Index

101 page 42

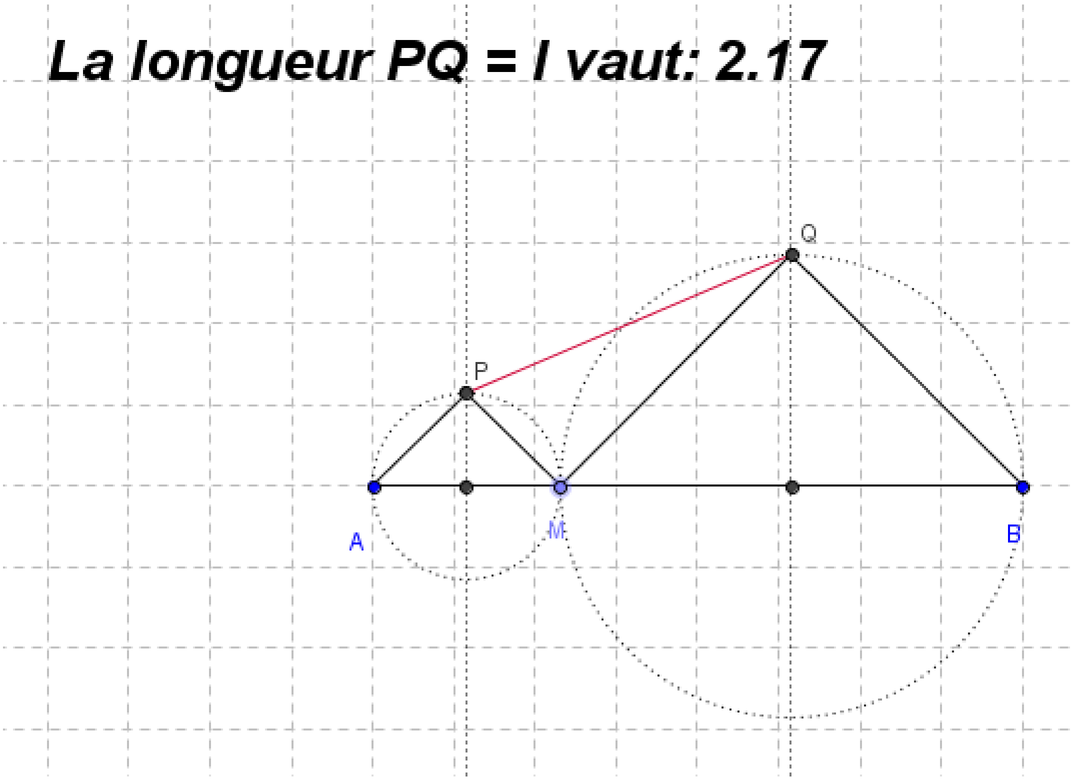
1- Figure

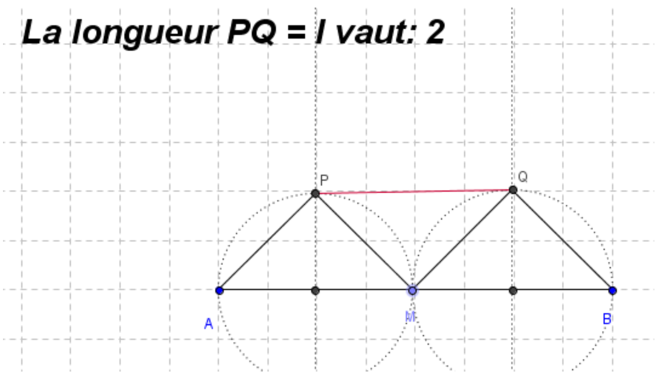
Retenir :

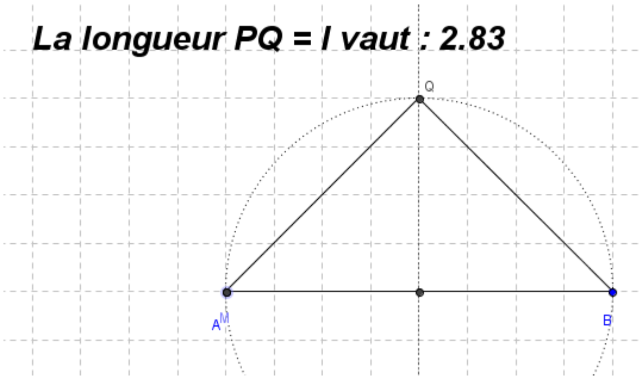
Une méthode pour construire un triangle rectangle est de construire un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse.

