Index

I- Rappels : Vocabulaire, notations, définitions et propriétés à connaître.....2
I-1- Expérience aléatoire, univers.....2
I-2- Événement, événement contraire.....2
Événement.....2
Événement contraire.....2
I-3- Événement élémentaire.....3
I-4- Probabilité, hypothèse d'équiprobabilité.....3
Rappel des résultats en statistiques:.....3
Définition d'une probabilité.....3
Hypothèse d'équiprobabilité.....3
Probabilité d'un événement.....4
Probabilité de l'événement contraire.....4
I-5- " A et B ", " A ou B ".....4
A et B.....4
A ou B.....4
II- Variable aléatoire.....5
II-1- Un premier exemple : tableau à double entrée 5
II-1-1- Description de l'expérience. (Voir §I-1).....5
II-1-2- Variable aléatoire.....5
Analyse de l'expérience: tableau à double entrée.....5
Loi de probabilité.....5
Notation :.....5
II-2- Un deuxième exemple : arbre pondéré.....6
II-2-1- Description de l'expérience (Voir §I-1).....6
II-2-2- Analyse de l'expérience: arbre de probabilité pondéré.....6
II-2-3- Une variable aléatoire :.....6
Loi de probabilité.....6
III- Variables aléatoires : Propriétés, Espérance mathématique.....6
III-1- Somme des probabilités.....6
III-2- Espérance mathématique d'une variable alétoire.....6
Complément :.....6
UN ARBRE DE PROBABILITÉ.....7
ARBRE COMPLET.....8
Loi de probabilité:.....9

I- Rappels : Vocabulaire, notations, définitions et propriétés à connaître.

I-1- Expérience aléatoire, univers

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît les résultats possibles ou issues sans que l'on puisse dire quel sera le résultat qui sera obtenu.

L'ensemble E de tous les résultats est l'**univers des possibles**. (ou ***éventualités*** ou ***issues***)

Exemples:

1) On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

Une **issue** est un des numéros du dé.

L'*univers E* : $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

2) Un sac n° 1 contient 5 boules numérotées de 3 à 7.

Un sac n° 2 contient quatre jetons numérotés de 2 à 5.

On tire une boule du sac n° 1 et un jeton du sac n°2 et on les remet dans leurs sacs respectifs.

Une **issue** ou un résultat possible est un couple : (boule ; jeton).

Écrire l'univers E : E = { …...}

3) Un sac contient 10 jetons: 5 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons bleus.

On tire successivement et sans remise 3 jetons dans le sac et on note leurs couleurs dans l'ordre des tirages.

On note R, V, B les couleurs Rouge, Vert, Bleu.

Écrire l'ensemble E des issues (Univers) :
E = { }

I-2- Événement, événement contraire

Événement

Un **événement** A est un sous-ensemble ou une partie de l'univers.

Exemple :

On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

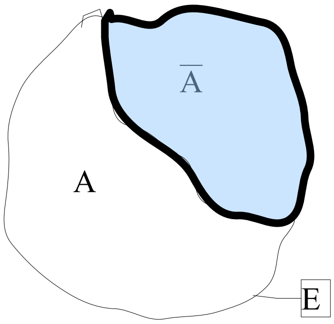
L'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

A : " le numéro obtenu est pair " A= {2; 4; 6}

B: " le numéro est strictement inférieur à 3 " B = { }

Événement contraire

L'**événement contraire de A**, noté $\overline{A}$, est la partie de l'univers constituée de tous les éléments qui ne sont pas des éléments de A.



Exemple :

Écrire les éléments de $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Remarque: les parties A et $\overline{A}$ sont complémentaires
$\overline{A}$ est le **complémentaire** de A dans E.

I-3- Événement élémentaire

Un ***événement élémentaire*** est une partie de E qui ne contient qu'un seul élément.

Exemple :

On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

L'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

F: " obtenir le 6 " est un événement élémentaire.

