Index

Activité 1- Dépenses dans l'OCDE

1	Slovaquie	3 219
2	Pologne	3 590
3	Hongrie	4 225
4	République tchèque	5 527
5	Portugal	6 833
6	Slovénie	7 267
7	Finlande	7 829
8	Allemagne	7 841
9	Italie	8 004
10	Espagne	8 730
11	Royaume-Uni	8 892
12	Belgique	8 992
13	Suède	9 143
14	Irlande	9 375
15	**France**	**9 532**
16	Danemark	9 675
17	Pays-Bas	10 248
18	Autriche	10 641
19	Luxembourg	17 928

La série est classée dans l'ordre des valeurs croissantes.
1) L'effectif de la série est 19.
La médiane de la série est la 10 ème valeur, donc, le montant des dépenses de l'Espagne, soit : 8 730.
Savoir :

Définition de la médiane Me :

La médiane est le nombre réel tel que la série ordonnée est partagée en deux séries d'effectif égal.

50% des valeurs de la série sont inférieures ou égales à la médiane Me, 50% des valeurs de la série sont supérieures ou égales à la médiane Me.

Remarque : la médiane Me n'est pas nécessairement une valeur de la série.

En pratique : méthode de détermination de Me :

On range la série dans l'ordre des valeurs croissantes.

Si l'effectif N est impair, la médiane Me est la $\frac{N+1}{2}$ ième valeur de la série.

Si l'effectif N est pair, la médiane Me est la moyenne des $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ valeurs de la série.

$\frac{19}{4}=4{,}75$, donc
$Q_1 = 6\ 833$ *5 ème valeur*

$\frac{19\times3}{4}=14{,}25$, donc
$Q_3 = 9\ 532$ *15 ème valeur*

l'intervalle interquartile est : [6 833 ; 9 532]
L'écart interquartile es : 9 532 – 6 833 = 2 699

L'affirmation " au moins 50 % des pays ont une dépense inférieure ou égale à celle de l'Espagne " est vraie par définition de la médiane.

L'affirmation " au moins 50 % des pays ont une dépense dont la valeur est comprise au sens large entre 6 833 et 9532 " est vraie par définition de 1'intervalle interquartile.

Définition du premier quartile :

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur de la série telle que 25 % au moins des effectifs ont une valeur inférieure ou égale à Q_1.

Important : Dans cette définition, le quartile Q_1 est une valeur de la série

(*il existe une autre définition où Q_1 n'est pas nécessairement une valeur de la série et que certains logiciels utilisent).*

En pratique : méthode de détermination de Q_1 :

On range la série dans l'ordre des valeurs croissantes.

On divise l'effectif N par 4 (25% de l'effectif). ($q_1 = \frac{N}{4}$).

Si q_1 est un entier, Q_1 est la valeur du $q_1^{\text{ième}}$ élément.

Si q_1 n'est pas un entier, on prend l'entier q_1' juste au-dessus, et Q_1 est la valeur du $q_1'^{\text{ième}}$ élément.

Définition du troisième quartile :

Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur de la série telle que 75 % au moins des effectifs ont une valeur inférieure ou égale à Q_3.

Important :Dans cette définition, le quartile Q_3 est une valeur de la série

En pratique : méthode de détermination de Q_3 :

on range la série dans l'ordre des valeurs croissantes.

On multiplie l'effectif N par $\frac{3}{4}$ (75% de l'effectif). ($q_3 = \frac{3N}{4}$).

Si q_3 est un entier, Q_3 est la valeur du $q_3^{\text{ième}}$ élément.

Si q_3 n'est pas un entier, on prend l'entier q_3' juste au-dessus, et Q_3 est la valeur du $q_3'^{\text{ième}}$ élément.

