**Quelque soit la série (générale ou technique ou professionnelle), il est nécessaire de comprendre les calculs sur les nombres.**

La machine ne peut être utile que lorsque ces calculs ont été bien analysés.

***Exemples*** : 1) Vous êtes encore quelques-uns à faire par exemple l'erreur suivante : $\frac{2x+10}{2} \cancel{= x + 10}$ **(Faux)**

2) ou encore : $(3x+2)^2 = \cancel{3x^2+4}$ **Faux** ou $(3x+2)^2 = \cancel{9x^2+4}$ **Faux**

Corrigez les erreurs de ces deux exemples.

**Comprendre :**

Comment comprendre son erreur et retenir la bonne façon d'appliquer les propriétés des calculs… ?

Exemple 1) : Il est d'abord essentiel de comprendre par exemple que 378 divisé par 3 est égal à :

$$100 + 20 + 6 = 126$$

car : $378 = 300 + 60 + 18$ et que $378 = 3\times100 + 3\times20 + 3\times6$

C'est cela qui vous permet après de comprendre la factorisation par 3 et ainsi de suite …

Autrement dit : $\frac{378}{3} = \frac{300+60+18}{3} = \frac{3(100+20+6)}{3} = 100 + 20 + 6$

et lorsque vous devez réduire $\frac{2x+10}{2}$, **la règle n'a pas changé.**

$$\frac{2x+10}{2} = \frac{2(x+5)}{2} = x + 5$$

Exemple 2) : Il est d'abord essentiel de bien lire le calcul $(3x + 2)^2$

$\mathbf{(3x + 2)^2}$ est le nombre $(3x + 2)$ multiplié par **lui-même**

$(3x + 2)^2 = (3x + 2)(3x + 2) = (3x)(3x) + 3x\times2 + 2\times3x + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Pour toutes les erreurs de calculs, vous devez commencer par reprendre les propriétés des opérations :
Procédez dans l'ordre suivant :
- décrire (ou nommer) les opérations
  par exemple : le carré de la somme des termes $3x$ et 2 $(3x + 2)^2$
  la somme des carrés de $3x$ et de 2 $(3x)^2 + 2^2$
  la somme du carré de $3x$ et de 2 $(3x)^2 + 2$
- se souvenir des propriétés des opérations
  par exemple : $9 - 5 - 2 = 4 - 2 = 2$
  $9 - (5 - 2) = 9 - 3 = 6$
  $9 - 5 + 2 = 4 + 2 = 6$
  $15/5\times3 = 3\times3 = 9$
  $15/(5\times3) = 15/15 = 1$
  $15/5/3 = 3/3 = 1$
  $15/(5/3) = 15\times(3/5) = 9$

# A. Interpréter les parenthèses

**Quelques règles** : $k(a+b) = ka+kb$ ; $k(a-b) = ka-kb$ (on distribue) ;
$A-(B+C-D) = A-B-C+D$ ; $A+(B+C-D) = A+B+C-D$.

⚠ $k(a\times b) = kab$, on ne distribue pas : $3(ab) \neq 3a\times 3b$.

$A(x) = 2x(x+3) - x(3\times 2x) + (3x-5)$ : les parenthèses n'ont pas le même rôle.
① ② ③ ④

① Parenthèses de **fonction** :
« $A$ de x » signifiant que l'expression dépend de la variable muette $x$ ; on ne peut jamais enlever de telles parenthèses.

② Parenthèses de multiplication d'une somme par un nombre :

$2x(x+3)$ signifiant $2x$ **fois la somme** $x+3$ ;

pour les enlever on **distribue** : $2x \times x + 2x \times 3 = 2x^2+6x$.

③ Parenthèses d'**association d'un produit** : $-x(3\times 2x)$ signifiant $-x$ fois 3 fois $2x$ ;
pas de distribution à faire : $-x\times 3\times 2x = -x\times 6x = -6x^2$.

④ Parenthèses d'**association**, signifiant qu'on ajoute simplement un regroupement ; on peut toujours les enlever, sauf s'il y a un « – » devant.

