Index

0- Les prérequis

- Bien comprendre la notion **d'équation de courbe représentative d'une fonction *f*,**

c'est-à-dire :

Dire que C_f a pour équation $y = f(x)$ signifie qu'un point $N(a\,;\,b) \in$ à C_f

si et seulement si
l'ordonnée b de N est égale à l'image de son abscisse a. $b = f(a)$
- Bien connaître la relation permettant de calculer le coefficient directeur d'une droite,
savoir le lire dans un repère,
savoir construire une droite connaissant un point et le coefficient directeur.

Rappel : $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y - y_A}{x - x_A}$ où $A(x_A ; y_A)$ et $M(x\,;\,y)$ sont deux points de la droite.

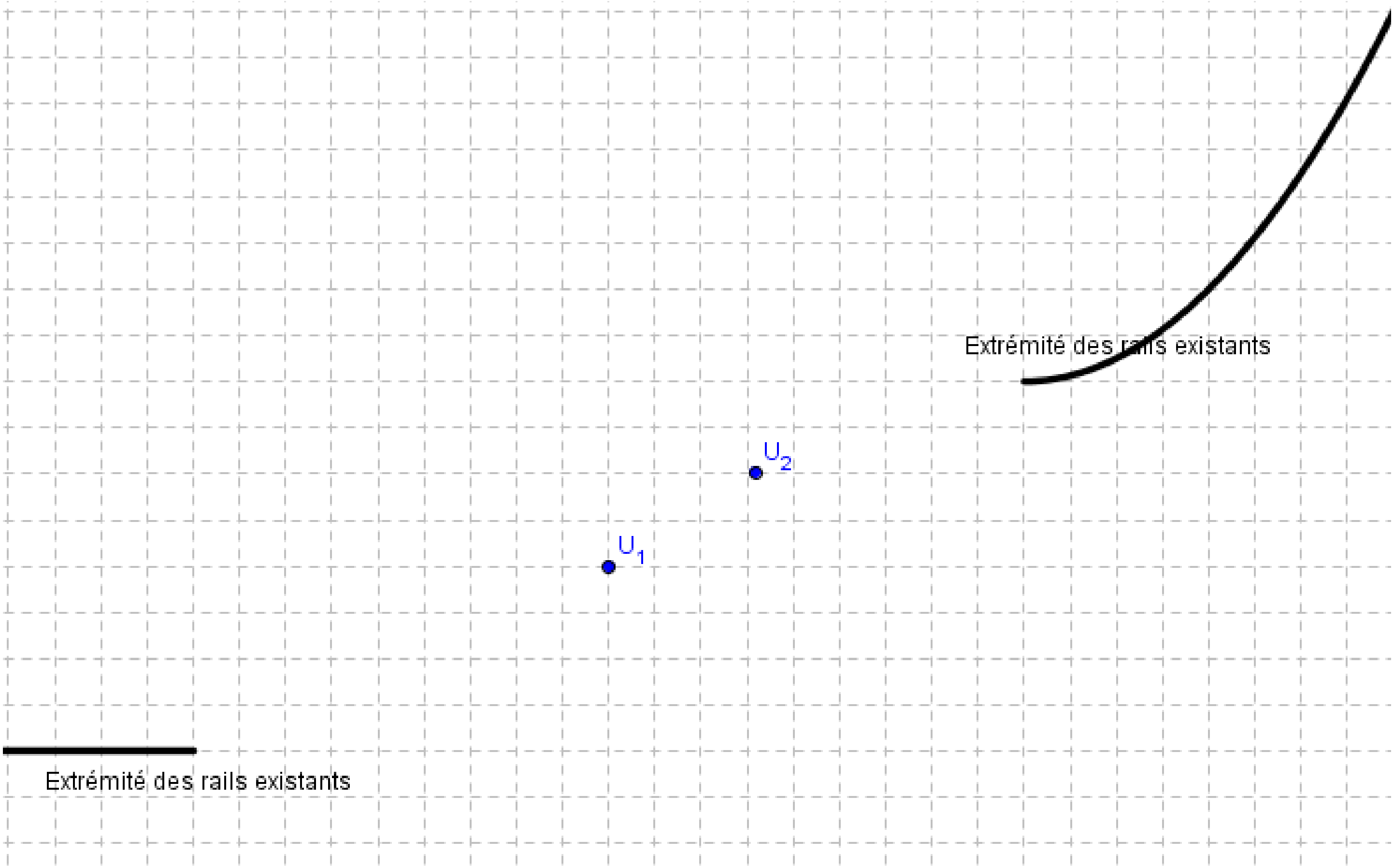
- Être capable de mener à bien les calculs **algébriques** effectués avec les opérations " usuelles " (addition multiplication, inverse, carré de … , racine carrée de …., etc.)

I- Activités

Objectif : comprendre ce qu'on cherche à faire " techniquement "

Activité 1: raccorder une voie ferrée (une "bonne" courbe)

Sur le plan ci-dessous sont représentés des rails déjà existants de chemin de fer.