Activité 2 : répartition des données de la série

1) Dans l'activité précédente, on sait :

min = 3 219, Q_1 = 6 833, Me = 8 730, Q_3 = 9 532, Max = 17 928

a) Amplitudes des intervalles : 6 833 – 3 219 = 5 614

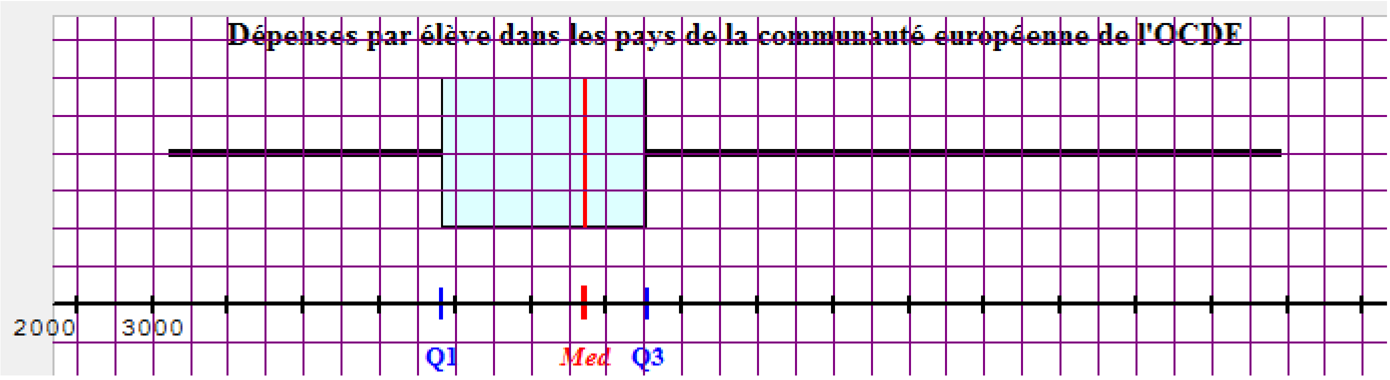
8 730 – 6 833 = 1 897

9 532 – 8 730 = 802

17 928 – 9 532 = 8 386

Les amplitudes de chaque intervalle sont différentes (mais, chacun des intervalles contient 25 % des effectifs).

b) c) diagramme en boîte (réalisé avec Sinequanon)



Les paramètres utilisés pour construire la boîte sont le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

Ceux utilisés pour construire les moustaches sont le minimum et le maximum.

b) La France correspond au troisième quartile de la série.

2. Autres pays de l'OCDE (hors CE).

1	Mexique	2 236
2	Nouvelle-Zélande	5 933
3	Corée	7 860
4	Islande	8 349
5	Japon	8 760
6	Australie	8 840
7	États-Unis	11 301
8	Norvège	11 997
9	Suisse	13 982

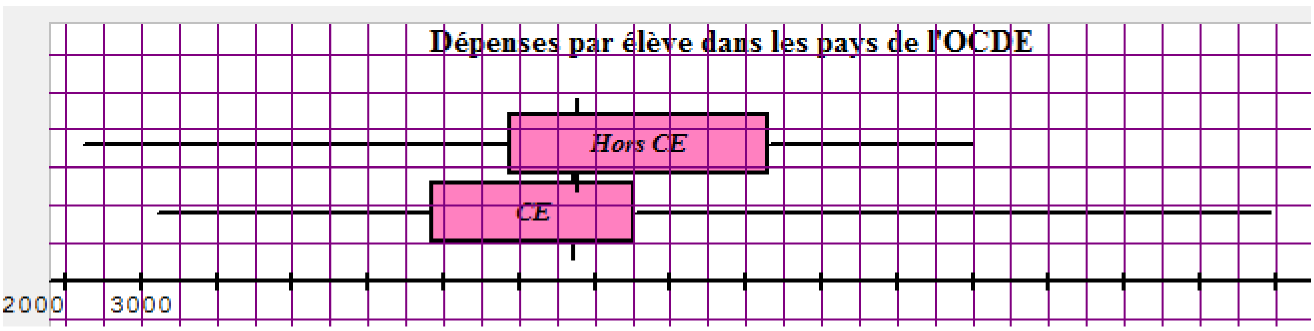
Q1	3ème valeur
Q3	7ème valeur

Cette série comporte 9 valeurs. $\frac{9}{4}=2{,}25$, donc, le premier quartile est la 3ème valeur,

$\frac{9\times3}{4}=6{,}75$, donc, le troisième quartile est la 7ème valeur,

$\frac{9+1}{2}=5$, donc, la médiane est la 5ème valeur.

Min = 2 236, Q_1 = 7 860, Me = 8 760, Q3 = 11 301



3) On peut constater :

- les deux séries ont pratiquement la même médiane.