Ainsi le développement de l'expression $A(x)$ donne :

$$A(x) = 2x(x+3) - x(3\times 2x) + 3x - 5$$
$$= 2x^2+6x-6x^2+3x-5 = -4x^2+9x-5.$$

# B. Développer

- **Ne pas oublier le double produit** dans le développement d'un carré. $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$
- **Un signe « – » devant une parenthèse** : il faut changer tous les signes. $-(A+B-C) = -A-B+C$
- **Un signe « – » devant un trait de fraction**, c'est comme un signe « – » devant une parenthèse au **numérateur**. $-\dfrac{N}{D} = \dfrac{-N}{D}$, mais $\dfrac{-N}{-D} = \dfrac{N}{D}$

# C. Reconnaître les identités remarquables

**Développement d'un carré**

• $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ : « le carré d'une somme est égal au carré du premier terme + le **double** produit + le carré du deuxième terme ».

Ainsi $(5x+7)^2 = \underset{\text{carré de } 5x}{25x^2} + \underset{2 \text{ fois } 5x \text{ fois } 7}{70x} + \underset{\text{carré de } 7}{49}$.

• Si on a une expression à trois termes dont deux termes sont des carrés parfaits, et le terme restant est le double produit, alors l'expression est le développement d'un carré :

$\underset{\text{carré de } 3x}{9x^2} + \underset{2\times 3x\times 5}{30x} + \underset{\text{carré de } 5}{25} = (3x+5)^2$ ; $\underset{\text{carré de } 2x}{4x^2} - \underset{2\times 2x\times 1}{4x} + \underset{\text{carré de } 1}{1} = (2x-1)^2$

**14** Dans chacune des écritures, indiquer le rôle des parenthèses, puis donner la forme développée :

$A(x) = 3(x-1)+(x+2)-4x$ ;
$B(x) = 2x(-x+2)+(x^2-4)$ ;
$C(x) = 3(-5x\times x)+9x-5(x+4)$ ;
$D(x) = 2(A(x)+B(x))-5x(2x-3)$.

**15** Même exercice :

$A(x) = -3x(x-3)+(4x-1)(x+1)-2x(x-1)$ ;
$B(x) = (5x-1)(1-x)-4x(x+1)+(x^2-1)$ ;
$C(x) = 2x(2x\times 3)-4(5x\times 3x)+3(2x-3)$ ;
$D(x) = -x(2x+1)+(x^2-3x+2)-(x+1)(1-x)$ ;
$E(x) = (-3x-1)(-x-3)-(4x-3)(-x-2)-(7x^2-x)$.

**16** Développer, réduire et ordonner chacune des expressions suivantes :

$A(x) = (x-1)(-x+2)+(2x+1)^2$ ;
$B(x) = (x-3)^2-4x(x-1)$ ;
$C(x) = (2x+5)^2-(5x+2)(5x-2)-(1-x)(3+x)$.

**17** Réduire au même dénominateur et développer le numérateur :

$A(x) = \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{2x-3}{4} + x - 1$ ;

$B(x) = x(x-3) - \dfrac{x^2-x+2}{3} - 3(2x)$.

**18** Développer :

$A(x) = (3x-1)^2$ ; $B(x) = (x+2)^2$ ;
$C(x) = (4x+7)^2$ ; $D(x) = (5-x)^2$ ;
$E(x) = \left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2 + \left(\dfrac{3x}{2}-1\right)^2$.

**19** Développer :

$A(x) = (2x-3)(-x-2)+(2x+3)^2$ ;
$B(x) = -4x(x+1)-(x+2)^2$ ;
$C(x) = \dfrac{3}{2}x + 4(x-1)^2 - \left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2$.

**20** Reconnaître les développements de carré.
Dire si les expressions suivantes sont le développement d'un carré.
Si oui, donner la factorisation.

a) $x^2-4x+4$ ; b) $25x^2+10x-1$ ;
c) $4-18x+9x^2$ ; d) $x^2-2x+1$ ;
e) $x^2+4$ ; f) $-4x^2+12x+9$ ;
g) $\dfrac{x^2}{4}-3x+9$ ; h) $6x+9+x^2$.

### Différence de deux carrés

• $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ : « le premier + le 2$^e$, **facteur de**, le premier – le 2$^e$ ».
• Si on a une expression à **deux** termes, avec **un seul signe moins** et deux carrés, alors :

$\underbrace{4x^2}_{\text{carré de } 2x} - \underbrace{9}_{\text{carré de } 3} = (2x+3)(2x-3)$ ; $\quad -x^2 + 16 = \underbrace{16}_{4^2} - \underbrace{x^2}_{x^2} = (4+x)(4-x)$.