Puisque les triangles sont isocèles, les points P et Q sont à l'intersection des médiatrices des diamètres $[AM]$ et $[BM]$ et des demi-cercles respectifs.

Voir : http://dossierslmm.chez-alice.fr/1S/DM6_101page42.html







Conjecture:

Le minimum est 2

le maximum est : 2,83 (valeur approchée)

La longueur semble comprise entre 2 et 2,83 (valeurs approchées)

2- a) A, M, B sont alignés dans cet ordre, d'où $\widehat{AMB} = 180°$

AMP et MQB triangles isocèles et rectangle en P et en Q, d'où, $\widehat{AMB} = \widehat{BMQ} = 45°$

On a alors: $\widehat{PMQ} = 180° - 2 \times 45° = 90°$

b) On cherche : PQ^2 , et, on a un triangle rectangle, d'où, la propriété de Pythagore

Dans ce triangle PQM rectangle en M, on obtient:

$PQ^2 = PM^2 + MQ^2$

On cherche PM^2 et MQ^2 .... et on a des triangles rectangles , d'où, ...

Dans les triangles APM et BQM rectangles et isocèles en P et en Q

On a : $PM = PA$ et $MQ = QB$, et,

$AM^2 = PM^2 + PA^2 = 2PM^2$ et $MB^2 = MQ^2 + QB^2 = 2MQ^2$

$PM^2 = \frac{1}{2} AM^2$ et $MQ^2 = \frac{1}{2} MB^2$

Comme $AM = x$ et $BM = 4 - x$, il vient :

$PQ^2 = \frac{1}{2} AM^2 + \frac{1}{2} BM^2 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (4 - x)^2 = x^2 - 4x + 8$

Remarque : On peut aussi utiliser la trigonométrie :

Sachant que $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a : " côté adjacent " $\cos 45° \times$ hypoténuse

ou " côté opposé " = $\sin 45° \times$ hypoténuse

D'où, $PM = \frac{\sqrt{2}}{2} x$ et $MQ = \frac{\sqrt{2}}{2} (4 - x)$

3- La fonction $x \mapsto PQ^2$ définie sur [0; 4] est une fonction du second degré.

Le coefficient de x^2 étant positif, elle admet un minimum en $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$ qui vaut: $2^2 - 4 \times 2 + 8 = 4$

x	0		2		4
$f(x)$	8	↘	4	↗	8

b) Le maximum de la fonction est 8 atteint en 0 et en 4.

On obtient: $4 \leqslant PQ^2 \leqslant 8$, puis, $2 \leqslant PQ \leqslant 2\sqrt{2}$, car, la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

c) Donnée : $l \notin [2 ; 2\sqrt{2}]$, c'est-à-dire $0 \leqslant l < 2$ ou $l > 2\sqrt{2}$

Si $0 \leqslant l < 2$ alors $0 \leqslant l^2 < 4$,

et,

si $l > 2\sqrt{2}$ alors $l^2 > 8$

Ce qui est impossible dans les deux cas d'après l'étude précédente puisque $PQ = l$.

4) a) I est le point d'intersection

de la demi-droite $[AP)$ qui est définie par le point fixe A et l'angle constant $\widehat{MAP} = 45°$ et

de la demi-droite $[BQ)$ qui est définie par le point fixe B et l'angle constant $\widehat{MBQ} = 45°$.
Ces deux demi-droites sont indépendantes du point M.

D'autre part, AIB est un triangle rectangle isocèle en I.

b) Comme $PIQM$ est un rectangle (quatre angles droits) , les diagonales sont de même longueur,
d'où, $IM = PQ = l$.