I-4- Probabilité, hypothèse d'équiprobabilité.

Rappel des résultats en statistiques:

En statistiques, on a vu que si on répétait la même expérience de nombreuses fois, les fréquences se stabilisaient.

On sait qu'une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1, et que la somme de toutes les fréquences est égale à 1.

Définition d'une probabilité

Pour définir une probabilité, on attribue à chaque événement élémentaire un nombre entre 0 et 1 de telle sorte que **la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1**.

La loi de probabilité est la donnée de l'ensemble des issues et de leur probabilité.

Exemples :

1) On joue à pile ou face avec une pièce mal équilibrée. On remarque que la probabilité de faire " pile " est le double de celle de faire " face ".

Établir la loi de probabilité.
2) On lance un dé, avec les faces numérotées de 1 à 6, truqué de la façon suivante: la probabilité d'un numéro est proportionnel à ce numéro.
Établir la loi de probabilité.

Hypothèse d'équiprobabilité

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont ***équiprobables***.

Si l'univers contient n issues, la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{n}$

Exemples :

1) Une pièce bien équilibrée P(pile) = P(face) = ...

2) Un dé bien équilibré P(1) = P(2) = ... = P(6) = ...

3) On tire au hasard un nom dans la liste des élèves de 1ES2. P(" un élève de 1ES2 ") = ...

Probabilité d'un événement

Soit A un événement.

On calcule la probabilité de A en faisant la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent A.

Exemples :

On lance un dé cubique à six faces numérotées de 1 à 6.

L'univers E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

A : " le numéro obtenu est pair " Calculer la probabilité de A : P(A) = ….

B: " le numéro est strictement inférieur à 3 " P(B) = ….

Probabilité de l'événement contraire

D'après les définitions des § précédents, on a:

$p(A) + p(\overline{A})$ = ...

Exemples :

Calculer les probabilités des événements $\overline{A}$, $\overline{B}$.

I-5- " A et B ", " A ou B "

A et B

L'événement A **et** B, noté $A \cap B$, est l'événement dont les issues sont communes à A et à B. (Elles sont à la fois dans A et dans B).

Conseil:

Revoir si besoin, l'intersection d'intervalles et le sens du " ET " en logique.

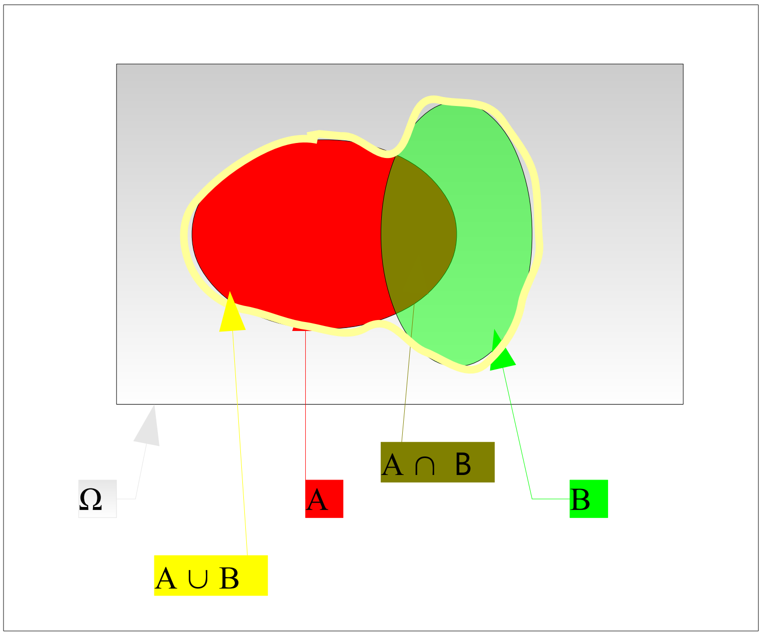
A ou B

L'événement A **ou** B, noté $A \cup B$, est l'événement dont les issues sont dans A ou dans B. (Elles peuvent être communes à A et à B).