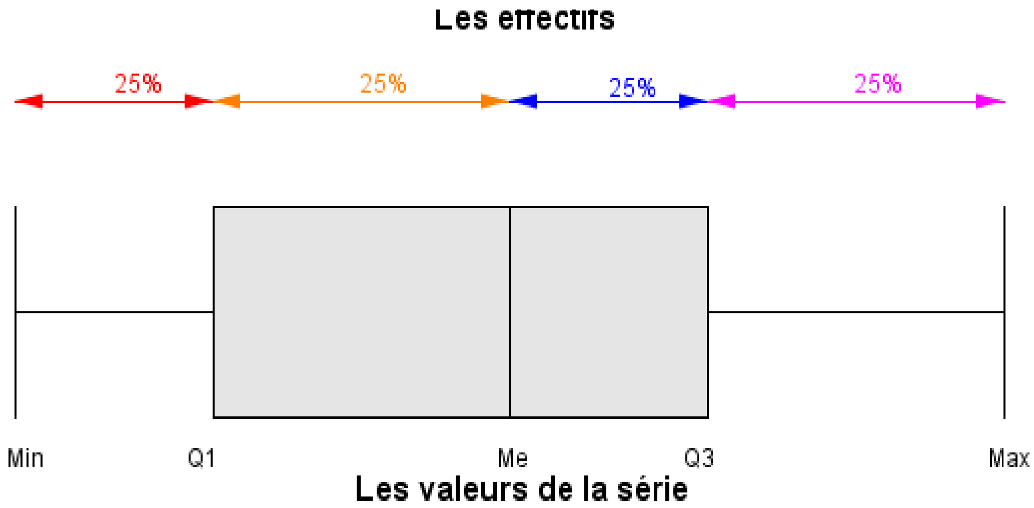
"J'ai toujours pensé qu'il n'avait pas assez d'imagination pour devenir mathématicien !" ***Hilbert, David***
au sujet d'un étudiant qui a renoncé aux mathématiques pour la poésie

- l'écart interquartile est moins important dans les pays de la Communauté Européenne que dans les autres pays
- les données sont dispersées entre le 1er quartile et la médiane dans la Communauté Européenne

et, elles sont concentrées entre le 1er quartile et la médiane hors CE.

- les données sont concentrées entre la médiane et le 3ème quartile dans la Communauté Européenne
et, elles sont dispersées entre la médiane et le 3ème quartile hors CE.

Retenir :



Activité 3 page 165   Notes trimestrielles (variance -écart-type)

1) Moyenne et médiane

La moyenne de la série de notes d'Alexia est : $\frac{10+7,5+17+13+15}{5} = 12,5$

On ordonne les notes, et, la médiane est la troisième note : Me = 13

La moyenne de la série de notes de Bertrand est : $\frac{14+9+15+12}{4} = 12,5$

On ordonne les notes, et, la médiane est la moyenne entre la deuxième et troisième note : Me = $\frac{12+14}{2} = 13$

Ces caractères de position ne permettent pas de comparer les résultats de façon satisfaisante.

2) Étude de la dispersion (notes d'Alexia)

Alexia						
Note	7,5	10	13	15	17	Somme des carrés des écarts
Écart avec la moyenne	–5	–2,5	0,5	2,5	4,5	
Carré de	25	6,25	0,25	6,25	20,25	58

Alexia						
l'écart						

La moyenne des carrés des écarts à la moyenne est : $\frac{58}{5}$ = 11,6.

La **variance** de la série de notes d4alexia est égale à 11,6

L'**écart-type** de la série est : $\sqrt{11{,}6} \approx 3{,}4$

3) Une formule

Étude de la dispersion (notes de Bertrand)

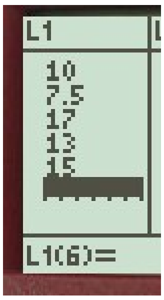
Bertrand					
Note	9	12	14	15	Somme des carrés des écarts
Écart avec la moyenne	*–3,5* $(9-\bar{x})$	*–0,5* $(12-\bar{x})$	*1,5* $(14-\bar{x})$	*2,5* $(15-\bar{x})$	
Carré de l'écart	$(9-\bar{x})^2 = (\bar{x}-9)^2$ *12,25*	$(12-\bar{x})^2 = (\bar{x}-12)^2$ *0,25*	$(14-\bar{x})^2 = (\bar{x}-14)^2$ *2,25*	$(15-\bar{x})^2 = (\bar{x}-15)^2$ *6,25*	$(\bar{x}-9)^2+(\bar{x}-12)^2+(\bar{x}-14)^2+(\bar{x}-15)^2 = 21$