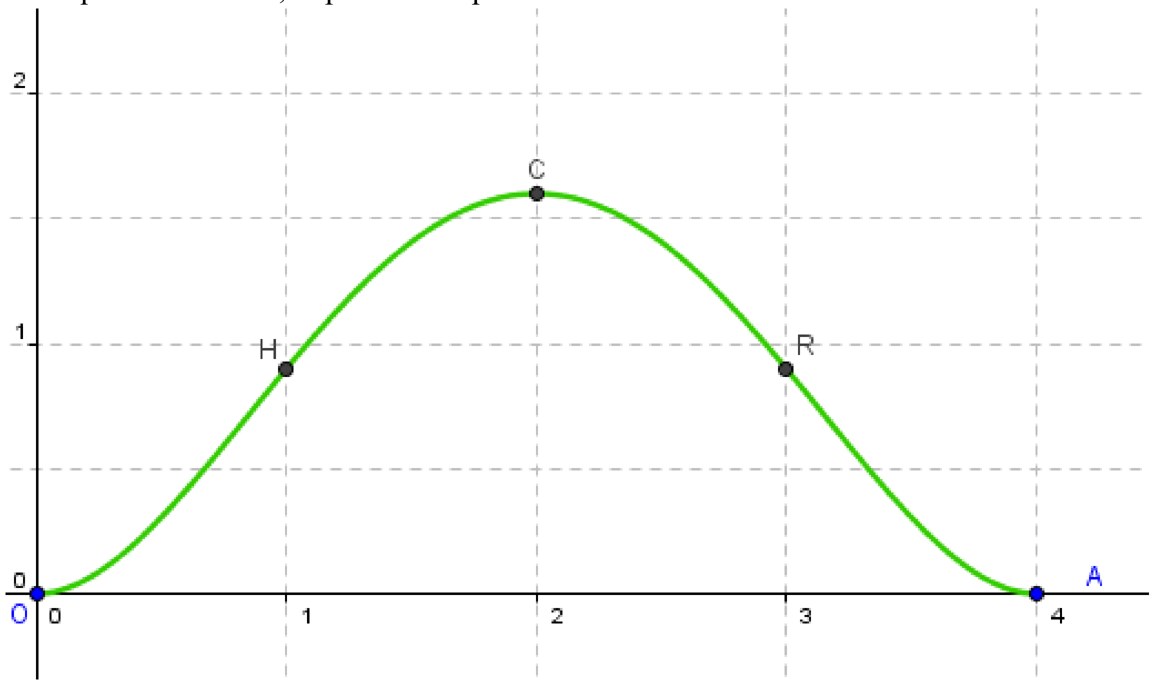
Une société de transports veut relier ces rails pour permettre le passage de wagons.
Le « rail » doit desservir les deux usines U_1 et U_2.
Aidez l'ingénieur à dessiner une courbe possible liant ces rails en précisant comment doivent être les raccords pour que les wagons puissent rouler sans dérailler.

Activité 2 : la piste de ski

La courbe ci-dessous représente le profil d'une piste de ski, partant d'une vallée O, en passant par un col C et arrivant dans la vallée A. En abscisse est indiquée la distance horizontale depuis le point de départ O, en ordonnée l'altitude par rapport à O. L'unité sur chaque axe est l'hectomètre.

Le point H désigne un hameau , le point R un refuge.

Le guide prétend qu'au hameau H, la pente de la piste est de 120%:



Quelle construction peut-on envisager pour vérifier cette valeur ?

Évaluer la pente de la piste au refuge R.

Quelle est la pente de la piste au col C ? au départ O ? à l'arrivée A ?

Activité 3 : coût de fabrication (voir livre 1 page 84)

1 Coût de fabrication

Dans une usine de produits chimiques, les coûts de fabrication d'une quantité q de détergent sont modélisés par la fonction C définie par :

$$C(q) = 0{,}03q^2 + 50q + 2\,000$$

avec q exprimée en tonnes et $C(q)$ en centaines d'euros.

1. Calculer le coût de fabrication de 55, 56, 57 et 58 tonnes de détergent.

2. La différence $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ représente le coût de fabrication d'une tonne supplémentaire produite à partir de q tonnes déjà produites.

a. Montrer que $C_m(q+1) = 0{,}03q^2 + 50{,}06q + 2\,050{,}03$.

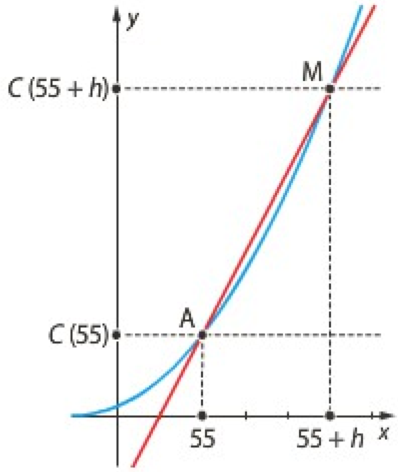
b. Calculer $C_m(55)$, $C_m(56)$ et $C_m(57)$.

$C_m(q)$ est appelée coût marginal pour une production égale à q.

3. On étudie maintenant l'augmentation des coûts de fabrication pour de petites augmentations des quantités produites.

a. Soit $h > 0$. Calculer, en fonction de h, l'accroissement moyen du coût lorsque la production passe de 55 à $55 + h$, c'est-à-dire :

$$\frac{C(55+h) - C(55)}{h}.$$



b. Que devient cet accroissement moyen lorsque h prend les valeurs 0,1 ; 0,01et 0,001 ?

Vers quel nombre s'approche l'accroissement moyen lorsque h s'approche de 0 ?

c. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction C dans un repère du plan.

A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 55 et $55 + h$.

Que représente le rapport $\frac{C(55+h) - C(55)}{h}$?

