Index

104 page 43

1) Le rayon maximal r que l'on peut choisir est r_{max} = 10 cm

2) a) Le volume d'eau contenu dans le récipient lors de la première expérience est : $\mathcal{V}_1 = \pi\times10^2\times10 - \frac{4}{3}\pi\times5^3$

Remarquer : $10^2\times10 = 2^2\times5^2\times2\times5 = 2^3\times 5^3$

En factorisant $\frac{4}{3}\pi\times5^3$, on a : $\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi\times5^3(6-1) = \frac{4}{3}\pi\times5^4$ (cm^3) $\qquad \mathcal{V}_1 = \frac{2500}{3}\pi$

b) Lors de la seconde expérience, le volume d'eau est : $\mathcal{V}(r) = \pi\times10^2\times2r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r(150 - r^2)$

3 a) Les volumes étant égaux , on a l'égalité : $\frac{2500}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r(150 - r^2)$

On divise par 4π, on multiplie par 3 les deux membres de l'égalité.

D'où l'équation : $625 = r(150 - r^2)$, soit : $r^3 - 150r + 625 = 0$
(Il est évident que 5 est une solution de cette équation d'après le problème donné.
C'est ce qui justifie la factorisation de $r - 5$.)

b) **Méthode :**
Par identification des coefficients :

$(r-5)(ar^2 + br + c) = ar^3 + br^2 + cr - 5ar^2 - 5br - 5c$
$= ar^3 + (b-5a)r^2 + (c-5b)r - 5c$

Cette expression doit être égale pour tout r à $r^3 - 150r + 625$

$$\begin{cases} \text{Coefficient de degré 3 :} & a=1 \\ \text{Coefficient de degré 2 :} & b-5a=0 \\ \text{coefficient de degré 1 :} & c-5b=-150 \\ \text{coefficient de degré nul:} & -5c=625 \end{cases} \text{, on trouve : } \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-125 \end{cases}$$

l'équation $r^3 - 150r + 625 = 0$ est équivalente à l'équation : $(r-5)(r^2 + 5r - 125) = 0$
Le produit est nul si et seulement si $r - 5 = 0$ ou $r^2 + 5r - 125 = 0$

Résolution de $r^2 + 5r - 125 = 0$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4\times1*(-125) = 25\times(1 + 20) = 25\times21$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-5\sqrt{21}}{2\times1}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+5\sqrt{21}}{2\times1} = \frac{5\sqrt{21}-5}{2}$.

c) Conclusion : Puisque $0 < r \leqslant 10$ et $r \neq 5$, la seule solution acceptable est $\frac{5\sqrt{21}-5}{2}$ cm.

---

51 page 65

OABC est un carré de côté 2 cm.

À tout réel x strictement positif, on associe le point M de $[OA)$ n'appartenant pas à $[OA]$, tel que $AM = x$.
La droite (MB) coupe (OC) en P . On pose $f(x) = OP$
1) On cherche OP en fonction de AM.
Avec la propriété de Thalès :
On sait que $A \in [OM]$, d'où, $OA + AM = OM$ $OM = 2 + x$
Comme $(AB) \parallel (OP)$, le théorème de Thalès appliqué aux triangles MOP et MAB donne :
$\frac{OP}{AB} = \frac{OM}{AM}$, d'où, OP = $\frac{AB\times(OA+AM)}{AM} = \frac{2\times(2+x)}{x} = \frac{4+2x}{x} = \frac{4}{x} + 2$

Avec la trigonométrie (du collège) :
En remarquant que $\widehat{OMP} = \widehat{AMB}$, dans les triangles rectangles MOP et MAB, on a :
$\tan \widehat{OMP} = \frac{OP}{OM}$ et $\tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM}$, d'où, $OP = \frac{OM \times AB}{AM}$ = ... = $2 + \frac{4}{x}$.
2) Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et que $4 > 0$, on a successivement :
Une méthode :
Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
En multipliant par 4, puis en ajoutant 2 , on obtient :
Si $0 < a < b$ alors $\frac{4}{a} + 2 > \frac{4}{b} + 2$, soit : $f(a) > f(b)$
la fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Une autre méthode :
Soit $0 < a < b$
$f(b) - f(a) = (\frac{4}{b} + 2) - (\frac{4}{a} + 2) = \frac{4}{b} - \frac{4}{a} = \frac{4(a-b)}{ab}$
Comme $a < b$, $a - b < 0$
Comme $a > 0$ et $b > 0$ alors $ab > 0$.
Le quotient $\frac{4(a-b)}{ab}$ est strictement négatif.
$f(b) - f(a) < 0$
On a montré :
Si $0 < a < b$ alors $f(a) > f(b)$
la fonction f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