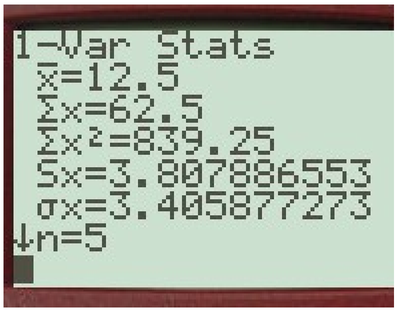
La moyenne des carrés des écarts à la moyenne est : $\frac{21}{4}$ = 5,25.

pour calculer cette moyenne, on a fait : $\frac{1}{4}\left[(\bar{x}-9)^2+(\bar{x}-12)^2+(\bar{x}-14)^2+(\bar{x}-15)^2\right]$

La **variance** de la série de notes d4alexia est égale à 5,25

L'**écart-type** de la série est : $\sqrt{5{,}25} \approx 2{,}29$





4) Comparaison.

l'écart-type indique une dispersion autour de la moyenne.

Les notes de Bertrand sont moins dispersées que les notes d'Alexia.

Retenir :

Soit une série statistique dont on connaît les valeurs et les effectifs :

Valeurs	x_1	x_2	...	x_p	Total
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p	N

La moyenne : $\bar{x} = \dfrac{1}{N}(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_p x_p) = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i$

En notant f_i la fréquence de chaque valeur x_i : $\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=p} f_i x_i$

La variance *(notée V)* : V = $\dfrac{1}{N}\left(n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + \ldots + n_p(x_p-\bar{x})^2\right) = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i (x_i-\bar{x})^2$

En notant f_i la fréquence de chaque valeur x_i : V = $\sum_{i=1}^{i=p} f_i (x_i-\bar{x})^2$

Une autre formule plus facile à utiliser en pratique : V = $\dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

(On fait d'abord la moyenne des valeurs au carré et on soustrait le carré de la moyenne)

L'écart-type (*noté σ*) est la racine carrée de la variance : σ = $\sqrt{V}$

Une disposition pratique pour les calculs " à la main "

Valeurs	x_1	x_2	...	x_p	Total
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p	N
Effectif×valeur	$n_1 x_1$	$n_2 x_2$	…	$n_p x_p$	$\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i$
Effectif×valeur²	$n_1 x_1^2$	$n_2 x_2^2$		$n_p x_p^2$	$\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2$

Pour la moyenne, on divise la somme de la troisième ligne par l'effectif total

Pour la variance, on divise la somme de la quatrième ligne par l'effectif total et on soustrait le carré de la moyenne .

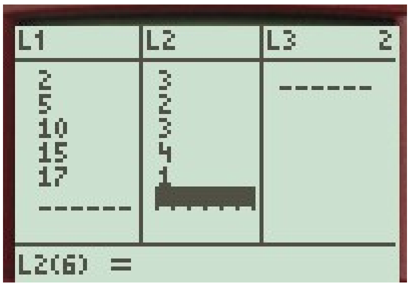
Un exemple :

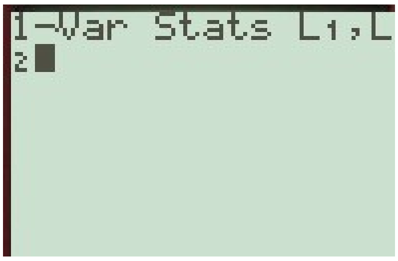
Série						
Valeurs	2	5	10	15	17	Total
Effectifs	3	2	3	4	1	13 (effectif total N)
$n_i x_i$	6	10	30	60	17	3×2 + 2×5 + 3×10 + 4×15 + 1×17 = 123 (Somme de toutes les valeurs)
$n_i x_i^2$	12	50	300	900	289	3×2² + 2×5² + 3×10² + 4×15² + 1×17² = 1551

