Index

81 page 123......1
TP1 page 136 La suite de Syracuse (conjecture de Collatz)......3
109 page 150......7
29 page 168......8

81 page 123

f est la fonction définie par $f(x) = |x^2 - 4x - 9|$
1) Étude du signe de $x^2 - 4x - 9$
Il s'agit d'une expression du second degré.
Factorisation en facteurs du premier degré :
Une méthode : à partir de la forme canonique :
$x^2 - 4x - 9 = (x-2)^2 - 4 - 9 = (x-2)^2 - (\sqrt{13})^2 = (x - 2 - \sqrt{13})(x - 2 + \sqrt{13})$
Autre méthode : à partir du calcul des racines.
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times(-9) = 16 + 36 = 52 = 4\times13$
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-2\sqrt{13}}{2\times1} = 2 - \sqrt{13}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+2\sqrt{13}}{2\times1} = 2 + \sqrt{13}$

D'où : $x^2 - 4x - 9 = 1\times(x - (2 - \sqrt{13}))((x - (2 + \sqrt{13})) = (x - 2 + \sqrt{13})(x - 2 - \sqrt{13})$

Conclusion :

L'expression $x^2 - 4x - 9 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; 2 - \sqrt{13}[\cup]2 + \sqrt{13} ; +\infty[$

L'expression $x^2 - 4x - 9 < 0$ si et seulement si $x \in]2 - \sqrt{13} ; 2 + \sqrt{13}[$

L'expression $x^2 - 4x - 9 = 0$ si et seulement si $x = 2 - \sqrt{13}$ ou $x = 2 + \sqrt{13}$

2 a) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 9$

Étude des variations de g.
Une méthode : à partir de la forme canonique :
$x^2 - 4x - 9 = (x-2)^2 - 13$
Le coefficient 1 de x^2 est positif, d'où, g est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.
Elle admet un minimum en 2 qui vaut -13.

Autre méthode : à partir du signe de la dérivée :
Le polynôme du second degré g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$
Le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 2$, d'où,

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(2) = 2^2 - 4\times2 - 9 = 4 - 8 - 9 = -13$

c) La courbe de g est une parabole de sommet $S(2 ; -13)$, d'axe de symétrie d'équation $x = 2$, ... quelques points particuliers ... (Voir fin de l'exercice)

3a) D'après le 1), on sait :
$f(x) = g(x)$ si et seulement si i $x \in]-\infty\ ;\ 2-\sqrt{13}\,] \cup [2+\sqrt{13}\ ;\ +\infty[$
$f(x) = -g(x)$ si et seulement si $x \in [\,2-\sqrt{13}\ ;\ 2+\sqrt{13}\,]$.

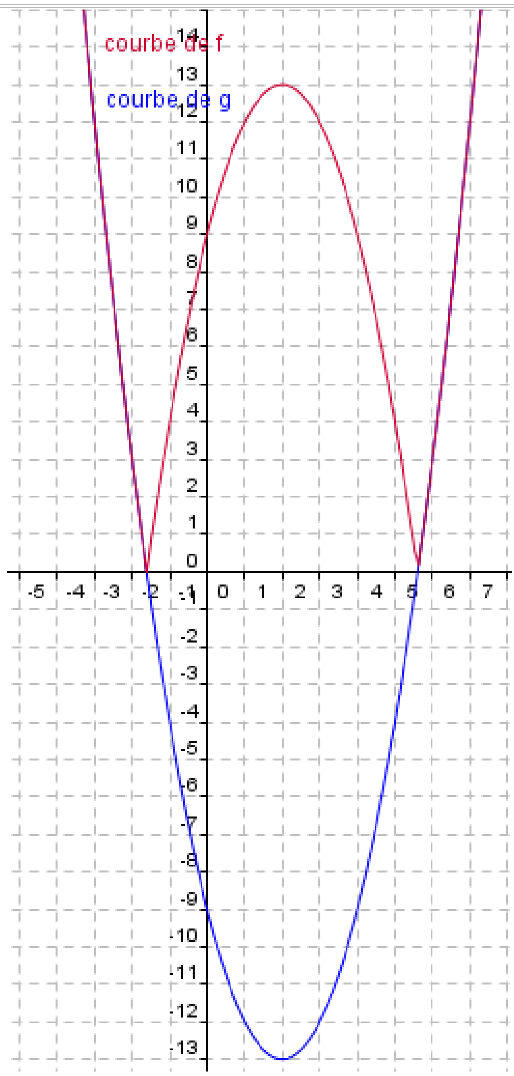
b) La courbe de f et la courbe de g sont confondues sur les intervalles $]-\infty\ ;\ 2-\sqrt{13}\,]$ et $[2+\sqrt{13}\ ;\ +\infty[$.
La courbe de f est la symétrique de celle de g par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle $[\,2-\sqrt{13}\ ;\ 2+\sqrt{13}\,]$ (Voir fin de l'exercice)

c) Les variations de f sont celles de g sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 2-\sqrt{13}\,]$ et $[2+\sqrt{13}\ ;\ +\infty[$.
Les variations de f sont opposées à celles de g sur chacun des intervalles $[\,2-\sqrt{13}\ ;\ 2]$ et $[2\ ;\ 2+\sqrt{13}\,]$.
En notant x_1 et x_2 les racines de $g(x)$, on a :

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	13	↘	0	↗	$+\infty$

À remarquer, f n'est pas dérivable en x_1 et en x_2.

d) Le minimum de f est 0 atteint en x_1 et en x_2.
f possède un maximum local sur $[x_1\ ;\ x_2]$ qui vaut 13 atteint en 2



TP1 page 136 La suite de Syracuse (conjecture de Collatz)

$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$, le premier terme $u_1 = a$ avec a entier supérieur ou égal à 1 et $n \geqslant 1$.

