Index

Activité 2 page 134 ***Une suite récurrente***

```
VARIABLES
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE A
  POUR k ALLANT_DE 0 A 100
    DEBUT_POUR
    AFFICHER A
    A PREND_LA_VALEUR 2*A-3
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

A = 1

```
***Algorithme lancé***
Entrer A : 1
si k = 0 alors A = 1
si k = 1 alors A = -1
si k = 2 alors A = -5
si k = 3 alors A = -13
si k = 4 alors A = -29
si k = 5 alors A = -61
si k = 6 alors A = -125
```

A = 3

```
***Algorithme lancé***
Entrer A : 3
si k = 0 alors A = 3
si k = 1 alors A = 3
si k = 2 alors A = 3
si k = 3 alors A = 3
si k = 4 alors A = 3
si k = 5 alors A = 3
si k = 6 alors A = 3
```

L'algorithme calcule à chaque passage dans la boucle initiée par " Pour … allant de …. à …. " le réel A en prenant la valeur de A en mémoire en la multipliant par 2 et en retranchant 3.

On donc : $a_1 = 2a_0 - 3$

$a_2 = 2a_1 - 3$

Plus généralement : $a_{n+1} = 2a_n - 3$

passage	valeur de k	valeur de A	notation de l'image		calcul	résultat
1	0	1	a_0		$2\times1-3$	$=-1$
2	1	-1	a_1		$2\times(-1)-3$	$=-5$
3	2	-5	a_2		$2\times(-5)-3$	$=-13$

...					…	...
						a_n
	n	a_n	a_n		$2\times a_n$ - 3	= a_{n+1}
passage suivant	$n+1$	a_{n+1}	a_{n+1}		$2\times a_{n+1}-3$	= a_{n+2}

16 page 144

(v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison –1.
1) $v_1 = v_0 + (-1) = 3 - 1 = 2$
$v_2 = v_1 - 1 = 2 - 1 = 1$
$v_3 = v_2 - 1 = 1 - 1 = 0$
2) À chaque " étape " on ajoute (–1).
De v_0 à v_n, on a n " étapes ".
On a donc : $v_n = v_0 + n\times(-1) = 3 - n$.

17 page 124

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{2}$.

1) 2) Comme $u_{n+1} - u_n = \dfrac{5}{2}$ par définition de la suite (u_n), (u_n) est une suite arithmétique d e raison $\dfrac{5}{2}$.

18 page 124

(v_n) est la suite définie par $v_0 = -5$ et $v_{n+1} = v_n - 2$.
1) 2) Comme $v_{n+1} - v_n = -2$ par définition de la suite (v_n), (v_n) est une suite arithmétique d e raison 2.

19 page 144

(w_n) est telle que $w_0 = 3$, $w_1 = 1$, $w_2 = -1$, $w_3 = 0$ et $w_4 = -2$
Comme $w_4 - w_3 = -2$ et $w_3 - w_2 = 1$, la suite (w_n) n'est pas une suite arithmétique.

20 page 124

On sait que (u_n) est une suite arithmétique.

Par lecture graphique :

$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ …
La raison de la suite est 2.
Les points de coordonnées (n, u_n) sont sur la droite d'équation $y = 2x + 1$.
2 est le coefficient directeur de cette droite.

21 page 145

Chaque marche à une hauteur de 18 cm.

Si on monte 7 marches, on s 'élève de $7\times18 = 126$ cm

Si on monte n marches, on s 'élève de $n\times18 = 18n$ cm

---

22 page 145

Au départ, il dépose 40 €.

Chaque début du mois à partir du 1er janvier, il verse 5 €.

Après le versement du 1er juillet, il aura : $40 + 7\times5 = 75$ €.

