abscisse 9

Le graphique :



46 page 119

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$.

On pose $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x$.

f est le quotient de deux fonctions affines u et v définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et $v(x) \neq 0$.
$u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = 2x$
$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2$
Comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, on obtient, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{3\times(2x)-2(3x-1)}{(2x)^2} = \dfrac{2}{4x^2} = \dfrac{1}{2x^2}$.

Comme $\dfrac{1}{2x^2}$ est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	||	$\nearrow$ $\dfrac{3}{2}$