Activité 4: sécante à une courbe, position limite (voir activité 2 page 84 et 3 page 85)

2) Animation autour d'un point

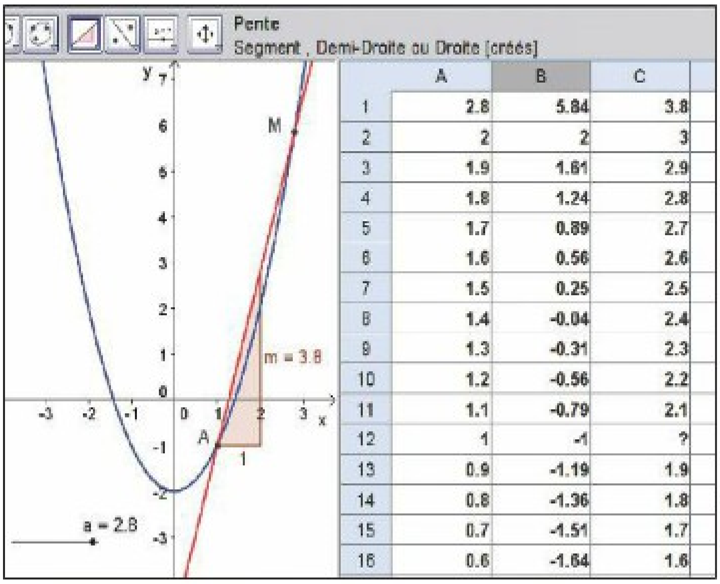
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.
L'écran ci-dessous a été obtenu en faisant varier un point M sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée par un logiciel.
Les deux premières colonnes du tableau contiennent les coordonnées du point M.
Dans la troisième colonne, le logiciel a calculé les coefficients directeurs des droites (AM).

1. Que constate-t-on sur l'évolution des coefficients directeurs lorsque l'abscisse de M se rapproche de plus en plus de 1 ?

2. Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $1 + h$.

a. Exprimer le coefficient directeur $r(h)$ de la sécante (AM) en fonction de h. Le simplifier.

b. Que semble devenir $r(h)$ lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?
Quelle est la valeur limite de $r(h)$ quand h s'approche de plus en plus de 0 ?



	A	B	C
1	2.8	5.84	3.8
2	2	2	3
3	1.9	1.61	2.9
4	1.8	1.24	2.8
5	1.7	0.89	2.7
6	1.6	0.56	2.6
7	1.5	0.25	2.5
8	1.4	-0.04	2.4
9	1.3	-0.31	2.3
10	1.2	-0.56	2.2
11	1.1	-0.79	2.1
12	1	-1	?
13	0.9	-1.19	1.9
14	0.8	-1.36	1.8
15	0.7	-1.51	1.7
16	0.6	-1.64	1.6

Activité 5: vitesse moyenne, vitesse instantanée

Un mobile se déplace sur une trajectoire. Un savant calcul à montrer que la distance parcourue sur cette trajectoire s'exprime par la fonction d(t) = $\frac{1}{2}t^2 + t$ où t est la durée du parcours exprimée en secondes et $d(t)$ la distance exprimée en mètres.

1 a) Calculer d(5) et d(3).

b) Quelle est la vitesse moyenne en ms^{-1} du mobile entre ces deux dates?

2) a) Soit h un réel positif. Calculer en fonction de h la vitesse moyenne $V_m(h)$ en ms^{-1} du mobile entre les dates 3 et 3 +h.

b) Que devient V_m quand h tend vers 0?

II- Nombre dérivé

Les activités précédentes nous amènent à calculer des quotients de la forme $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Remarque : *il n'y a pas deux formules mais une seule en remplaçant b par a + h afin de facilté la réduction du quotient.*

La suite du cours va préciser les définitions et le rôle de ce quotient.

II-1- Accroissement moyen d'une fonction .

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un **intervalle** I et a , b sont des réels de I. *(Sinon il n'est pas possible de calculer les images de a et b par f)*

h est un réel non nul tel que $a + h$ est dans l'intervalle I (*car, on doit pouvoir calculer l'image de a + h par f*).
C_f est la représentation graphique de f dans un repère.

II-1-1- Définition

L'accroissement moyen de f entre a et b ou **accroissement moyen** de f entre a et b est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou, en posant $b = a + h$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple:

Dans l'activité 5, la vitesse moyenne entre les dates 3 et 5 est l'accroissement moyen de la fonction d donnant la position du mobile.

La vitesse moyenne entre les dates 3 et 3 + h est $V_m(h) = \dfrac{d(3+h)-d(3)}{h} = 4 + \dfrac{h}{2}$.

II-1-2- Interprétation graphique

En posant $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ (donc A et B sont des points de C_f), le coefficient directeur de la droite (AB) est égale à $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Si on remplace b par a + h, (h = b – a accroissement de la variable), on a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(AB) est une sécante à la courbe C_f.

Exemple:

Dans l'activité 3, on a trouvé: $A(55; C(55))$ et $M(55 + h, C(55 + h))$

Le coefficient directeur de (AM) est: $\dfrac{C(55+h)-C(55)}{h} = \dots$

Dans l'activité 4, on a trouvé: $A(1; -1)$ et $M(1 + h, h^2 + 2h - 1)$

Le coefficient directeur de (AM) est: $\dfrac{(h^2+2h-1)-(-1)}{h} = h+2$

II-2- Nombre dérivé

Dans ce paragraphe, apparaissent les expressions "tend vers", "de plus en plus proche de ...".

Ces expressions sont prises dans leur sens naturel où on déplace un nombre sur un axe. Lorsque ce nombre se déplace, il se rapproche d'un autre nombre ou il tend vers ...

Dans les activités 3 à 5, le nombre réel h prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

Dans les activités 3 et 4, le point M est mobile sur la courbe $\mathscr{C}$ et se rapproche donc du point A.

Quand h tend vers 0, l'ordonnée $C(55 + h)$ du point M ou $f(1 + h)$ tend vers l'ordonnée $C(55)$ ou $f(1)$ du point A.

L'accroissement moyen (coefficient directeur de la droite (AM)) tend vers... quand h tend vers 0.