---

41 page 146

Bien comprendre : f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 - 1$

Les deux suites sont définies en faisant intervenir f … mais dans un cas, avec la forme explicite et dans l'autre cas par récurrence :

(u_n) est définie par $u_n = 2n^2 - 1 = f(n)$

(v_n) est définie par $\begin{cases} v_0=0 \\ v_{n+1}=2v_n^2-1=f(v_n) \end{cases}$

n	$u_n = f(n)$	$v_{n+1}=f(v_n)$ et v_0 donné	Commentaires
0	$u_0 = 2\times0^2 - 1 = -1$	$v_0 = 0$	les deux premiers termes de chaque suite
1	$u_1 = 2\times1^2 - 1 = 1$	$v_1 = 2\times v_0^2-1 = -1$	
2	$u_2 = 2\times2^2 - 1 = 7$	$v_2 = 2\times v_1^2-1$ $= 2\times(-1)^2 - 1 = 1$	
3	$u_3 = 2\times3^2 - 1 = 17$	$v_3 = 2\times v_2^2-1 = 1$	le 4ième terme de chaque suite. pour calculer v_3, il est nécessaire de calculer v_2, on peut calculer u_3 sans connaître u_2
4	$u_4 = 2\times4^2 - 1 = 31$	$v_4 = 2\times v_3^2-1 = 1$	
Remarques : à partir de v_2, on a : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = 1$ car $f(1) = 1$ Les termes u_n sont les ordonnées de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 1$ d'abscisses n.			

47 page 146

Comprendre : ne pas confondre les opérations sur les antécédents (indices) et les opérations sur les images (u_n et v_n).

1) $u_n = n^2 - 3n + 1$

$u_{n-1} = (n-1)^2 - 3(n-1) + 1 = n^2 - 2n + 1 - 3n + 3 + 1 = n^2 - 5n + 5$ (on remplace n par $n - 1$)

$u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 1 = n^2 - n - 1$ (on remplace n par $n + 1$)

$u_{n+2} = (n+2)^2 - 3(n+2) + 1 = n^2 + 4n + 4 - 3n - 6 + 1 = n^2 + n - 1$ (on remplace n par $n+2$)

$u_n + 1 = n^2 - 3n + 1 + 1 = n^2 - 3n + 2$ on ajoute 1 à u_n

$u_{2n} = (2n)^2 - 3\times 2n + 1 = 4n^2 - 6n + 1$ (on remplace n par $2n$)

2) $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

$u_{n-1} = \dfrac{(n-1)+1}{2(n-1)+3} = \dfrac{n}{2n+1}$

$u_{n+1} = \dfrac{(n+1)+1}{2(n+1)+3} = \dfrac{n+2}{2n+5}$

$u_{n+2} = \dfrac{(n+2)+1}{2(n+2)+3} = \dfrac{n+3}{2n+7}$

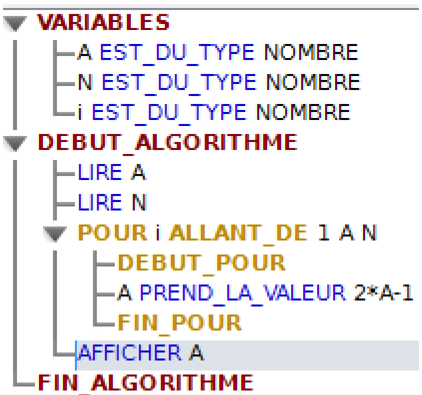
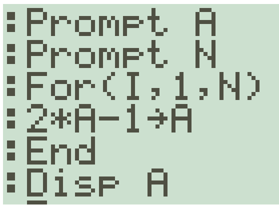
$u_n + 1 = \dfrac{n+1}{2n+3} + 1 = \dfrac{(n+1)+(2n+3)}{2n+3} = \dfrac{3n+4}{2n+3}$

$u_{2n} = \dfrac{(2n)+1}{2(2n)+3} = \dfrac{2n+1}{4n+3}$

---

50 page 146

(u_n) est définie par $u_0 = A$ et l'algorithme suivant permet d'afficher les termes de rang donné.

