Index

96 page 284

Lecture (réfléchie) de l'énoncé :

C'est un exercice sur les vecteurs …. je pense " vecteurs " en lisant et en écrivant.

énoncé	" je pense à "
ABCD est un parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ou … (*les autres relations équivalentes selon le sommet que l'on veut privilégier*)
$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BA}$ colinéaires …. les points A, B, K sont alignés … $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont de sens opposés (*K n'est pas sur le segment [BA]*) Longueurs : BK = $\frac{1}{2}$ BA
$\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires …. les points A, L, D sont alignés … $\overrightarrow{AL}$ $\overrightarrow{AD}$ et sont de même sens. Longueurs : AL = 3AD
La question : Les points K, C, L sont-ils alignés ?	

Recherche :

Pour répondre à cette question, on cherche à exprimer deux de ces trois vecteurs : $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{CL}$ en décomposant en somme sur deux vecteurs de base non colinéaires afin de pouvoir comparer les coefficients …

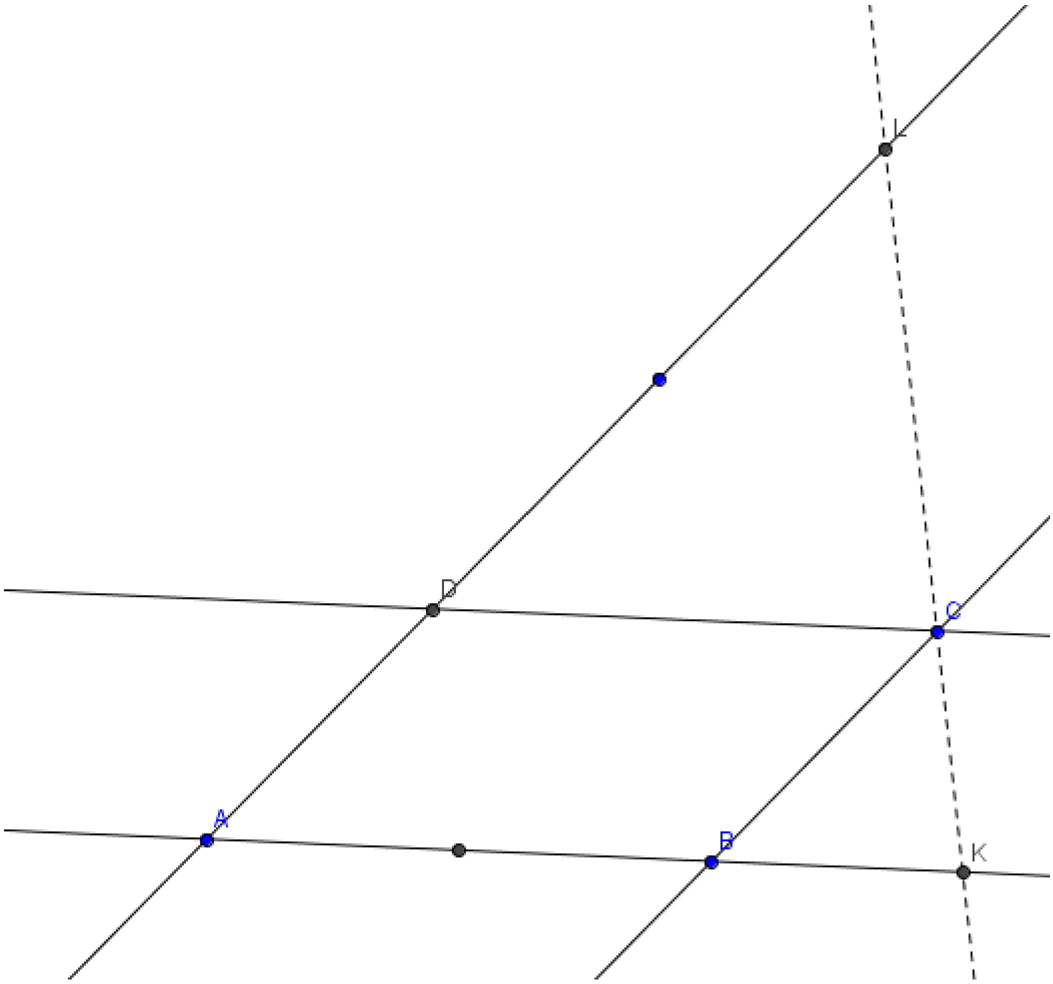
Choix des vecteurs de base : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ semblent de bons candidats puisque $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont exprimés en fonction de ces vecteurs.

Le point A semble aussi être un point " intéressant " pour décomposer en somme de vecteurs par la relation de Chasles.

Rédaction :

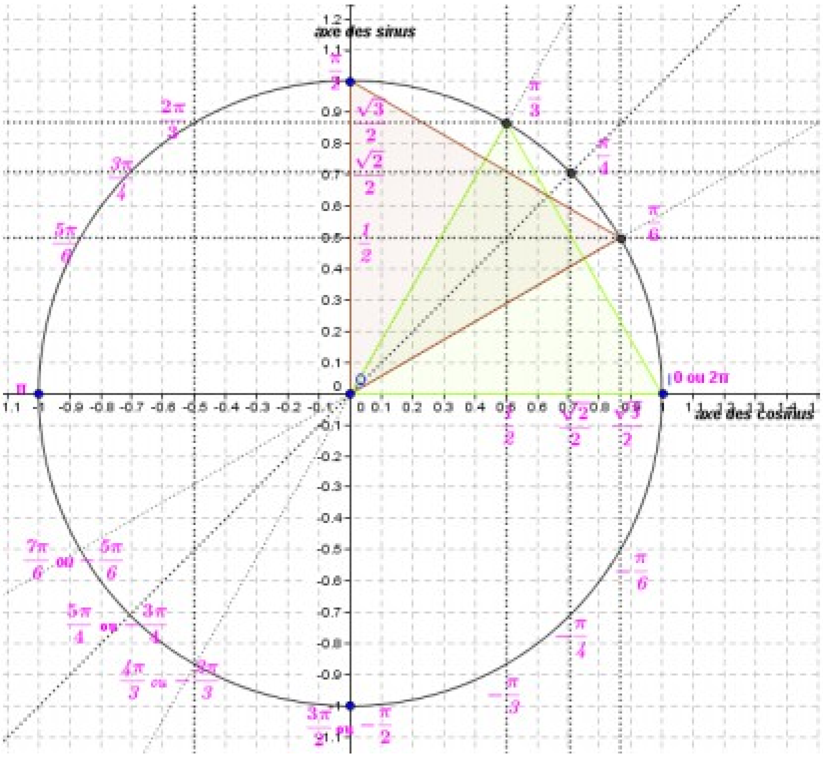
Deux types de rédaction : Calcul vectoriel et calcul analytique