*Exemples* :

• $(x-3)^2 - (2x-1)^2 = (x-3+2x-1)(x-3-2x+1) = (3x-4)(-x-2)$.
Ici $A = x-3$ et $B = 2x-1$.

• $4(x-1)^2 - 5 = (2x-2+\sqrt{5})(2x-2-\sqrt{5})$. Ici $A = 2(x-1) = 2x-2$ et $B = \sqrt{5}$.

## D. Des questions à se poser pour factoriser

Une expression est factorisée lorsqu'elle est constituée d'**un produit** de facteurs (sans addition ni soustraction à l'extérieur des parenthèses).
Lorsque l'on a une expression à factoriser, il faut se poser les questions suivantes :

**L'expression est-elle déjà factorisée ?**

Si oui, vérifier que, même entre parenthèses, c'est factorisé.

*Exemple* : $A(x) = (5x-1)(x^2-4) = (5x-1)(x+2)(x-2)$.

**Dans tous les termes de la somme à factoriser, a-t-on le même facteur commun ?**

Si oui, souligner ce facteur commun, puis le mettre en facteur, et écrire **entre crochets** ce qui n'est pas souligné, sans changer les termes de place, en mettant les +, et les – et les parenthèses nécessaires.

Penser que : $\ldots + x - 4$, c'est aussi $\ldots + 1(x-4)$, ou encore $\ldots - 1(-x+4)$.

*Exemple* : $C(x) = (2x-1)\underline{(x-4)} + \underline{(x-4)}^2 - 2\underline{(x-4)}(x+3) + \underline{x-4}$
$= (x-4)\,[2x-1+x-4-2(x+3)+1] = (x-4)(2x-1+x-4-2x-6+1)$
$= (x-4)(x-10)$.

**Reconnaît-on une différence de deux carrés ?**

Si oui, la factoriser (▶ technique de base 2 C, p. 298).
*Exemple* : $B(x) = (5x-2)^2 - 4(x-3)^2 = (5x-2+2(x+3))(5x-2-2(x-3)) = (7x-8)(3x+4)$.

**Peut-on faire apparaître dans tous les termes le même facteur commun ?**

Si oui, faire une factorisation partielle et mettre le facteur commun en facteur.

Si un seul terme ne présente pas le facteur commun, on ne peut pas factoriser.

*Exemple* : $D(x) = x^2 - 9 - 3(x-3)(x+2) = (x+3)\underline{(x-3)} - 3\underline{(x-3)}(x+2)$
$= (x-3)[x+3-3(x+2)] = (x-3)(x+3-3x-6) = (x-3)(-2x-3)$.

**Si la réponse à chaque question précédente est non**

Alors, on **développe** et on réduit ; le polynôme obtenu est peut-être facilement factorisable (▶ technique de base 2 C, p. 298).

*Exemple* : $E(x) = (4x-1)^2 - (x+1)(4x+1) = 16x^2 - 8x + 1 - (4x^2 + x + 4x + 1)$
$= 16x^2 - 8x + 1 - 4x^2 - x - 4x - 1 = 12x^2 - 13x = x(12x-13)$.

Une expression de la forme $ax^2 + bx$ se factorise par $x$ : $ax^2 + bx = x(ax+b)$.

⚠ **Attention !** Une somme de deux carrés $A^2 + B^2$ ne se factorise pas.
*Exemples* : $F(x) = x^2 + 4$ ; $G(x) = 1 + (-x-3)^2$ ; $H(x) = (x+2)^2 + (5-2x)^2$.

## E. Règles pour écrire des égalités

### Calculs et transformations d'écritures

Lorsque l'on transforme une expression donnée en effectuant des calculs, en utilisant un développement, une factorisation..., on peut écrire une suite de « = » entre deux écritures.

*Exemple* :
$E(x) = (3x-2)(2-x) + (x-2)^2 = 6x - 3x^2 - 4 + 2x + x^2 - 4x + 4 = -2x^2 + 4x = x(-2x+4)$.

Dans une formule, on peut remplacer une variable par un nombre ou une expression donnée : c'est le **principe de substitution**. On peut alors effectuer les calculs sur une ligne.