<table>
<tr><th colspan="3">Algorithme</th></tr>
<tr><th>langage naturel</th><th>Algobox</th><th>TI 82</th></tr>
<tr><td>Saisir A
Saisir N
Pour i allant de 1 à N
A prend la valeur 2×A – 1
Fin Pour
Afficher A</td>
<td>
</td>
<td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">$u_0 = 3$, on entre 3 dans A et l'indice voulu dans N
$u_1 = 2\times u_0 - 1 = 5$
$u_2 = 2\times u_1 - 1 = 9$
$u_3 = 2\times u_2 - 1 = 17$
$u_4 = 2\times u_3 - 1 = 33$



</td></tr>
</table>

2) $u_{n+1} = 2u_n - 1$ d 'après l'instruction : A prend la valeur $2 \times A - 1$

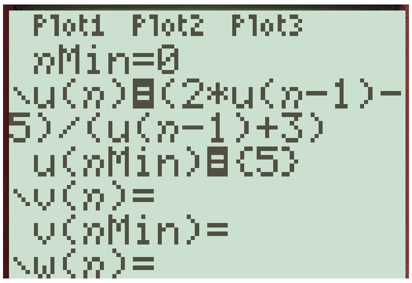
---

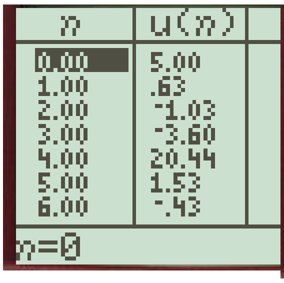
53 page 145

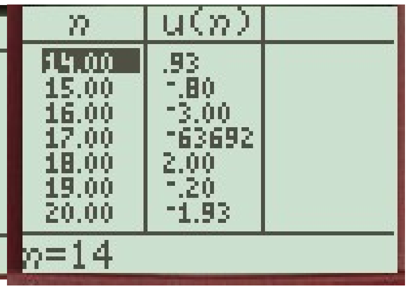
(v_n) est définie par : $v_0 = 5 ; v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 5}{v_n + 3}$

résultats arrondis à 0,01 près

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
5	0,63	–1,03	–3,60	20,44	1,53	–0,43	–2,28	–13,21
v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	
3,08	0,19	–1,45	–5,09	7,27	0,93	–0,80	–3	







Remarque : v_n ne peut pas être égal à –3 (division par 0 impossible).
v_1 est extrêmement proche de –3, mais, ne vaut pas –3.

---

56 page 147

Algorithme :

```
VARIABLES
  montant EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "le nombre de livres achetés"
  LIRE n
  SI (n>3) ALORS
    DEBUT_SI
    montant PREND_LA_VALEUR 17*n*0.92
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      montant PREND_LA_VALEUR 17*n
      FIN_SINON
  AFFICHER "montant à payer en euros: "
  AFFICHER montant
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
le nombre de livres achetés
Entrer n : 2
montant à payer en euros: 34

***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
le nombre de livres achetés
Entrer n : 4
montant à payer en euros: 62.56

***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
le nombre de livres achetés
Entrer n : 10
montant à payer en euros: 156.4

***Algorithme terminé***
```

2) La condition donnée après SI … nous donne les modalités de la promotion.

Si le nombre de livres achetés est strictement supérieur à 3 (SI (n>3),

l'acheteur bénéficie d'une réduction de 8 %. (montant PREND_LA_VALEUR 17*n*0,92)

Il paie 92 % du prix de vente initialement prévu : 17 € par livre.

3) Si $n \leqslant 3$ alors $u_n = 17\times n$ $u_1 = 17$, $u_2 = 34$, $u_3 = 51$

Si $n > 3$ alors $u_n = 17\times n\times 0{,}92 = 15{,}64\times n$ (le prix d'un livre si on achète plus de 3 livres est : 15,64 €

$u_4 = 15{,}64\times 4 = 62{,}56$

---

60 page 147

(u_n) suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$
$u_1 = 3 + 2 = 5$
$u_2 = 5 + 2 = 7$
$u_n = 3 + 2n$
$u_{25} = 3 + 2\times 25 = 53$

---

65 page 147

1) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n^2 \\ u_0 = 3 \end{cases}$ n'est pas une suite arithmétique.

Preuve : $u_0 = 3$,

$u_1 = 3 + 0^2 = 3$ car, $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 0^2$

$u_2 = 3 + 1^2 = 4$ car, $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 1^2$

$u_1 - u_0 = 0$ est différent de $u_2 - u_1 = 1$

2) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + n \\ u_0 = 2 \end{cases}$ n'est pas une suite arithmétique.