On écrit: $\lim_{h \to 0} \dfrac{C(55+h)-C(55)}{h} =$ ou $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \ldots$

Dans l'activité 5, on peut imaginer qu'on mesure des durées de plus en plus faibles à partir de la date 3.

La limite de la vitesse moyenne $V_M(h)$ quand h tend vers 0 est 4: $\lim_{h \to 0} V_M(h) = 4$

II-2-1- Définition et notation du nombre dérivé.

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un **nombre** réel l lorsque h tend vers 0, alors la fonction f est **dérivable** en a.

La limite l de ce quotient s'appelle le **nombre dérivé** de f en a.

On le note $f'(a)$

Exemple

Dans l'activité 3, on a trouvé: $C'(55) = 53,3$

Dans l'activité 43, on a trouvé: $f'(1) = 2$

Dans l'activité 5, on a trouvé: $d'(3) = 4$

II-2-2- Interprétation graphique: tangente à la courbe C_f

La droite T qui passe par le point $A(a, f(a))$ de C_f et qui a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$ est la tangente en A à la courbe C_f.

Exemple

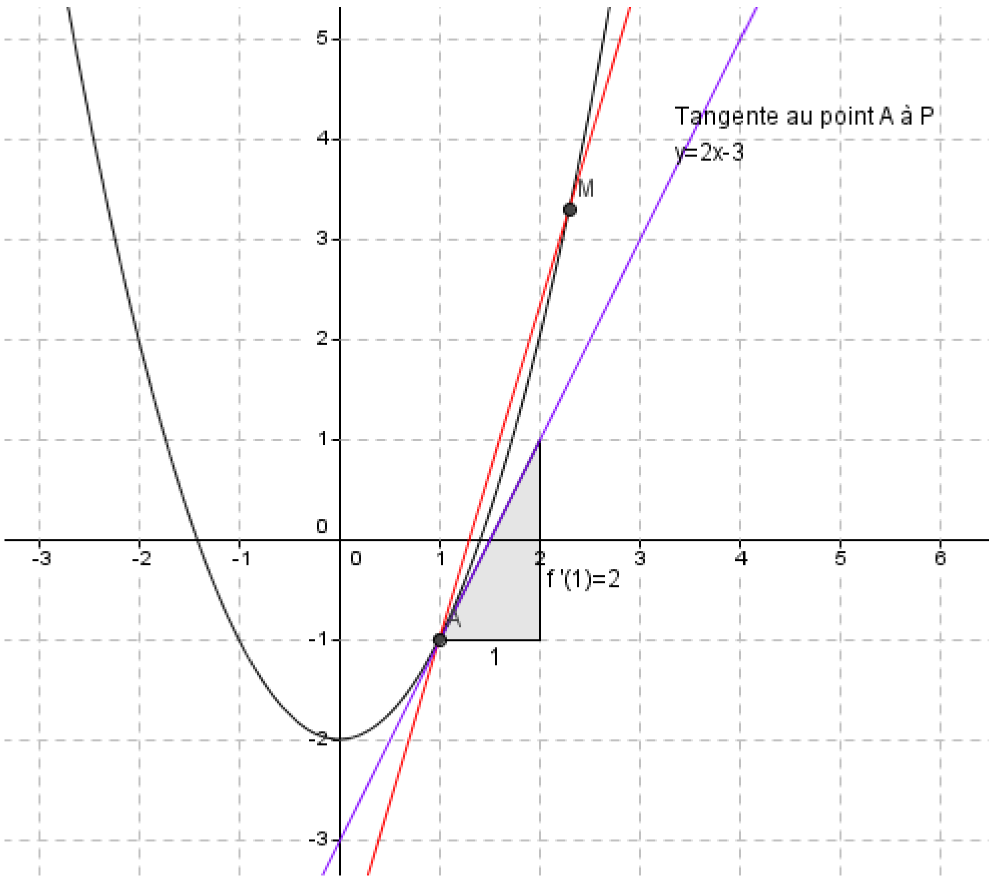
Dans l'activité 3, on a trouvé que la droite en position "limite" des sécantes (AM) quand M se rapproche indéfiniment de A est la droite T de coefficient directeur 53,3 passant par A(55; 4 840,75).

Un point quelconque de T a ses coordonnées (x; y) qui vérifient: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y-4\,840{,}75}{x-55} = 53{,}3$

En développant, il vient: $y = 53{,}3(x - 55) + 4\,840{,}75$

Dans l'activité 4, on a : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y-(-1)}{x-1} = 2$

En développant, il vient: $y = 2(x - 1) - 1 = 2x - 3$



Équation réduite d'une tangente et approximation affine de f

Rappel: Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine

Tout point M(x; y) appartenant à la droite de coefficient directeur m passant par A(x_A ; y_A) vérifie la relation: $\dfrac{y-y_A}{x-x_A}$ *= m, d'où, en développant: y =m(x -* x_A *) +* y_A *. (équation réduite)*

La tangente T passant par (a; $f(a)$) a pour coefficient directeur $f'(a)$.

L'équation réduite de T est: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Si x est proche de a (Voir activité 2: piste de ski), on peut assimiler la courbe C_f à T.

Autrement dit: pour x suffisamment proche de a, $f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a)$. *(Approximation affine de f en a).*

III- Fonction dérivée

Dans le §II- l'étude a été faite autour d'un point fixe de la courbe.

Cette étude peut se faire pour tous les autres points de la courbe.

Dans les "bonnes" conditions (Voir activité 1: raccorder une voie ferrée), la fonction représentée est dérivable pour tout a de l'intervalle I.