Conseil:

Revoir si besoin, la réunion d'intervalles et le sens du " OU " en logique.

Exemples : Dans le §I-4, écrire $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cup B$.



On a alors la relation suivante: P(A ∪ B) = ...

II- Variable aléatoire.

II-1- Un premier exemple : tableau à double entrée

II-1-1- Description de l'expérience. (Voir §I-1)

Un sac n° 1 contient 5 boules numérotées de 3 à 7.

Un sac n° 2 contient quatre jetons numérotés de 2 à 5.

On tire **au hasard** une boule du sac n° 1 et un jeton du sac n°2 et on les remet dans leurs sacs respectifs..

II-1-2- Variable aléatoire

Pour chaque issue, on fait la somme du numéro de la boule et du numéro du jeton.

On crée ainsi une **variable aléatoire** X qui, à chaque issue de E, associe un nombre réel.

Analyse de l'expérience: tableau à double entrée

Construire le tableau à double entrée permettant de lire la somme obtenue.

Loi de probabilité

Écrire dans un tableau de 2 lignes toutes les issues ou résultats possibles et leur probabilité.

Somme	
Probabilité	

Notation :

(X = 6) est l'événement " la somme est égale à 6 ".

P(X = 6) = P{(B3,J3) ; (B4,J2)} = …...

(X ⩾ 8) est l'événement " la somme est supérieure ou égale à 8 ".

Donner P(X ⩾ 8) =

(Avec ce dernier tableau, **on a donné la loi de probabilité** de la variable aléatoire;
Si on imagine répéter indéfiniment l'épreuve, la fréquence de chaque somme (**distribution des fréquences**) se stabilise autour d'une valeur qui est la probabilité.
On peut simuler l'expérience avec la calculatrice ou un tableur ou un logiciel comme Algobox …)

II-2- Un deuxième exemple : arbre pondéré

II-2-1- Description de l'expérience (Voir §I-1)

Un sac contient 10 jetons: 5 jetons rouges, 3 jetons verts et 2 jetons bleus.

On tire **au hasard** successivement et sans remise 3 jetons dans le sac et on note leurs couleurs dans l'ordre des tirages.

On note R, V, B les couleurs Rouge, Vert, Bleu.

II-2-2- Analyse de l'expérience: arbre de probabilité pondéré

Compléter l'arbre permettant de lire toutes les issues et écrire sur chaque branche la probabilité associée à ce tirage.

II-2-3- Une variable aléatoire :

On décide d'attribuer 5 points si les trois jetons ont la même couleur, 3 points si deux jetons sont de couleur bleue, 1 point si deux jetons sont de couleur verte ou si deux jetons sont de couleur rouge et de perdre 5 points si les trois jetons sont de couleur différente.

On note X la variable aléatoire

Loi de probabilité

Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

III- Variables aléatoires : Propriétés, Espérance mathématique

III-1- Somme des probabilités

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs réelles x_1, x_2, …., x_n.

La somme $P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_n) = 1$

En notant : $p_i = P(X=x_i)$, on a : $p_1+p_2+\ldots+p_n = 1$, soit : $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$

(Voir les deux exemples du §I).

III-2- Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs réelles x_1, x_2, …., x_n de probabilités respectives p_1, p_2, …, p_n.

La valeur moyenne des valeurs prises par X (moyenne pondérée par les probabilités) s'appelle l'espérance mathématique, notée E(X), de la variable aléatoire X.

On a donc : E(X) = $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$ rappel : $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$

Cette formule découle de celle permettant de calculer la moyenne d'une série statistique avec les fréquences.