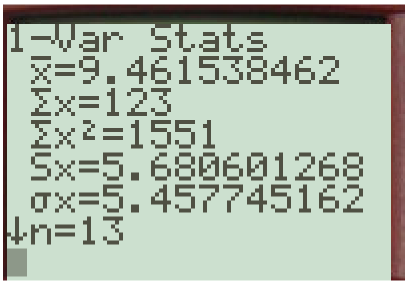
La moyenne de la série est : $\dfrac{123}{13} \approx 9{,}46$

La variance de la série est : $\dfrac{1551}{13} - \left(\dfrac{123}{13}\right)^2 \approx 29{,}79$ à 0,01 près par excès.

L'écart-type est : $\sigma = \sqrt{V} \approx 5{,}46$ à 0,01 près par excès.







Activité 4 page 165

1) Des ultra-portables à la pesée

1. Deux usines produisent des ordinateurs ultra-portables qui, d'après le fabriquant, pèsent 1 125 g.
On a prélevé et pesé un échantillon de 30 ordinateurs dans la production de chaque usine.
Les résultats sont donnés ci-dessous (en grammes) :

Usine 1 (premier échantillon)

Masse	1 121	1 122	1 123	1 124	1 125	1 126	1 127	1 128	1 129
Effectifs	2	3	5	3	6	4	2	4	1

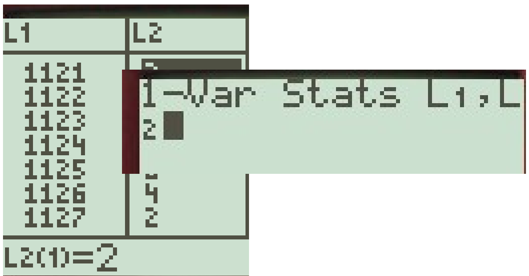
Usine 2 (deuxième échantillon)

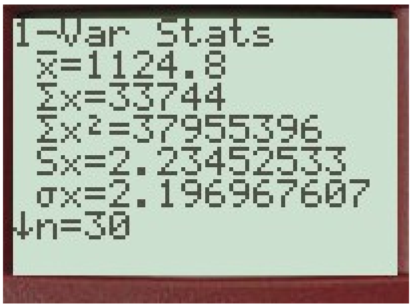
Masse	1 121	1 122	1 123	1 124	1 125	1 126	1 127	1 128	1 129
Effectifs	1	0	5	8	7	5	2	1	1

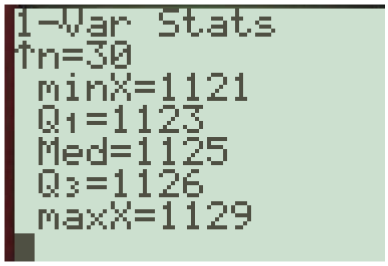
a. À l'aide du module « statistique » de la calculatrice, calculer la masse moyenne et la masse médiane des ordinateurs du premier échantillon.

b. Sachant que, pour le deuxième échantillon, la moyenne est 1 124,8 et la médiane 1 125, préciser les ressemblances et les différences entre ces deux séries de résultats.

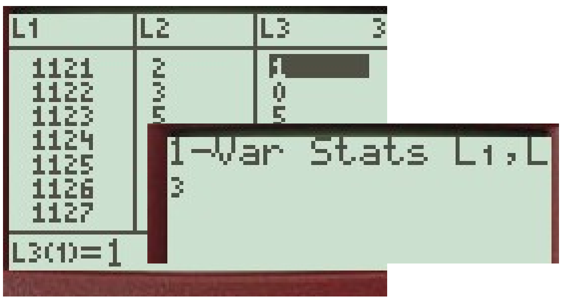
Usine 1 : En L1, les masses en grammes, en L2 les effectifs