Ainsi, à chaque réel a, est associé un autre réel $f'(a)$, ce qui peut se noter: $f' : a \mapsto f'(a)$

III-1- Définition

La fonction f' qui, à tout réel x de l'intervalle I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f sur I.

Remarque:

Il résulte de cette définition que lorsqu'on connaît la fonction dérivée f' de f, le nombre dérivé en a de f est l'image de a par f'.

III-2- Formules: dérivées des fonctions usuelles

Certaines formules seront démontrées en exercices ou en activités.

Pour le cours, on admet les formules (**à connaître par cœur**).

Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Intervalles de dérivabilité**
$f: x \mapsto k$ (fonction constante) $f: x \mapsto x$ $f: x \mapsto x^2$ $f: x \mapsto x^n$ (n entier non nul)	$f': x \mapsto 0$ $f': x \mapsto 1$ $f': x \mapsto 2x$ $f': x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$ $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ $f: x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$f': x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ $f': x \mapsto -\frac{2}{x^3}$ $f': x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$ $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$ $]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	$f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

III-3: Formules: Dérivées et opérations sur les fonctions

Certaines formules seront démontrées en exercices ou en activités.

Pour le cours, on admet les formules (**à connaître par cœur**).

Dans ce tableau, u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opérations sur les fonctions	**fonction dérivée**	**Intervalles de dérivabilité**
Somme: $f = u + v$	$f' = u' + v'$	I
Produit: $f = ku$ (k constante) $f = uv$ $f = u^2$	$f' = ku'$ $f' = u'v + v'u$ $f' = 2u'u$	I I I
Quotient: $f = \frac{1}{v}$ $f = \frac{u}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$ $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	dérivable sur l'intervalle I où $v(x) \neq 0$.

Exemples et méthode:

Point méthode:

* on analyse la fonction f: est-ce la somme de ..., le produit de ..., le quotient de ...,

** on repère la formule à appliquer et son domaine de validité.

*** on écrit chaque élément: $u(x)$, $u'(x)$, ...

**** on applique la formule.

1) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5$ définie sur ℝ.

f est la **somme** des fonctions u: $x \mapsto x^3$; v: $x \mapsto 4x^2$; w: $x \mapsto 5$ $(f = u + v + w)$

Dérivée de u: (D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles) $u' : x \mapsto 3x^2$

Dérivée de v: v est le produit de la fonction carré par une constante 4, d'où, $v' : x \mapsto 4\times 2x = 8x$

Dérivée de w: w est une fonction constante donc $w' = 0$
Finalement: Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 8x$

2) $g : x \mapsto (x^2 + 1)\times \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

g est le **produit** des fonctions $u : x \mapsto x^2 + 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$
On étudie donc la dérivée de g sur $]0; +\infty[$
La dérivée de u est: $u' : x \mapsto 2x$

La dérivée de v est: $v' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$u(x) = x^2$ $u'(x) = 2x$ $v(x) = \sqrt{x}$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Pour $x > 0$, $g'(x) = (uv)'(x) = u'(x)\times v(x) + v'(x)\times u(x) = 2x \times \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2 + 1)$

$$= \frac{2x\times 2x+(x^2+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

3) h est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par h: $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

h est le quotient de u: $x \mapsto 2x + 1$ et v: $x \mapsto x^2 - 1$

u et v sont dérivables sur ℝ et $v(x) \neq 0$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
h est donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$; $]1; +\infty[$
La dérivée de u est: $u' : x \mapsto 2$

La dérivée de v est: $v' : x \mapsto 2x$

$u(x) = 2x + 1$ $u'(x) = 2$ $v(x) = x^2 - 1$ $v'(x) = 2x$

Finalement, pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$, $h'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)\times v(x) - v'(x)\times u(x)}{(v(x))^2}$

$$= \frac{2\times(x^2-1)-2x\times(2x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$$

III-4 Dérivées des fonctions affines et des polynômes

D'après ce qui précède, la dérivée des fonctions affines et des polynômes se calcule immédiatement:

	Fonctions	**Fonctions dérivées**
Fonction affine	$x \mapsto ax + b$	$x \mapsto a$
Polynôme du second degré	$x \mapsto ax^2 + bx + c$	$x \mapsto 2ax + b$

Polynôme de degré n	$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	$x \mapsto n\, a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$

Exemple:

Soit le polynôme f défini par $f(x) = 5x^6 + 4x^5 - 8x^4 + x^3 - 7x^2 + 10x + 9$ a pour dérivée le polynôme:

$f'(x) = 5\times6\,x^5 + 4\times4\,x^4 - 8\times4\,x^3 + 3x^2 - 7\times2x + 10\times1 = 30x^5 + 16x^4 - 32x^3 + 3x^2 - 14x + 10$.

IV- Applications de la dérivée

IV-1- Dérivée et sens de variation.

IV-1-1- Observation

L'observation des résultats des activités 2 (piste de ski) et 3 (tangente à une courbe) mène au constat suivant:

Lorsque la tangente en un point à C_f a un coefficient directeur positif, la fonction f est croissante sur un voisinage de ce point et

lorsque la tangente en un point à C_f a un coefficient directeur négatif, la fonction f est décroissante sur un voisinage de ce point

IV-1-2- Théorème fondamental

Le théorème suivant est admis:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si la dérivée f' est positive sur I alors la fonction f est croissante sur I.

Si la dérivée f' est négative sur I alors la fonction f est décroissante sur I.

Si la dérivée f' est nulle pour **toute valeur** de I alors la fonction f est constante sur I.