Calcul vectoriel	**Calcul analytique**
	Choix d'un repère : Soit le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$)
$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles, et la seule donnée permettant d'étudier K est la donnée : $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$) Or, $\overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (parallélogramme), donc : $\overrightarrow{KC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	**Coordonnées des points et des vecteurs :** Par définition du repère : B(1 ; 0) et D(0 ; 1) ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, d'où, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ou encore C(1 ; 1) La donnée $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ mène à $\begin{cases}x_K-1=-\frac{1}{2}(-1)\\ y_K=-\frac{1}{2}\times 0\end{cases}$, $K\left(\frac{3}{2};0\right)$ On en déduit : $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}$ (ou encore : $\overrightarrow{KC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$)
$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}$ (Relation de Chasles, et la donnée permettant d'étudier K est la donnée : $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et la donnée permettant d'étudier L est $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AD}$)	La donnée $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AD}$ mène à $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, soit : $L(0;3)$
On a donc : $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ soit : $\overrightarrow{KL} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$	On en déduit : $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0-\frac{3}{2}\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\3\end{pmatrix}$ (ou encore : $\overrightarrow{KL} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$)
L'observation des coefficients donne immédiatement : $3\overrightarrow{KC} = 3(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$ $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{KL}$	$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\3\end{pmatrix}$ La relation de colinéarité : $3\times\left(\frac{-1}{2}\right)-1\times\left(\frac{-3}{2}\right)$ = 0 montre que les coordonnées sont proportionnelles
Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, donc, les points K, C, L sont alignés.	Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, donc, les points K, C, L sont alignés.



21 page 141

$\frac{\pi}{2}$ est un réel auquel on peut associer sur le cercle trigonométrique le point de coordonnées (0 ; 1) ; l'axe des abscisses est l'axe où on lit le cosinus et l'axe ds ordonnées, l'axe où on lit les sinus.



$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

si $n = 0$, $\sin(0) = 0$, (Point de coordonnées (1, 0) associé à 0)

si $n = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, (Point de coordonnées (0, 1) associé à $\frac{\pi}{2}$)

si $n = 2$, $\sin\pi = 0$, (Point de coordonnées (–1, 0) associé à π)

si $n = 3$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, (Point de coordonnées (0, –1) associé à $\frac{3\pi}{2}$)

si $n = 4$, $\sin 2\pi = 1$, (Point de coordonnées (1, 0) associé à 2π)

si $n = 100$, $\sin 50\pi = 1$, (Point de coordonnées (1, 0) associé à 50π) (25 tours).

Suites	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_{100}
$u_n = 4^n - 3n$	1	1	10	55	244	4^{100} - 300
$u_n = 1{,}05^n$	1	1,05	1,1	1,157625	1,215 …	131,501 ...
$u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	–1	0	0
$u_n = 2 + (-1)^n$	3	1	3	1	3	3

48 page 119

1) **Commencer par désigner un triangle rectangle :**

D'après la propriété de Pythagore, $h^2 + r^2 = 15^2$, d'où, $r^2 = 225 - h^2$, soit, puisque $r > 0$, $r = \sqrt{225-h^2}$

2) h est une longueur d'où $h \geqslant 0$

h est un côté perpendiculaire d'un triangle rectangle d'hypoténuse de longueur 15, donc, $h \leqslant 15$

$h \in [0 ; 15]$

le volume du cône est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, d'où, $\mathcal{V}(h) = \frac{1}{3}\pi(225 - h^2)\times h = 75\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$

3) La fonction $\mathcal{V}$ est un polynôme défini sur $[0 ; 15]$, donc, $\mathcal{V}$ est dérivable et pour tout h de $[0 ; 15]$, on a :

$\mathcal{V}'(h) = 75\pi - \frac{1}{3}\pi(3h^2) = \pi(75 - h^2) = \pi(5\sqrt{3} - h)(5\sqrt{3} + h)$

4) Comme $h \geqslant 0$, la dérivée est du signe du facteur $5\sqrt{3} - h$, d'où, le tableau de variations suivant :

h	0		$5\sqrt{3}$		15
$\mathcal{V}'(h)$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{V}(h)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	0

Le volume est maximal lorsque $h = 5\sqrt{3}$ cm,

ce volume vaut alors : $\mathcal{V}(5\sqrt{3}) = 75\pi \times 5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \times (5\sqrt{3})^3 =$

$$375\sqrt{3}\pi - \frac{1}{3} 125 \times 3 \times \sqrt{3}\pi = 250\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3.$$

Le demi-angle α au sommet vérifie $\cos\alpha = \frac{h}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

À la calculatrice, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ donne $\alpha \approx 55°$ à 1° près par excès.