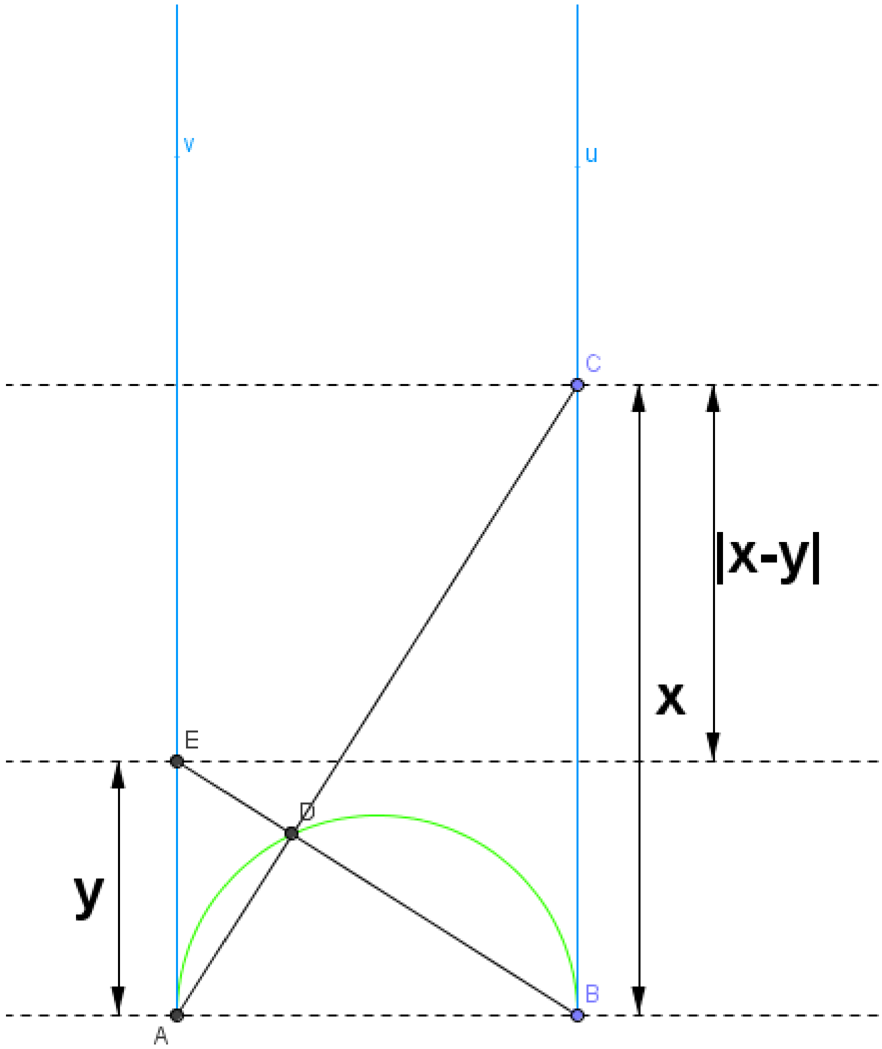
Index

52 page 65

1 a) b) Conjecture :



La fonction *f* associe, à la longueur *BC*, la longueur *AE*.

Il semble que *f* est décroissante.

Lorsque *BC* augmente, *AE* diminue

lorsque *BC* diminue, *AE* augmente.

BC et *AE* varient en sens contraire.

La fonction $f : BC \mapsto AE$ définie sur $]0 ; +\infty[$ est décroissante.

Comprendre l'énoncé : notion de fonction :

À une longueur x (allant de 0 à $+\infty$), on associe une longueur y.

Si $x = 0$, C est en B, et, il n'y a pas de point E (pas de droite (BD) coupant $[Av)$.

La fonction $f : x \mapsto y = f(x)$ est par conséquent définie sur $]0\,;+\infty[$

2) **Des rappels** :

- Un triangle est inscrit dans un cercle lorsque ses trois sommets sont sur le cercle.