Remarque

La réciproque du théorème est vrai:

f étant une fonction dérivable sur I
Si la fonction f est croissante sur I alors sa dérivée f' est positive sur I
Si la fonction f est décroissante sur I alors sa dérivée f' est négative sur I
Si la fonction f est constante sur I alors sa dérivée f' est nulle pour toute valeur de I

IV-1-3- Exemples et méthode

Point méthode:

Pour étudier la variation d'une fonction f, on peut lorsque la fonction f est dérivable

* calculer la dérivée de f

** **étudier** le signe de la dérivée

*** appliquer le théorème précédent.

On résume cette étude la plupart du temps dans un tableau de variations où apparaît une ligne pour indiquer le signe de la dérivée.

Les exemples sont ceux du paragraphe III-3

1) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

On a trouvé: Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 8x$

Étude du signe de $f'(x)$:

$3x^2 + 8x = x(3x + 8)$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de 3x + 8		$-$	0	$+$		$+$	
f'(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Puisque $f'(x)$ est positif sur les intervalles $]-\infty; -\frac{8}{3}]$ et $[0; +\infty[$, la fonction f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{8}{3}]$ et $[0; +\infty[$

Puisque $f'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[-\frac{8}{3}; 0]$, la fonction f est décroissante sur $[-\frac{8}{3}; 0]$.

Tableau de variations de f:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$+\infty$
f '(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)		↗	$f\left(-\frac{8}{3}\right)$	↘	$f(0)$	↗	

2) $g : x \mapsto (x^2 + 1)\times\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

On a trouvé: Pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$

Étude du signe de $g'(x)$:

Il est évident que $g'(x)$ est strictement positif, la fonction g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$

3) h est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par $h: x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-1}$.

On a trouvé: $h'(x) = \frac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$

Étude du signe de $h'(x)$:

Le dénominateur étant un carré, le signe de $h'(x)$ est **celui** du numérateur $N(x) = -2x^2 - 2x - 2$

On reconnaît un polynôme du second degré:

son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-2)\times(-2) = -12$ est strictement négatif.

Par conséquent, $N(x)$ est toujours du signe du coefficient -2 de x^2, soit: $N(x) < 0$

Comme $h'(x) < 0$, la fonction h est strictement décroissante sur chacun des intervalles :

$]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$; $]1; +\infty[$.

Tableau de variations

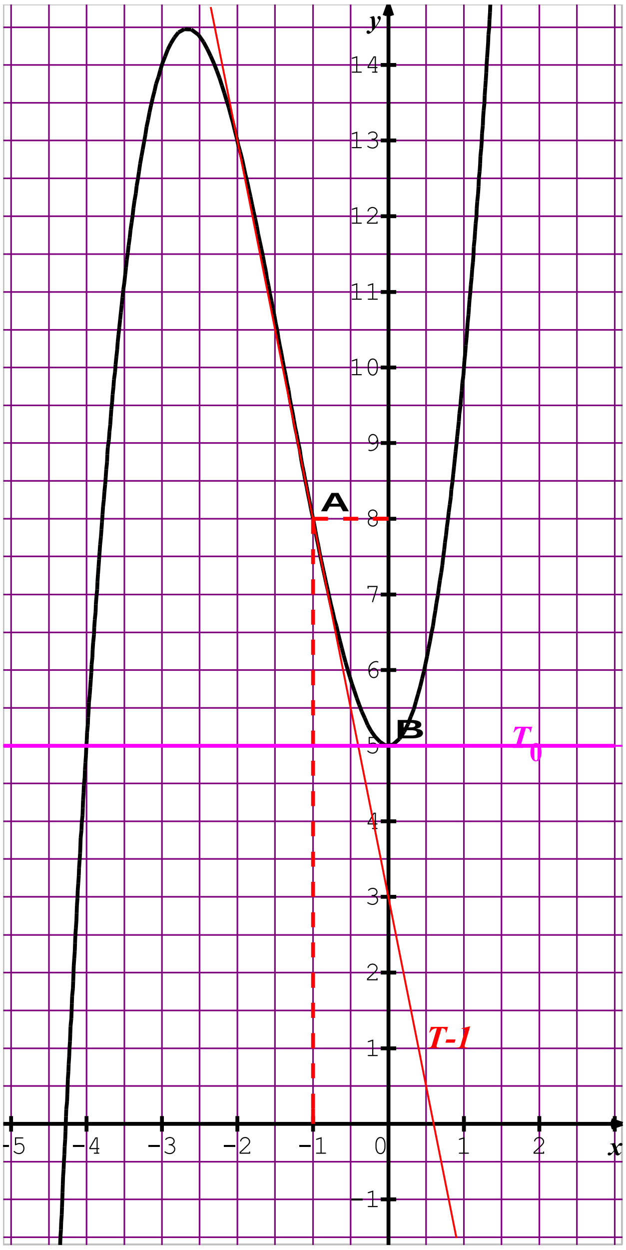
x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$h'(x)$	$-$	||	$-$	||	$-$	
$h(x)$	↘	||	↘	||	↘	

IV-2- Tangente à une courbe représentative de fonctions

Au §II-2-2, nous avons vu que le nombre dérivé en a était le coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique de la fonction au point d'abscisse a.

En reprenant les exemples du § III-3-

1) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.



Déterminer et tracer les tangentes T_{-1} et T_0 à C_f aux points d'abscisses -1 et 0.

