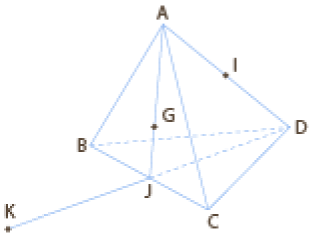
Index

62 page 278

62 ABCD est un tétraèdre. On note I le milieu de [AD] et J celui de [BC]. Le point G est le point de [AJ] tel que $AG = \frac{2}{3} AJ$.

On s'intéresse à la position relative de la droite (IG) et du plan (BCD).

On note K le symétrique de D par rapport à J.



1. Justifier que les points A, G, J, K, D, I sont coplanaires.

2. a. Faire une figure dans le plan (AJD) avec les éléments de la figure qu'il contient.

b. Dans le plan (AJD), décomposer les vecteurs $\vec{IG}$ et $\vec{IK}$ sur les vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AJ}$.

c. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

3. Déterminer la position relative dans l'espace de la droite (IG) et du plan (BCD).

1) **Remarques et méthodes :**

Commencer par " voir " quel sera le plan contenant tous les points nommés.

Désigner ce plan et montrer que tous les points sont dans ce plan.

Trois points sont toujours coplanaires …

C'est à partir de 4 points que la notion de coplanarité est utile.

Correction :

Les points A, J, D ne sont pas alignés par construction du tétraèdre.

On peut donc nommer le plan (AJD).

I milieu de [AD] donc I appartient à la droite (AD), par conséquent I appartient à tout plan contenant la droite (AD). En particulier : I appartient au plan (AJD).

De même, puisque $G \in [AJ]$, $G \in (AJD)$.

Comme K, J, D alignés, $K \in (AJD)$.

Les points A, J, D, I, G, K sont coplanaires.

2 a) b) Dans le plan (AJD), on a :

$\vec{IG} = \vec{IA} + \vec{AG}$ (Relation de Chasles)

Or, I milieu de [AD] donc $\vec{IA} = -\frac{1}{2} \vec{AD}$ (On a aussi : $\vec{ID} = \frac{1}{2} \vec{AD}$)

et $G \in [AJ]$ (Segment) et $AG = \frac{2}{3}AJ$, donc, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$

Conclusion : $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$.

K symétrique de *D* par rapport à *J*, d'où, $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DJ}$

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}\right) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AJ}$$

c) **Méthode** :

Quand deux vecteurs non colinéaires sont choisis et qu'on a exprimé d'autres vecteurs en décomposant en somme sur ces vecteurs, il suffit de chercher un coefficient de proportionnalité entre les coefficients déterminés.

Par exemple : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

On a montré : $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$

et $\vec{t} = c\,\vec{u} + d\,\vec{v}$

Il suffit maintenant de comparer les deux écritures …

Si $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = k$, on a alors : $\vec{v} = k\,\vec{u}$.

Application à $\overrightarrow{IG}$ ***et*** $\overrightarrow{IK}$.

$$\frac{-3/2}{-1/2} = \frac{2}{2/3} = 3$$

3. $\overrightarrow{IG} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Les points I, G, K sont donc alignés.

3) Le point *K* appartient au plan (*BCD*), le point K appartient à (IG) et la droite (IG) n'est pas incluse dans le plan (BCD) par construction.

La droite (*IG*) coupe le plan (*BCD*) en *K*.

64- 65 page 278

Énoncé de la propriété (P) : (***équivalence***)
Le point $M(x_M ; y_M) \in d$ si et seulement si $2x_M - 3y_M + 7 = 0$
Implication (P_1) :
Si le point $M(x_M ; y_M) \in d$ alors $2x_M - 3y_M + 7 = 0$
Implication (P_2) :
Si $2x_M - 3y_M + 7 = 0$ alors le point $M(x_M ; y_M) \in d$

(P_1) et (P_2) sont réciproques l'une de l'autre.
(Voir page 354 du livre)

Pour (P_1) : la condition suffisante est : le point $M(x_M\ ;\ y_M) \in d$
la condition nécessaire est : $2x_M - 3y_M + 7 = 0$

Pour (P_2) : la condition suffisante est : le point $2x_M - 3y_M + 7 = 0$
la condition nécessaire est : le point $M(x_M\ ;\ y_M) \in d$

Vocabulaire :
Il faut (condition nécessaire)
Il suffit (condition suffisante)

La contraposée de (P_2) s'énonce :
Si le point $M(x_M\ ;\ y_M) \notin d$ alors $2x_M - 3y_M + 7 \neq 0$

La contraposée de (P_1) s'énonce :
Si $2x_M - 3y_M + 7 \neq 0$ alors le point $M(x_M\ ;\ y_M) \notin d$

Le point $A(3\ ;\ -1)$.
On calcule : $2\times3 - 3\times(-1) + 7 = 16$
Comme $16 \neq 0$ alors $A \notin d$.
La propriété utilisée est la contraposée de (P_1).

Contraposée d'une implication :
Soit une implication énoncée sous la forme : Si (p) alors (q)
Sa contraposée est : Si (non q) alors (non p)
Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
(Ce qui n'est pas le cas d'une implication et de sa réciproque).

Exemple :

	Énoncé	**Vrai- Faux**
Implication : (I)	si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $f(2) < f(3)$	**VRAI**
Réciproque (R)	si $f(2) < f(3)$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	**Faux**
Contraposée de I	Si $f(2) \geqslant f(3)$ alors f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	**VRAI**
Contraposée de R	Si f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $f(2) \geqslant f(3)$	**Faux**

53 page 37

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5x + \frac{7}{2}$

$\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 - 3x$.

1) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{7}{2} > -x^2 - 3x$

Or, $x^2 + 5x + \frac{7}{2} > -x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{7}{2} + x^2 + 3x > 0$

On résout donc : $2x^2 + 8x + \frac{7}{2} > 0$

Calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 28 = 36 = 6^2$

Les racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = ... = -\frac{7}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{1}{2}$.

L'expression $2x^2 + 8x + \frac{7}{2}$ est donc du signe de 2, coefficient de x^2, pour $x \in \left]-\infty\,;-\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Conclusion : $f(x) > g(x)$ si et seulement si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

2) $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-\infty\,;-\frac{7}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives : $-\frac{7}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.