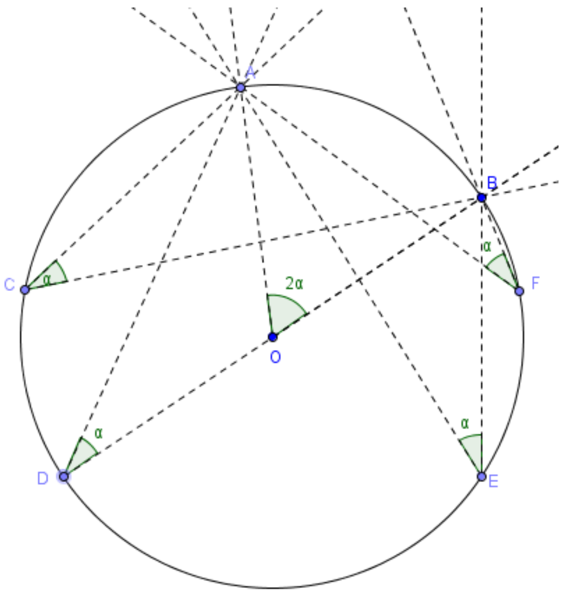
- Le cercle est circonscrit à ce triangle (" circum " signifie " autour de ")

Pour déterminer un triangle rectangle, deux conditions : $\begin{cases} \text{- être inscrit dans un cercle} \\ \text{- un côté du triangle est un diamètre} \end{cases}$.

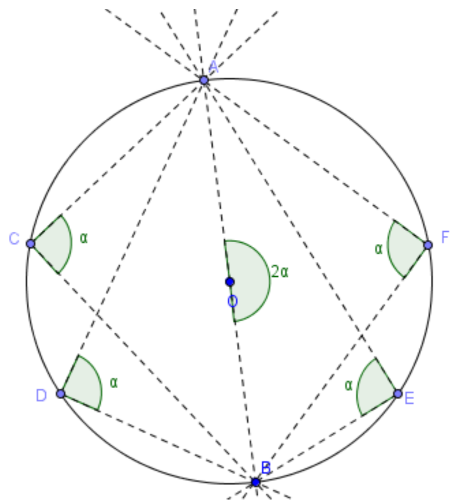
Ce n'est qu'après cela que l'on peut dire que ce côté est l'hypoténuse

- Une figure importante :

Les angles inscrits interceptant le même arc de cercle sont égaux et valent la moitié de l'angle au centre interceptant cet arc. (le cas de l'angle droit étant un cas particulier).



$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}\ .$$



a) b) Le triangle ABD est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$.

Ce triangle est donc un triangle rectangle en D.

On a donc : $AD^2 + BD^2 = AB^2$ (i)

Les triangles EDC, BDC, ADE sont aussi rectangles en D.

$CD^2 + DE^2 = CE^2$ (ii)

$AE^2 = AD^2 + DE^2$ (iii)

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ (iv)

Par somme membre-à-membre des égalités (i) et (ii), on a :

$AB^2 + CE^2 = AD^2 + DB^2 + CD^2 + DE^2$

En remplaçant dans le membre de droite, $AD^2 + DE^2$ par AE^2 (iii) et $BD^2 + DC^2$ par BC^2 (iv), on obtient :

$AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$ (v)

c) **Point méthode** :

au 2b), on a trouvé une égalité où apparaît CE (qui est une longueur dépendant de x).

Il faut donc trouver une autre égalité faisant intervenir CE de façon à substituer CE dans l'égalité du 2b/ pour avoir y en fonction de x.