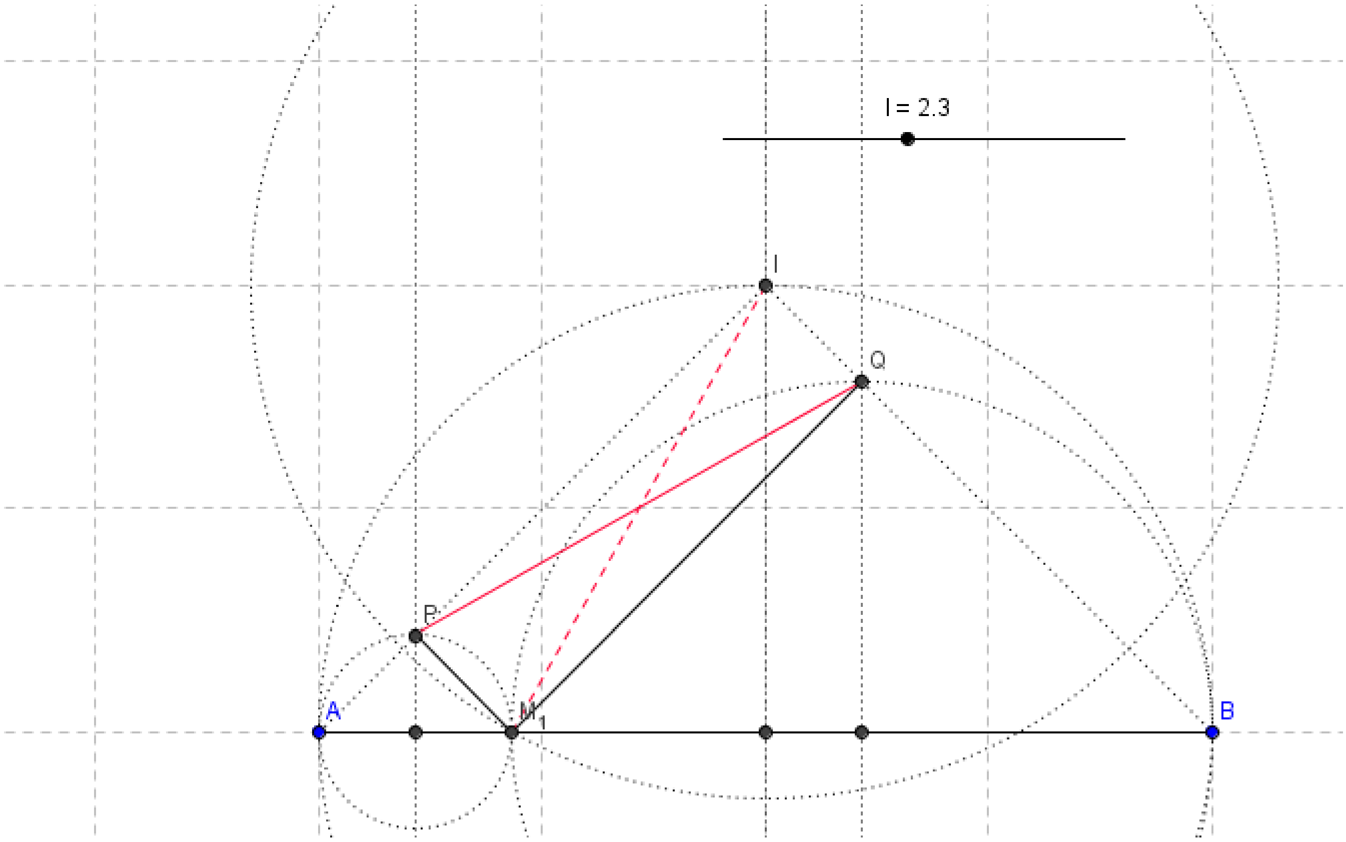
5) a) On construit le triangle isocèle et rectangle en I en construisant le demi-cercle de diamètre $[AB]$
Le point I est le point d'intersection du demi-cercle et de la médiatrice de $[AB]$.