*Exemple* : Soit $-x^2 + 2x - 3$ ; sachant que $x = 1 + h$, alors :
$-x^2 + 2x - 3 = -(1+h)^2 + 2(1+h) - 3 = -1 - 2h - h^2 + 2 + 2h - 3 = -h^2 - 2$.

**21** Reconnaître les différences de deux carrés et donner la factorisation.

a) $25x^2 - 4$ ; b) $-x^2 - 4$ ; c) $x^2 - 121$ ;
d) $-4x^2 + 9$ ; e) $49 - 36x^2$ ; f) $4x^2 - 1$ ;
g) $3 - x^2$ ; h) $7x^2 - 100$ ; i) $10 - 9x^2$.

**22** Si l'expression est une différence de deux carrés, la factoriser, sinon, la laiser telle quelle.

a) $(x+1)^2 + 4$ ; b) $(5x-7)^2 - (x+4)^2$ ;
c) $4(x-3)^2 - 9$ ; d) $-(3x-1)^2 + 25$ ;
e) $9(x+1)^2 + 25$ ; f) $-(x-3)^2 + 4(x+1)^2$.

**23** Factoriser les expressions suivantes :

$f(x) = (2x+1)(2x+3) - (2x+1)(x-3)$ ;
$g(x) = (2x-5)(x+6) - 2x - 12$ ;
$h(x) = (3x+8)(49-4x^2)$ ;
$i(x) = (x-2)(x+3) + x^2 - 4x + 4$ ;
$j(x) = 3 - x + (3-x)^2$ ;
$k(x) = (x-5)(2x+3) + (4x-5)(5-x)$ ;
$l(x) = 4x^2 - 1 - (3x+5)(2x-1)$.

**24** Factoriser. (Essayer de faire apparaître des facteurs communs, sinon développer.)

a) $(x-1)(2x-3) - (1-x)^2 + x - 1$ ;
b) $(2x+3)(x-1) + (x+1)(4-5x)$ ;
c) $(x-3)(x+2) - (x+2)^2 + 2x^2 + 4x$ ;
d) $(x+3)(x+1) - (x-3)(x-1)$ ;
e) $2\,(4x-5)^2 - 5x\,(5-4x)$ ;
f) $(6x-3)(x+1) - (2x-1)(x+1) + (1-2x)^2$.

**25** Développer :

a) $(2x-1)^2 + (x+3)(3-2x) - 3x\,(x+2)$ ;

b) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-1\right)\left(2-\frac{4}{3}\right)$ ;

c) $6\left(5-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)$.

**26** 1° Soit l'expression $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

a) Calculer $f(x)$ pour $x = 1$, puis pour $x = -3$.
b) Remplacer $x$ par $2 - h$.
c) Remplacer $x$ par $1 - \sqrt{2}$.

2° Mêmes questions pour l'expression :
$g(x) = -x^2 + x - 4$.

**Règles sur les égalités**

Une égalité est composée de deux membres : **1[er] membre = 2[nd] membre.**

Toute opération effectuée sur un des membres doit s'effectuer sur l'autre membre pour obtenir une égalité équivalente :

- on peut **ajouter ou retrancher** le même nombre à chaque membre.

*Exemple* : $2x+5=-x+3$ en ajoutant $x$ équivaut à $2x+5+x=-x+3+x$

et $3x+5=3$ en retranchant 5 équivaut à $3x+5-5=3-5$, c'est-à-dire $3x=-2$.

- on peut **multiplier ou diviser** chaque membre par le même nombre non nul.

*Exemple* : $3x=-2$ en divisant par 3 équivaut à $\frac{3x}{3}=\frac{-2}{3}$, c'est-à-dire $x=-\frac{2}{3}$.

- on peut **prendre l'opposé** de chaque membre, ce qui revient à multiplier par $-1$.

*Exemple* : $-5x-2=x$ en prenant l'opposé équivaut à $5x+2=-x$ : on **change tous les signes**.

- on peut ajouter ou retrancher **membre à membre** deux égalités, mais on perd des informations, donc il n'y a plus d'équivalence.

*Exemple* : si $3x+2y=5$ et $5x-2y=1$, alors $3x+2y+5x-2y=5+1$, soit $8x=6$.