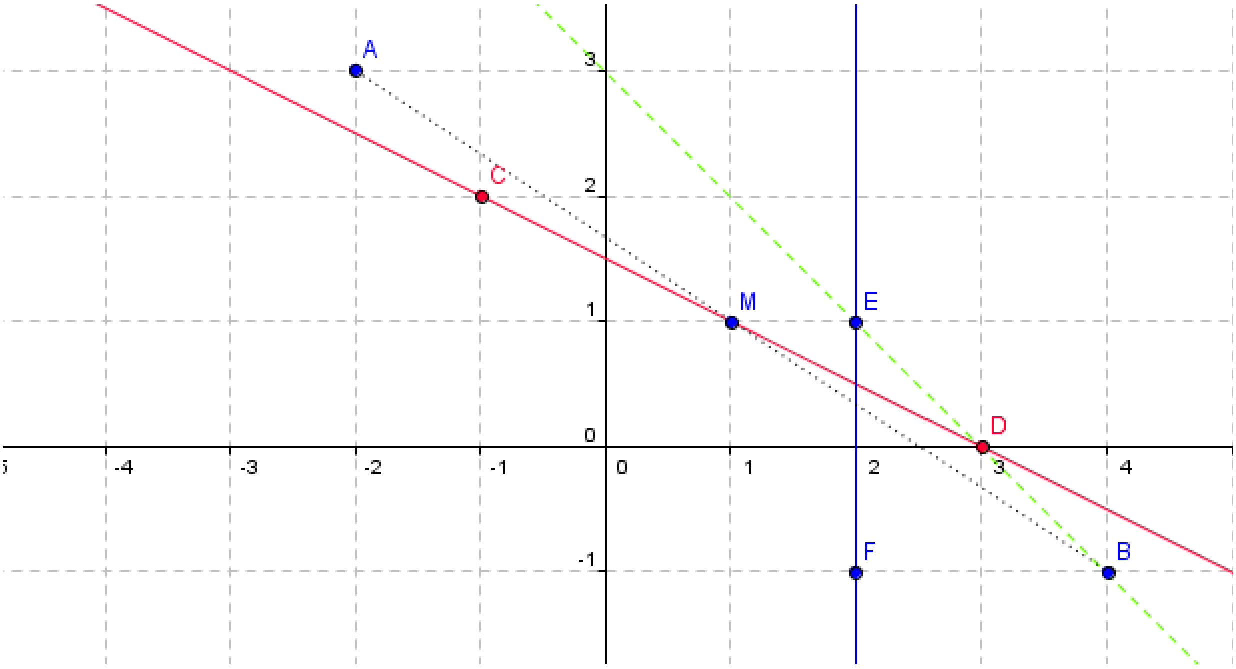
Remarque : la fonction f de l'énoncé n'existe pas sur $]-\infty ; 0[$

---

1 page 257
1) $A(-2 ; 3)$ $B(4 ; -1)$
$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -1-3 \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.
M est le milieu de $[AB]$: $\begin{cases} x_M = \frac{-2+4}{2} \\ y_M = \frac{3-1}{2} \end{cases}$, $M(1 ; 1)$

2) a) Lecture graphique : $C(-1;2)$, $D(3\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{CD}\ \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

$E(2\ ;\ 1)$, $F(2\ ;-1)$, $\overrightarrow{EF}\ \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.



b) coefficient directeur de (CD) : $-\dfrac{1}{2}$

coefficient directeur de (EF) : n'existe pas.

c) équation réduite de (CD) : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

équation réduite de (EF) $x=2$

d) $M(1\ ;\ 1)$ appartient à (CD) car ses coordonnées sont solutions de l'équation : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

En effet : $1=-\dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{3}{2}$.

e) Soit $B(4\ ;-1)$.

$\overrightarrow{BD}\ \begin{pmatrix}3-4\\0-(-1)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE}\ \begin{pmatrix}2-4\\1-(-1)\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{BD}\ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\ \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BE}=2\ \overrightarrow{BD}$, les vecteurs sont colinéaires, d'où, les points B, D, E sont alignés .