Preuve : $u_0 = 2$,

$u_1 = 2 + 0 = 2$ car, $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 0$

$u_2 = 2 + 1 = 3$ car, $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 1$

$u_1 - u_0 = 0$ est différent de $u_2 - u_1 = 1$

3) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 5 \\ u_0 = -1 \end{cases}$ est une suite arithmétique, car,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -5$ (constante)
la raison de cette suite arithmétique est -5

4) $\begin{cases} u_{n+1} = 1 + 2u_n \\ u_0 = 7 \end{cases}$ n'est pas une suite arithmétique.

Preuve : $u_0 = 7$,

$u_1 = 1 + 2 \times 7 = 15$

$u_2 = 1 + 2 \times 15 = 31$

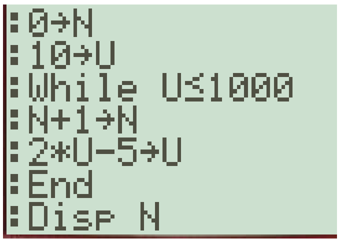
$u_1 - u_0 = 8$ est différent de $u_2 - u_1 = 16$

---

101 page 150

Algorithme		
langage naturel	***Commentaires***	**À la main**
Initialisation N prend la valeur 0 U prend la valeur 10 **Traitement**	$u_0 = 10$ d'après l'initialisation	$u_0 = 10$ Comme $10 \leqslant 100$ est vraie, on effectue les instructions : N prend la valeur $0 + 1 = 1$, et, U prend la valeur $2\times 10 - 5 = 15$ $u_1 = 15$
Tant que U $\leqslant$ 100 N prend la valeur N +1 U prend la valeur 2U – 5	tant que 100 n'est pas atteint, les instructions sont effectuées : on incrémente N de 1, et, on remplace la valeur dans U par 2U – 5	Comme $15 \leqslant 100$ est vraie, on effectue les instructions : N prend la valeur $1 + 1 = 2$, et, U prend la valeur $2\times 15 - 5 = 25$ $u_2 = 25$
Fin Tant que **Sortie**		Comme $25 \leqslant 100$ est vraie, on effectue les instructions : N prend la valeur $2 + 1 = 3$, et, U prend la valeur $2\times 25 - 5 = 45$ $u_3 = 45$
afficher N	Dès que la valeur U dépasse 100, le dernier nombre dans N est affiché	Comme $45 \leqslant 100$ est vraie, on effectue les instructions : N prend la valeur $3 + 1 = 4$, et, U prend la valeur $2\times 45 - 5 = 85$ $u_4 = 85$
		Comme $85 \leqslant 100$ est vraie, on effectue les instructions : N prend la valeur $4 + 1 = 5$, et, U prend la valeur $2\times 85 - 5 = 165$ $u_5 = 165$
		Comme $165 \leqslant 100$ est fausse, on sort du TANT QUE
		L'algorithme affiche 5

2) Pour déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n > 1000$, on remplace 100 par 1000 dans le test …



116 page 154

1) Chaque année, 20 % de la pelouse est détruite par du chiendent, d'où, il reste 80 % de la pelouse.

Si u_n représente la surface de la pelouse l'année n, il reste donc $0{,}8u_n$ l'année suivante.

50 m² de chiendent sont arrachés et remplacés par de la pelouse, d'où, l'année suivante, la surface u_{n+1} de pelouse vaut :

$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 50$.

2) $u_2 = 1\,370$ m², d'où, $1\,370 = 0{,}8u_1 + 50$.

$u_1 = \dfrac{1370-50}{0,8} = \dfrac{1320}{0,8} = 1\ 650$ m²

Comme $u_1 = 0,8u_0 + 50$, on a : $u_0 = \dfrac{1650-50}{0,8} = 2\ 000$m²

3) la suite (v_n) est définie par $v_n = u_n - 250$ (On a donc : $u_n = v_n + 250$)

D'où, $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8u_n + 50 - 250 = 0,8u_n - 200$

Comme $u_n = v_n + 250$, en remplaçant u_n par $v_n + 250$, il vient :

$v_{n+1} = 0,8(v_n + 250) - 200 = 0,8v_n + 200 - 200 = 0,8v_n$.