On trace un cercle de centre I et de rayon l. Ce cercle coupe la droite (AB) en deux points M_1 et M_2 .

b) *Construction avec l = 3 (première édition)*

Cette construction est impossible puisque $3 > 2\sqrt{2}$

Construction avec $l = 2{,}3$



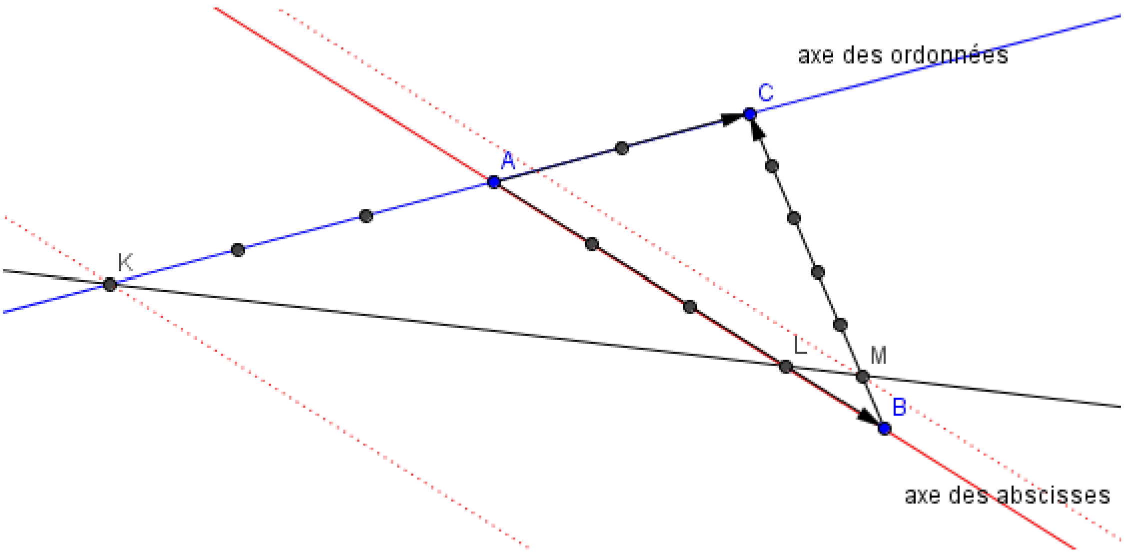
Le point M est l'un des points obtenus en construisant l'arc de centre I et de rayon 2,3.

Voir : http://dossierslmm.chez-alice.fr/1S/DM6_101page42_5.html

---

56 page 278

ABC est un triangle, K, L, M sont définis par : $\overrightarrow{AK} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.



1) Première méthode : Géométrie analytique (c'est-à-dire : dans un repère)

Soit le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

a) On a donc : $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 1)$

$\overrightarrow{AK} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}$, donc : $K(0\ ;\ \frac{-3}{2})$

$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $L(\frac{3}{4}\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$, d'où : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$, soit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

$M(\frac{5}{6}\ ;\ \frac{1}{6})$

Autre méthode : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$, $M(x\ ;\ y)$, d'où : $\begin{pmatrix}x-1\\ y\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0-1\\ 1-0\end{pmatrix}$, soit : $\begin{cases}x-1=\frac{-1}{6}\\ y=\frac{1}{6}\end{cases}$. $M(\frac{5}{6}\ ;\ \frac{1}{6})$

b) On obtient : $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{1}{6}+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}\frac{5}{6}\\ \frac{10}{6}\end{pmatrix}$.

Comme : $\frac{3}{4}\times\frac{10}{6} = \frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{4}$, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires, donc, les points K, L, M sont alignés.

Ou encore : comme $\frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}\times\frac{4}{3} = \frac{10}{9}$ *et* $\frac{10}{9}\times\frac{3}{2} = \frac{10}{6}$*, on a :* $\overrightarrow{KM} = \frac{10}{9}\overrightarrow{KL}$

2) Deuxième méthode : Géométrie vectorielle (sans utiliser un repère)

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\ &= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{10}{6}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On retrouve les calculs de la première partie.

Par exemple : Quel est le coefficient t tel que $\overrightarrow{KL} = t\ \overrightarrow{KM}$?

On cherche donc t tel que $\frac{5}{6}\times t = \frac{3}{4}$ **et** (en même temps) $\frac{10}{6}\times t = \frac{3}{2}$.