Les calculs :

$AE^2 = y^2$

$BC^2 = x^2$

Or, $[CE]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés perpendiculaires de longueurs : $|y-x|$ et 4

$CE^2 = |y-x|^2 + 4^2$, d'où, $CE^2 = (y-x)^2 + 4^2 = y^2 - 2xy + x^2 + 16$

Comme $AB^2 = 4^2 = 16$, on obtient d'après l'égalité (v) :

$16 + y^2 - 2xy + x^2 + 16 = y^2 + x^2$ qui équivaut à $2xy = 32$

Comme $x > 0$, on a : $y = \dfrac{16}{x}$

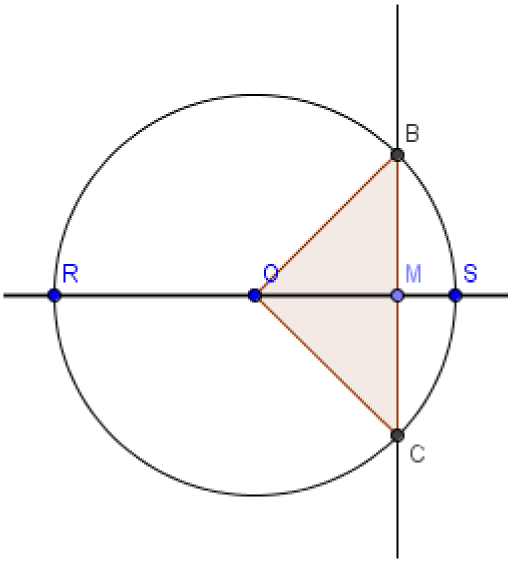
3) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{16}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$ est décroissante.

En effet, $f(x) = 16 \times \dfrac{1}{x}$ et comme $16 > 0$, les variations de f et la fonction inverse sont identiques.

106 page 71 .

1) La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [0 ; 2]$ ($M \in [OS]$ et $OS = 2$ et $OM = x$)

(On peut considérer que lorsque $M = O$ ou que $M = S$, les triangles OBC sont réduits à un segment et que l'aire est nulle).



2) (Le maximum de la fonction f est la valeur maximale de l'aire de OBC.)

Le maximum m de f semble être égal à 2 lorsque le triangle OBC est un triangle rectangle isocèle en O.

3) L'aire $f(x)$ de OBC est : $f(x) = \dfrac{OM \times BC}{2} = OM \times BM$.

Or, $BM^2 = OB^2 - OM^2 = 4 - x^2$

Conclusion : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

4a) $f(x) - 2 = x\sqrt{4-x^2} - 2$ Or, $x \geqslant 0$, d'où, $x = \sqrt{x^2}$.

Comme pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, on obtient :

$f(x) - 2 = x\sqrt{4-x^2} - 2 = \sqrt{x^2(4-x)} - 2 = \sqrt{4x^2 - x^4} - 2$

b) $\sqrt{4x^2-x^4} - 2 = \dfrac{(\sqrt{4x^2-x^4}-2)(\sqrt{4x^2-x^4}+2)}{\sqrt{4x^2-x^4}+2} = \dfrac{4x^2-x^4-4}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}$

Le dénominateur est strictement positif (somme d'un nombre positif et de 2)

Étude du signe de $-x^4 + 4x^2 - 4$
En posant $t = x^2$, on ramène l'étude à : $-t^2 + 4t - 4 = -(t^2 - 4t + 4) = -(t-2)^2$

On a donc : $-x^4 + 4x^2 - 4 = -(x^2-2)^2$; soit : $f(x) - 2 = \dfrac{4x^2-x^4-4}{\sqrt{4x^2-x^4}+2} = \dfrac{-(x^2-2)^2}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}$

L'expression $(x^2-2)^2$ est positive ou nulle. (C'est un carré)
Son opposé est par conséquent négative ou nulle.

Conclusion : Pour tout x de I, $f(x) - 2 \leqslant 0$ et $f(x) = 2$ lorsque $x^2 = 2$.
Comme $0 \leqslant x \leqslant 2$, $f(x) = 2$ lorsque $x = \sqrt{2}$

c) Puisque $f(x) \leqslant 2$ et que $f(\sqrt{2}) = 2$, l'aire maximale vaut 2.
En ce cas, le point M est tel que $OM = \sqrt{2}$.
Comme $OB^2 = 4$, $OC^2 = 4$ et $BC^2 = 4$ $BM^2 = 4(4 - 2) = 8$,
le triangle OBM est rectangle (réciproque du théorème de Pythagore) et isocèle en O.