4) Par conséquent : (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 1\ 750$ et de raison 0,8.

Par propriété des suites géométriques, $v_n = 1750\times(0,8)^n$ et $u_n = 1750\times 0,8^n+250$

5) Le quart de la pelouse : $\dfrac{2000}{4} = 500$m².

On cherche le plus petit n tel que $u_n \geqslant 500$

Un tableau de valeurs ou un programme avec TANT QUE permet de déterminer n.

n	u
0	2000
1	1650
2	1370
3	1146
4	966,8
5	823,44
6	708,752
7	617,002
8	543,601
9	484,881

$u_9 < 500$. u_9 est l'aire la dixième année.

Il garde plus du quart de la pelouse pendant 9 années. (de u_0 à u_8)

---

117 page 154

1) $u_0 = 200$ (somme placée le 01/01/2012)

$u_1 = u_0\times 1,04 + 200 = 408$ (la somme placée à 4 % à laquelle on ajoute les 200 € déposés le 01/01/2013)

$u_2 = u_1\times 1,04 + 200 = 624,32$ (la somme placée à 4 % à laquelle on ajoute les 200 € déposés le 01/01/2014)

$u_3 = u_2\times 1,04 + 200 = 849,29$ (la somme placée à 4 % à laquelle on ajoute les 200 € déposés le 01/01/2015)

2) Si l'année 2012+n, la somme placée est u_n, l'année suivante 2012+(n+1), la somme placée est :

$u_{n+1} = u_n \times 1{,}04 + 200$

3) La suite (v_n) est définie par $v_n = u_n + 5\,000$

a) calcul des trois premiers termes :

$v_0 = u_0 + 5\,000 = 5\,200$

$v_1 = u_1 + 5\,000 = 5\,408$

$v_2 = u_2 + 5\,000 = 5\,624{,}32$

b) (v_n) est-elle géométrique ?

Méthode : on exprime v_{n+1} en fonction de v_n (*en espérant trouver* $v_{n+1} = 1{,}04v_n$)

$v_{n+1} = u_{n+1} + 5\,000$ (par définition de la suite (v_n))

$v_{n+1} = u_n \times 1{,}04 + 200 + 5\,000$ (par définition de la suite (u_n))

Or, $u_n = v_n - 5\,000$ (c'est aussi par définition de la suite (v_n))

d'où : $v_{n+1} = (v_n - 5000) \times 1{,}04 + 5\,200$ (on remplace u_n …. pour avoir en fonction de v_n)

Après réduction : $v_{n+1} = 1{,}04 \times v_n - 5\,200 + 5\,200 = 1{,}04v_n$

On a montré que (v_n) est la **suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme v_0 = 5 200**,

c) **donc**, $v_n = v_0 \times (1{,}04)^n = 5200 \times (1{,}04)^n$

puis, $u_n = v_n - 5\,000 = 5200 \times (1{,}04)^n - 5\,000$

4) En utilisant le tableur de la calculatrice :

Graph1 Graph2 Graph3

Y1=5200*1.04^X-5000

Y2=

Y3=

Y4=

Y5=

Y6=

Y7=

CONFIG TABLE

DébutTbl=0

ΔTbl=1

Indpnt : Auto Demande

Dépndte : Auto Demande

X	Y1
1	408
2	624.32
3	849.29
4	1083.3
5	1326.6
6	1579.7
7	1842.8
8	2116.6
9	2401.2
10	2697.3
11	3005.2

X=11

Comme 1,04 > 1, la suite (v_n) est croissante et donc, la suite (u_n) est aussi croissante (*retrancher 5 000 ne change pas l'ordre*)

Par lecture sur la table, on obtient : Si $n \leqslant 10$ alors $u_n < 3000$

Si $n \geqslant 11$ alors $u_n > 3\,000$

Le 01/01/2 023, pierre a plus de 3 000 € sur ce livret.