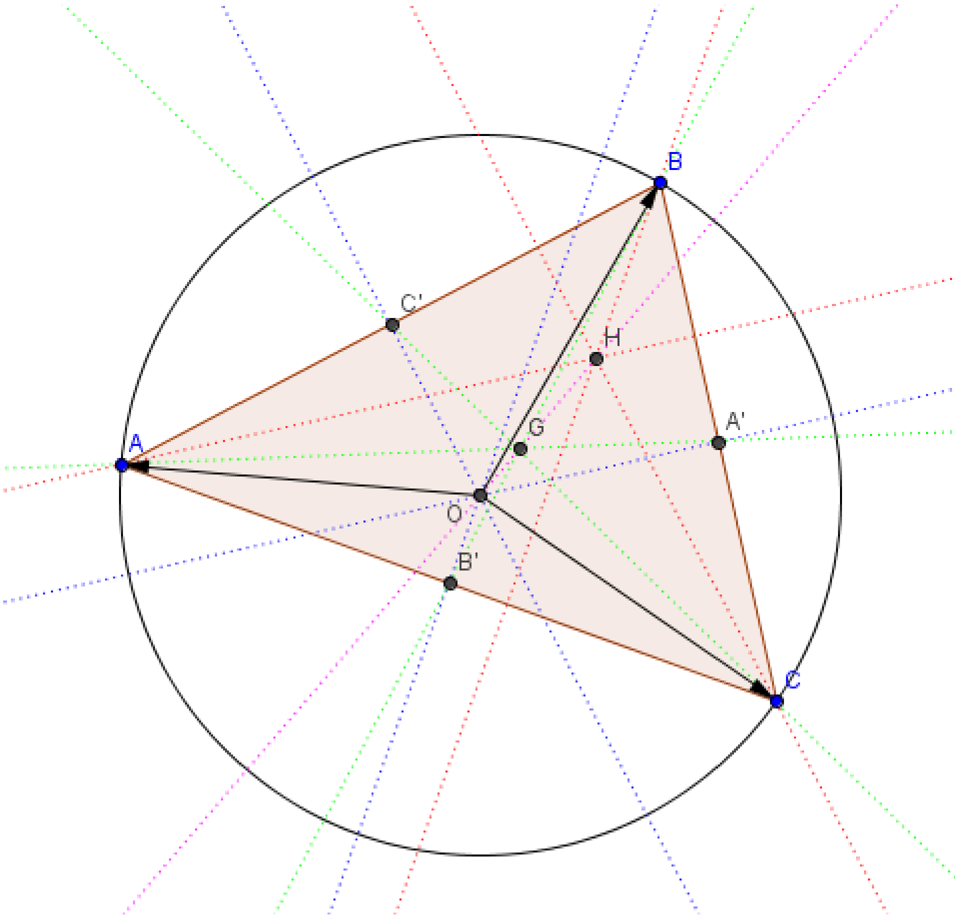
Puisque $\frac{3/4}{5/6} = \frac{3/2}{10/6} = \frac{9}{10}$, lr nombre t existe.

$\overrightarrow{KL} = \frac{9}{10}\overrightarrow{KM}$

---

93 page 283 Orthocentre et droite d'Euler

Figure



H est défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

En ajoutant $\overrightarrow{AO}$ aux deux membres de l'égalité, il vient :

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\ \overrightarrow{OA'}$, car, A' est le milieu de $[BC]$.

O étant le centre du cercle circonscrit et A' le milieu de $[BC]$, (OA') est la médiatrice de (BC).

$(AH) \parallel (OA')$ et $(OA') \perp (BC)$, d'où, $(AH) \perp (BC)$.

La droite issue de A et perpendiculaire au côté opposé (BC) est une hauteur du triangle ABC.

On a de même (permutation circulaire des points A, B, C)

$\overrightarrow{BH} = 2\ \overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{CH} = 2\ \overrightarrow{OC'}$

H est le point d'intersection des trois hauteurs de ABC.

H est l'orthocentre du triangle ABC.

2- G centre de gravité est le point de concours des médianes.

On sait : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

d'où $(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$.

On obtient : $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{OH} = 3\ \overrightarrow{OG}$.

Les points O, H, G sont alignés (droite d'Euler)

Animation GeoGebra