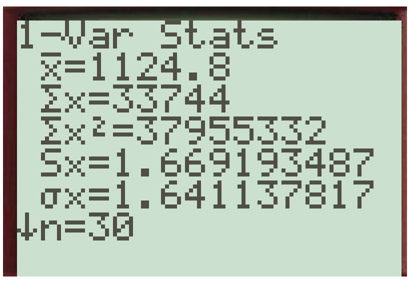


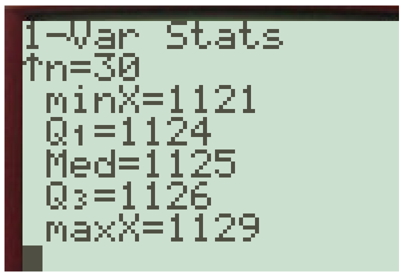




Usine 2 : en L1, les masses en grammes, en L3 les effectifs







Pour l'usine 1, la moyenne $\bar{x}$ = 1 124,8 et la médiane Me = 1 125

Pour l'usine 2, la moyenne $\bar{x}$ = 1 124,8 et la médiane Me = 1 125

b) .Les deux séries ont même moyenne et même médiane, par contre la dispersion des données est différente.

Usine 1 : L'écart-type est σ = 2,197 à 0,001 près par excès

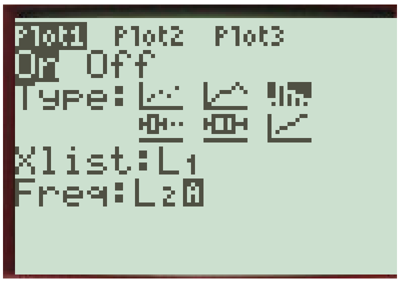
Usine 2 : L'écart-type est σ = 1,641 à 0,001 près par défaut

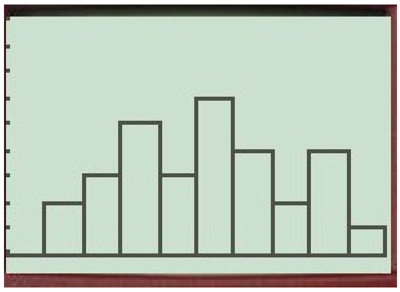
Usine 1 : l'écart interquartile est : 1 126 – 1123 = 3

Usine 2 : l'écart interquartile est : 1 126 – 1124 = 2

On peut le constater en représentant graphiquement ces séries :

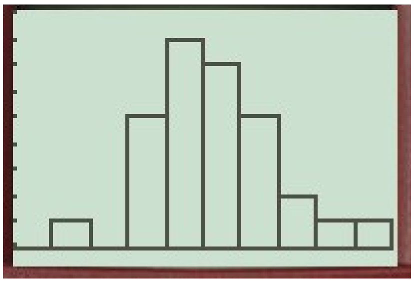
Usine 1 :





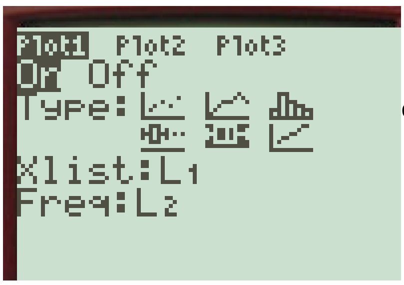
histogramme

Usine 2 : Mettre " off " pour le premier graphique. (même fenêtre graphique)

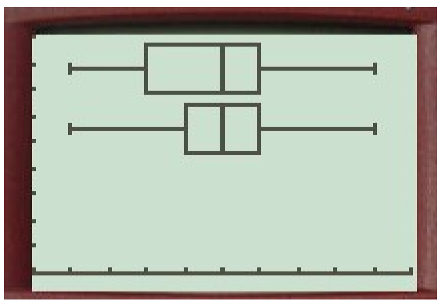


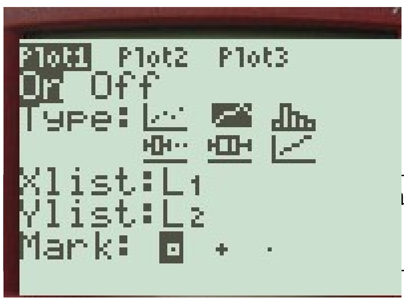
histogramme

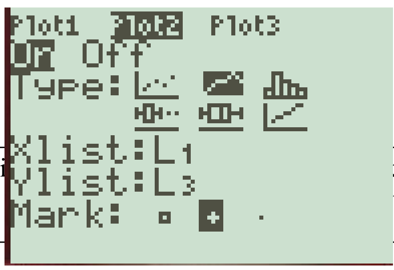
Diagrammes en boîtes : (les deux graphiques " on ")

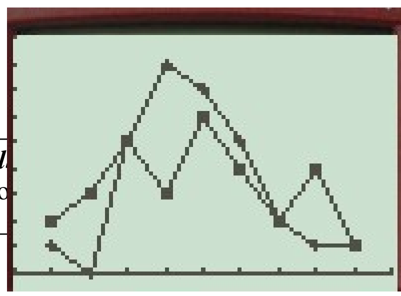


Idem pour le graphique 2 avec L3 en effectifs.









masses en abscisses, effectifs en ordonnées.