# F. Règles sur les inégalités

**Inégalités équivalentes**

Toute opération effectuée sur un des membres d'une inégalité doit s'effectuer sur l'autre membre pour obtenir une inégalité équivalente :

- on peut **ajouter ou retrancher** le même nombre à chaque membre d'une inégalité, l'inégalité garde le même sens ;
- on peut **multiplier ou diviser** chaque membre par le même **nombre strictement positif**, l'inégalité ne change pas de sens ;
- on peut **multiplier ou diviser** chaque membre, par le même **nombre strictement négatif**, mais l'inégalité **change de sens.**

| | | |
|---|---|---|
| *Exemple* : | $3x-4<5x+1$ | on ajoute 4 et on retranche $5x$, le sens ne change pas |
| équivaut à | $3x-5x<1+4$ | on réduit chaque membre |
| c'est-à-dire | $-2x<5$ | $x$ est multiplié par $-2$, on divise par $-2$, mais l'inégalité change de sens |
| équivaut à | $x>-\frac{5}{2}$ | |

**Remarque** : lorsque l'on prend l'**opposé** d'une inégalité, on **change tous les signes** :
$-x<3$ équivaut à $x>-3$ ; $-4x-1\geqslant 0$ équivaut à $4x+1\leqslant 0$

**Règles des signes**

- La **somme** de deux nombres positifs est positive, la somme de deux nombres négatifs est négative.

*Exemples* : $(x+3)^2+4$ est une somme de deux nombres positifs, donc elle est positive.
$x^2$ est positif, donc $-x^2$ est négatif ; ainsi $-x^2-9$ est une somme de deux nombres négatifs, donc elle est négative.

- Le **produit** de deux nombres positifs est positif, le produit de deux nombres négatifs est positif, mais le produit de deux nombres de signes contraires est négatif :

$$(-A)\times(-B)=A\times B\ ;\ -(A\times B)=(-A)\times B=A\times(-B).$$

De même pour le quotient : $\frac{-N}{-D}=\frac{N}{D}$ ; $-\frac{N}{D}=\frac{-(N)}{D}=\frac{N}{-(D)}$.

*Exemples* : Si $x\geqslant 0$, c'est-à-dire $x$ positif (ou nul), alors $-3x$ est négatif ;
si $x\leqslant 0$, alors $-5x$ est positif.

**27** a) Soit l'égalité $3x+2=-4x-5$.
Appliquer successivement :
ajouter $4x$, retrancher 2, diviser par 7.

b) Soit l'égalité $\frac{x-3}{2}=x+2$.
Appliquer successivement :
multiplier par 2, retrancher $2x$, ajouter 3, prendre l'opposé.

**28** a) Soit les égalités $5x+4y=2$ et $3x-y=1$.
Multiplier la seconde par 4, puis ajouter membre à membre les égalités obtenues.

b) Soit les égalités $\frac{3-x}{5}-2y=1$ et $6y-2x=4$.
Multiplier la première par 5 et diviser la seconde par 2, puis retrancher membre à membre les égalités obtenues.

**29** a) Soit l'inégalité $3x-4<x+3$.
Appliquer successivement :
enlever $x$, ajouter 4, diviser par 2.
b) Soit l'inégalité $x-3>9+5x$.
Retrancher $5x$, ajouter 3, diviser par $-4$.
c) Soit l'inégalité $2(x+3)-1>4x+5$.
Réduire le premier membre, retrancher $4x$, retrancher 5, diviser par $-2$.

**30** a) Soit l'inégalité $\frac{x+2}{3}\leqslant x-\frac{1}{2}$.
Appliquer successivement :
multiplier par 6, retrancher $6x$, retrancher 4, prendre l'opposé, diviser par 4.
b) Soit l'inégalité $-\frac{4}{3}x+2>0$.
Retrancher 2, puis multiplier par $-\frac{3}{4}$.

**31** Sachant que $x$ est négatif, donner le signe de :
a) $3x$ ; b) $-5x$ ; c) $-(x)^2$ ; d) $-x^2-4$ ; e) $x^2+1$.

**32** Sachant que $x>4$, donner le signe de :
a) $x-4$ ; b) $-2x+8$ ; c) $-3x(x-4)$.

**33** Écrire sans signe – au dénominateur :
a) $\frac{3x-2}{-3}$ ; b) $\frac{x-1}{-x-3}$ ;
c) $\frac{2x-1}{-2x}-\frac{x+1}{-2}$.