Application :

Calculer l'espérance mathématique dans les exemples du §I-

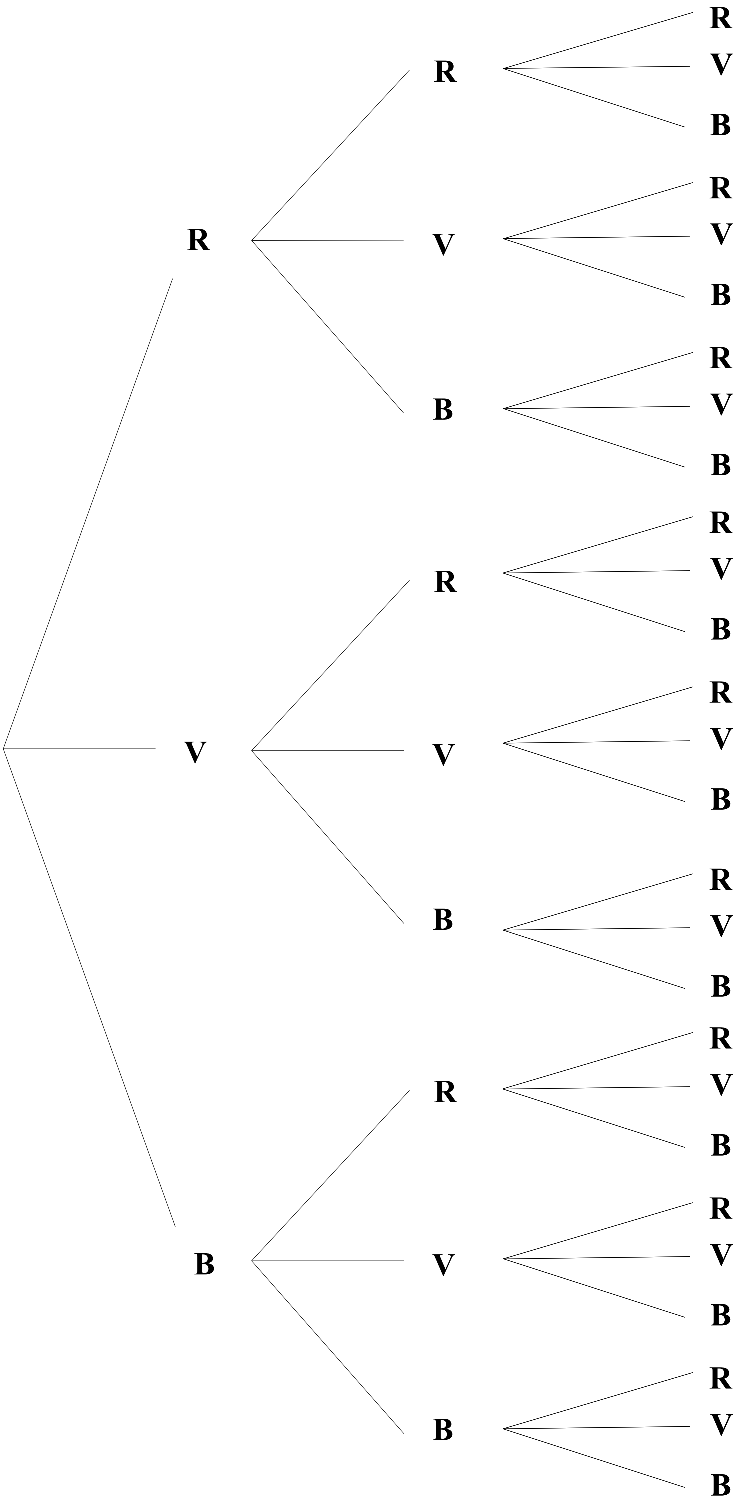
Complément :

On a les mêmes formules pour la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire X que pour les séries statistiques.

UN ARBRE DE PROBABILITÉ

Retour

1^{er} jeton **Tirage du $2^{ème}$ jeton** **$3^{ème}$ jeton** **Résultats**



ARBRE COMPLET.