Complément :
Si m n'est pas connu, on peut chercher pour quelle valeur de m, on a :

pour $x \in [0 ; 2]$, $f(x) - m \leqslant 0$.

m est nécessairement un réel positif (aire)

$$f(x) - m = x\sqrt{4-x^2} - m = \sqrt{4x^2-x^4} - m = \frac{(\sqrt{4x^2-x^4}-m)(\sqrt{4x^2-x^4}+m)}{\sqrt{4x^2-x^4}+m} = \frac{4x^2-x^4-m^2}{\sqrt{4x^2-x^4}+m}$$

En posant : $t = x^2$, on est amené à chercher la forme canonique de $-t^2 + 4t - m^2$, soit : $-(t - 2)^2 + m^2 - 4$

Lorsque $m^2 - 4 = 0$ et $m \geqslant 0$, on est assuré d'avoir un réel négatif ou nul. $m = 2$

---

34 page 276

Rappels :

- Une droite est un ensemble de points alignés …. (c'est beau!!!)

ce qui avec les vecteurs se traduit par :

La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

mais, comment caractériser cet ensemble dans un repère du plan ?

Il s'agit donc de trouver une relation traduisant cet alignement entre les coordonnées des points de la droite ?

Ce que vous connaissez :

la configuration de Thalès … qui indique une proportionnalité des longueurs

(Un petit inconvénient : il faut déjà connaître la position relative des points pour traiter les longueurs).

en passant aux vecteurs, cet inconvénient disparaît (l'ordre des points est connu grâce au signe du coefficient de colinéarité).

La rédaction :

Soit Δ la droite passant par $A(x_A ; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$).

Pour tout point $M(x ; y)$ de Δ, on a : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$, d'où, la relation : $a(y-y_A)=b(x-x_A)$.

Des remarques : 1) Si la droite Δ est définie par deux points A et B, on prend $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

2) Si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, on peut chercher le coefficient directeur m et l'ordonnée p à l'origine de l'équation réduite. $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B-y_A}{x_b-x_A}$, puis, calcul de p à partir des coordonnées d'un des points

3) Comme on sait que l'équation cartésienne sera de la forme $bx - ay + c = 0$, on peut déterminer les coefficients à l'aide des coordonnées en résolvant un système d'équations.

Retour à l'exercice :

Une méthode : colinéarité de ...

a) Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite d passant par $A(-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où,

Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite d passant par $A(-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $-1(x + 3) = 2(y - 2)$

Conclusion : $-x - 2y + 1 = 0$ est une équation de d. (Ou encore : $x + 2y - 1 = 0$ ...)

Vérifier à l'aide des coordonnées de A

Une autre méthode : reconnaissance des coefficients ....

b) Une équation cartésienne de droite est de la forme $ax + b\,y + c = 0$ où les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a : $b = -3$ et $a = 2$

On a alors : $2x - 3y + c = 0$

Comme $A(2\,;-1) \in d$, on a : $2\times2 - 3\times(-1) + c = 0$. On trouve $c = -7$.

Conclusion : $2x - 3y - 7 = 0$ est une équation de d : droite passant par $A(2\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Et encore une autre ... : équation réduite ...

c) Une équation réduite d'une droite est de la forme $y = m\,x + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de la droite.

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}28\\35\end{pmatrix}$, on a : $m = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$

Comme $A(0\ ;\ -4)$, on a : $p = -4$

L'équation réduite de d est : $y = \frac{5}{4}x - 4$, soit : $5x - 4y - 16 = 0$ est une équation cartésienne de d ....

d) Comme le vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ \frac{-1}{5}\end{pmatrix}$, la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées et une équation de d est : $x = -2$ (**abscisse** du point A, peu importe son ordonnée)