On a trouvé: Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 8x$
On a donc:
Le point de tangence de C_f et T_{-1} est A(-1; $f(-1)$), soit A(-1; 8) et
le coefficient directeur de T_{-1} est: $f'(-1) = 3 - 8 = -5$.
Une équation de T_{-1} est $y = -5(x-(-1)) + 8 = -5x + 3$
Le point de tangence de C_f et T_0 est B(0; $f(0)$), soit B(0; 5) et
le coefficient directeur de T_0 est: $f'(0) = 0$;
Une équation de T_0 est $y = 5$

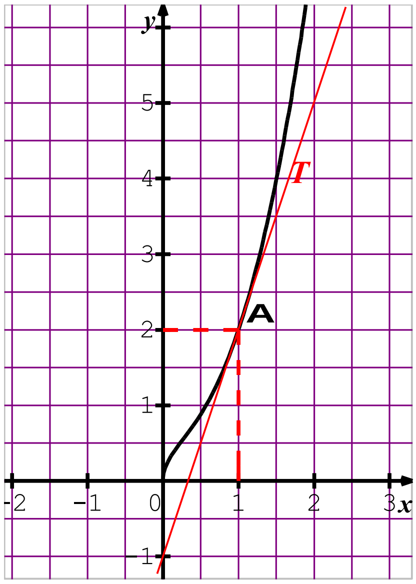
2) $g : x \mapsto (x^2 + 1)\times \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

Construire la tangente T à C_g au point d'abscisse 1.

On a trouvé: Pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$

La tangente T est tangente au point A(1; g(1)), soit A(1; 2) et son coefficient directeur est $g'(1) = 3$

Une équation de T est $y = 3(x - 1)) + 2 = 3x - 1$



3) h est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par h: $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

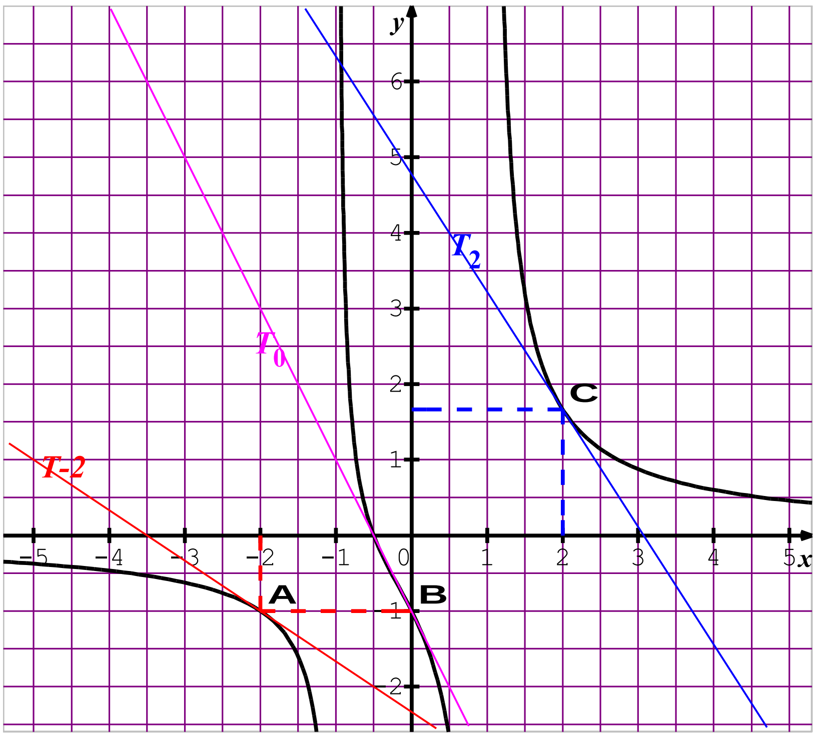
Construire les tangentes T_{-2}, T_0 et T_2 à C_h aux points d'abscisses –2; 0 et 2.

On a trouvé: $h'(x) = \dfrac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$

T_{-2} est tangente au point $A(-2; h(-2))$, soit $A(-2; -1)$ et son coefficient directeur est: $h'(-2) = \dfrac{-6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

T_0 est tangente au point $B(0; h(0))$, soit $A(0; -1)$ et son coefficient directeur est: $h'(0) = -2$.

T_2 est tangente au point $C(2; h(2))$, soit C(2; $\dfrac{5}{3}$) et son coefficient directeur est: $h'(2) = \dfrac{-14}{9}$.



IV-3- Coût marginal

Extrait du dictionnaire historique de la langue française (Le Robert) au mot MARGINAL

*Pendant longtemps, le mot a seulement eu le sens objectif de "situé dans la marge d'une page" [...] Il a développé le sens de "situé sur le bord d'une chose" en histoire naturelle (1804). Il est devenu un terme économique (1910) à la suite de la découverte de la théorie de **l'utilité marginale**, [...]: l'expression **marginal cost** est attestée en anglais en 1887.*

Lors de la production d'une quantité q, on établit une fonction C où $C(q)$ est le **coût total** pour une quantité q produite.

Le **coût moyen** ou **coût unitaire** est le quotient du coût total par la quantité produite: $C_{Moyen}(q) = C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$

Lorsqu'on passe de la quantité q à la quantité $q + 1$ (on augmente d'une unité la production), le coût passe de $C(q)$ à $C(q + 1)$.

Le **coût marginal** est $C_{marginal}(q) = C_m(q) = C(q + 1) - C(q)$, c'est donc, l'accroissement moyen de la fonction coût C entre q et $q + 1$.

Graphiquement, l'accroissement moyen est la pente de la sécante AB avec $A(q, C(q))$ et $B(q+1, C(q+1))$

On admet que dans de "bonnes" conditions, le coût marginal $C_m(q) = C'(q)$.

Le coût marginal est donc le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse q à la courbe représentant le coût total.

Un exemple:

Dans une usine, on a calculé que le coût total de production d'une quantité q en tonnes est donnée par la fonction $C(q) = \frac{1}{2}q^2 + q + 2$ en milliers d'euros.

Le coût moyen pour une quantité produite q est $C_M(q) = \frac{1}{2}q + 1 + \frac{2}{q}$.