Tirage du

1er jeton		2ème jeton		3ème jeton	Résultats	Points
5/10	R	4/9	R	3/8 R	3 rouges …...................................	5
				3/8 V	2 rouges, 1 verte............................	1
				2/8 B	2 rouges, 1 bleue............................	1
		3/9	V	4/8 R	2 rouges, 1 verte.............................	1
				2/8 V	1 rouge, 2 vertes.............................	1
				2/8 B	1 rouge, 1 verte, 1 bleue.................	-5.
		2/9	B	4/8 R	2 rouges, 1 bleue...........................	1
				3/8 V	1 rouge, 1 verte, 1 bleue.................	-5
				1/8 B	1 rouge, 2 bleues..........................	3
3/10	V	5/9	R	4/8 R	2 rouges, 1 verte...............................	1
				2/8 V	1 rouge, 2 vertes................................	1
				2/8 B	1 rouge, 1 verte, 1 bleue..................	-5
		2/9	V	5/8 R	1 rouge, 2 vertes................................	1
				1/8 V	3 vertes...	5
				2/8 B	2 vertes, 1 bleue...............................	1
		2/9	B	5/8 R	1 rouge, 1 verte, 1 bleue....................	-5
				2/8 V	2 vertes, 1 bleue...............................	1
				1/8 B	1 verte, 2 bleues..............................	3
2/10	B	5/9	R	4/8 R	2 rouges, 1 bleue............................	1
				3/8 V	1 rouge, 1 verte, 1 bleue..................	-5
				1/8 B	1 rouge, 2 bleues.............................	3
		3/9	V	5/8 R	1 rouge, 1 verte, 1 bleue..................	-5
				2/8 V	2 vertes, 1 bleue...............................	1
				1/8 B	1 verte, 2 bleues..............................	3
		1/9	B	5/8 R	1 rouge, 2 bleues...............................	3
				3/8 V	1 verte, 2 bleues...............................	3
				0 B	3 bleues: …................................... Impossible	Rien

[Retour]

Loi de probabilité:

P(3R) = $\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5\times4\times3}{10\times9\times8}=\frac{1}{12}$

P(2R1V) = $\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=3\times\frac{5\times4\times3}{10\times9\times8}=\frac{1}{4}$

P(2R1B) = $\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{5}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=3\times\frac{5\times4\times2}{10\times9\times8}=\frac{1}{6}$

P(1R2V) = $\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{8}=3\times\frac{5\times3\times2}{10\times9\times8}=\frac{1}{8}$

P(1R2B) = $\frac{5}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{5}{8}=3\times\frac{5\times2\times1}{10\times9\times8}=\frac{1}{24}$

P(1R1V1B) = $\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{8}=$

$=6\times\frac{5\times3\times2}{10\times9\times8}=\frac{1}{4}$

P(3V) = $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$.

P(2V1B) = $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=3\times\frac{3\times2\times2}{10\times9\times8}=\frac{1}{20}$

P(1V2B) = $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{1}{8}+\frac{2}{10}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=3\times\frac{3\times2\times1}{10\times9\times8}=\frac{1}{40}$

Il est impossible d'avoir 3 boules bleues.

On peut vérifier: $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{120}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\frac{10+30+20+15+5+30+1+6+3}{120}$

$=\frac{120}{120}=1$

Issues	3R	2R1V	2R1B	1R2V	1R2B	1R1V1B	3V	2V1B	1V2B	Total
probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	1

Variable aléatoire : loi de probabilité.

P(X = 5) = $\frac{1}{12}+\frac{1}{120}=\frac{11}{120}$

P(X = 3) = $\frac{1}{24}+\frac{1}{40}=\frac{8}{120}$

P(X = 1) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}=\frac{71}{120}$

P(X = –5) = $\frac{1}{4}=\frac{30}{120}$

x_i	5	3	1	–5	Total
p_i	$\frac{11}{120}$	$\frac{8}{120}$	$\frac{71}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{120}{120}=1$
$p_i x_i$	$\frac{55}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{71}{120}$	$\frac{-150}{120}$	E(X) = 0

Retour