2. a.L'écart-type du premier échantillon est environ 2,197. Il est plus important que celui du second échantillon.

b.On peut en déduire que les données du premier échantillon sont plus dispersées que celles du second échantillon, donc que les machines de la 2ème usine sont mieux réglées que celles de la 1ère usine.

49 page 175

Nombre de véhicules par foyer : x_i	0	1	2	3	***Total***
Effectifs : n_i	6	20	8	2	$N = 36$
$n_i x_i$	0	20	16	6	$\Sigma\, n_i x_i = 42$
$n_i x_i^2$	0	20	32	18	$\Sigma\, n_i x_i^2 = 70$

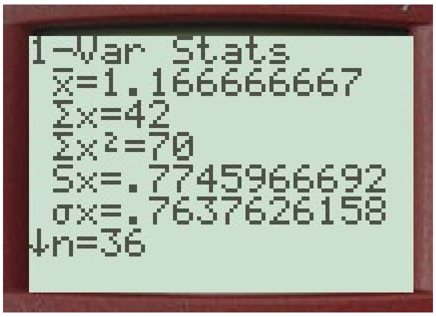
42 est le nombre total de véhicules dans les 36 foyers.

Moyenne : $\bar{x} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$ à 0,01 près par excès

Variance : $V = \frac{70}{36} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{70-49}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{\frac{21}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{6} \approx 0{,}76$ à 0,01 près par défaut.

On retrouve ces résultats à la calculatrice :



50 page 175

Répartition par classe :

Taille classe **centre :** x_i	[0 ; 5[2,5	[5 ; 20[12,5	[20; 50[35	[50; 100[75	[100; 200[150	[200 ; 300[250	Total
Nombre (en milliers) : n_i	193	132	138	122	64	15	$N = 664$
$n_i x_i$							$\Sigma\, n_i x_i =$
$n_i x_i^2$							$\Sigma\, n_i x_i^2 =$

Comprendre l'affichage de la calculatrice ….

2.Avec la calculatrice, on obtient une moyenne de 44,37 et un écart-type de 54,15 à 10^{-2} près.

61 page 177

1)

Nbre interventions : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Nbre machines : n_i	10	12	17	44	78	94	83	49	36	16	$N=$
$n_i x_i$											$\Sigma\, n_i x_i =$
$n_i x_i^2$											$\Sigma\, n_i x_i^2 =$

On utilise la calculatrice, on obtient : $\overline{x}$ =6,09 et σ ≈1,97.

2.On a : $\overline{x}$– 2σ ≈2,15 et $\overline{x}$ +2σ ≈10,03.

Dans l'intervalle [2,15 ; 10,03], il y a :17 +44 +78 +94 +83 +49 +36 +16,

soit 417 valeurs (ce sont les machines qui ont nécessité entre 3 et 10 interventions).

Le pourcentage correspondant est $\frac{417}{439}$ ≈ 0,9499 soit : environ 94,99 %.

Il est nécessaire de changer les distributeurs.

3.Dans ce cas, il n'y a plus 17, mais 18 distributeurs qui ont nécessité 3 interventions.

On utilise la calculatrice, on obtient : $\overline{x}$ =6,08 et σ ≈1,97.

On a : $\overline{x}$– 2σ ≈2,13 et $\overline{x}$ +2σ ≈10,03.

Dans l'intervalle [2,13 ; 10,03], il y a : 18 +44 +78 +94 +83 +49 +36 +16

soit 418 valeurs (ce sont les machines qui on nécessité entre 3 et 10 interventions).

Le pourcentage correspondant est : $\frac{418}{440}$ = 0,95, soit 95 %.

Finalement, il n'est pas nécessaire de changer les distributeurs.