Le calcul du coût marginal à partir de sa définition donne:

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q) = \frac{1}{2}(q+1)^2 + (q+1) + 2 - \left(\frac{1}{2}q^2 + q + 2\right)$$

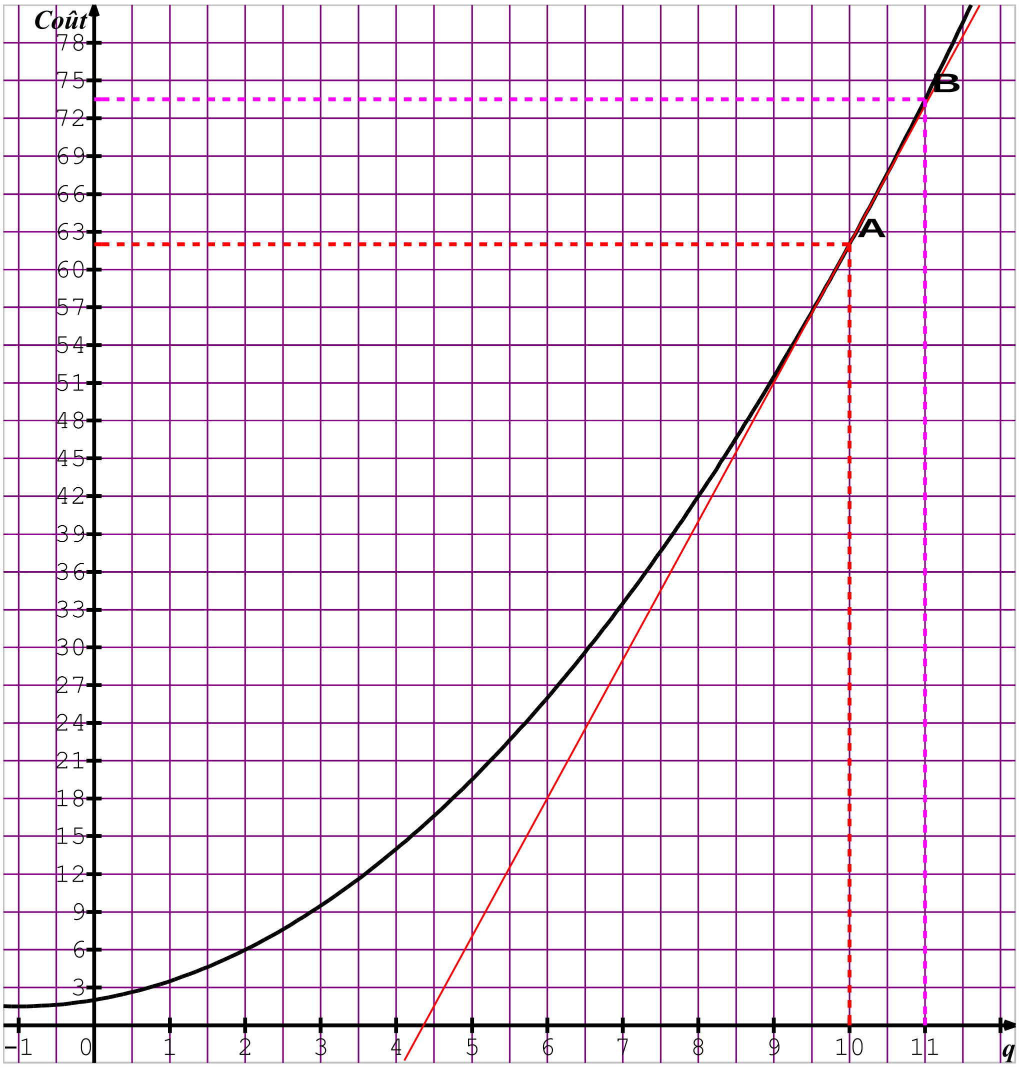
$$= \frac{1}{2}(q^2 + 2q + 1) + q + 1 + 2 - \frac{1}{2}q^2 - q - 2$$

$$= q + 1{,}5$$

La dérivée est $C'(q) = \frac{1}{2} \times 2q + 1 = q + 1$.

Pour de grandes quantités q la différence entre $C_m(q)$ et $C'(q)$ est négligeable.

illustration graphique:



Le point $A(10, C(10))$, le point $B(11, C(11))$. La droite (AB) et la tangente en A sont presque confondues.

Sur le graphique suivant est représenté le coût marginal: C' et le coût moyen C_M.

Les deux courbes se coupent en un point d'abscisse q_0 défini par $C'(q) = C_M(q)$.

On a donc: $C'(q) = \frac{C(q)}{q}$, soit $C'(q) \times q - C(q) = 0$

Or, la dérivée de la fonction C_M est définie par: $C'_M(q) = \frac{C'(q) \times q - 1 \times C(q)}{q^2} = \frac{C'(q) \times q - C(q)}{q^2}$

Il en résulte que la dérivée C'_M s'annule en q_0.

Calcul de la dérivée du coût moyen $C_M(q) = \frac{1}{2}q + 1 + \frac{2}{q}$.

$$C'_M(q) = \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{-1}{q^2}\right) = \frac{q^2 - 4}{2q^2} = \frac{(q-2)(q+2)}{2q^2}$$

Comme la quantité q est un nombre positif, on obtient:

le coût moyen est minimal pour une production de 2 tonnes et vaut 3 milliers d'euros.

q	0		2		$+\infty$
$q-2$		$-$	0	$+$	
$q+2$		$+$		$+$	
$C'_M(q)$	‖	$-$	0	$+$	
$C_M(q)$	‖	↘	3	↗