1) ***Premier cas : a = 1***.

$u_1 = 1$.
1 étant impair, $u_2 = 3\times 1 + 1 = 4$,

u_2 étant pair, $u_3 = \dfrac{4}{2} = 2$,

u_3 étant pair, $u_4 = \dfrac{2}{2} = 1$.

On retrouve le terme 1, le cycle recommence.
Lorsque $a = 1$, (1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; …).
Il suffit donc de s'arrêter quand un terme vaut 1 pour connaître tous les termes de la suite.

Deuxième cas : a = 2

$u_1 = 2$.
u_1 étant pair, $u_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

Troisième cas : a = 3

$u_1 = 3$.
3 étant impair, $u_2 = 3\times 3 + 1 = 10$,

u_2 étant pair, $u_3 = \dfrac{10}{2} = 5$,

u_3 étant impair, $u_4 = 3\times 5 + 1 = 16$
Puis on a successivement, 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Quatrième cas : a = 4

$u_1 = 4$.
4 est pair, on a successivement : 4 ; 2 ; 1.

Cinquième cas : a = 5

$u_1 = 5$, $u_2 = 16$, puis, 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Dès qu'un des termes est une puissance de 2, on aura successivement les puissances décroissantes de 2, et, on s'arrête lorsque l'un des termes est 1.

Cas où a = 11
$u_1 = 11$; $u_2 = 34$; $\boldsymbol{u_3 = 17}$; $u_4 = 52$; $u_5 = 26$; $u_6 = 13$; $u_7 = 40$; $u_8 = 20$; $u_9 = 10$; $u_{10} = 5$; puis cas précédent.

Cas où a = 28
$u_1 = 14$; $u_2 = 7$; $u_3 = 22$; $\boldsymbol{u_4 = 11}$ puis cas précédent

2 a) Un algorithme :

Lire a
Tant que $a > 1$ faire
  Si a est pair alors
    a prend la valeur $a/2$
    sinon
    a prend la valeur $3 \times a + 1$
  FinSi
  Afficher a
Fin TantQue

b) Avec Algobox

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  AFFICHER a
  TANT_QUE (a>1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI ((a/2)-floor(a/2)==0) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR a/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR 3*a+1
        FIN_SINON
    AFFICHER a
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 21
21
64
32
16
8
4
2
1

***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 42
42
21
64
32
16
8
4
2
1

***Algorithme terminé***
```

c) A priori, ce programme peut ne pas s'arrêter … il n'est pas prouvé que un des termes prendra la valeur 1.

3a) Modification du programme.
" Durée de vol " : c'est un compteur, à chaque passage dans la boucle " Tant que " on incrémente une variable de 1.
On peut aussi introduire un " si … alors … " pour l'altitude. On stocke dans une variable la valeur de u_n si elle est supérieure à la dernière valeur maximale stockée dans cet variable.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  compteur PREND_LA_VALEUR 1
  AFFICHER a
  TANT_QUE (a>1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI ((a/2)-floor(a/2)==0) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR a/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR 3*a+1
        FIN_SINON
    compteur PREND_LA_VALEUR compteur+1
    AFFICHER a
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "la durée de vol est:   "
  AFFICHER compteur
FIN_ALGORITHME
```

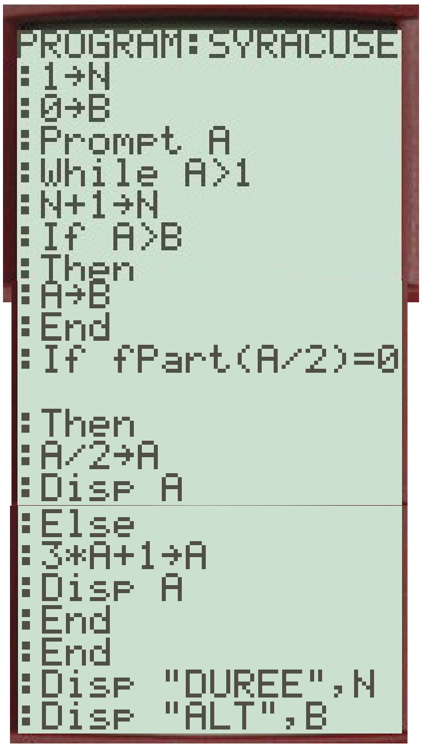
```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 26
26
13
40
20
10
5
16
8
4
2
1
la durée de vol est:   11
***Algorithme terminé***
```

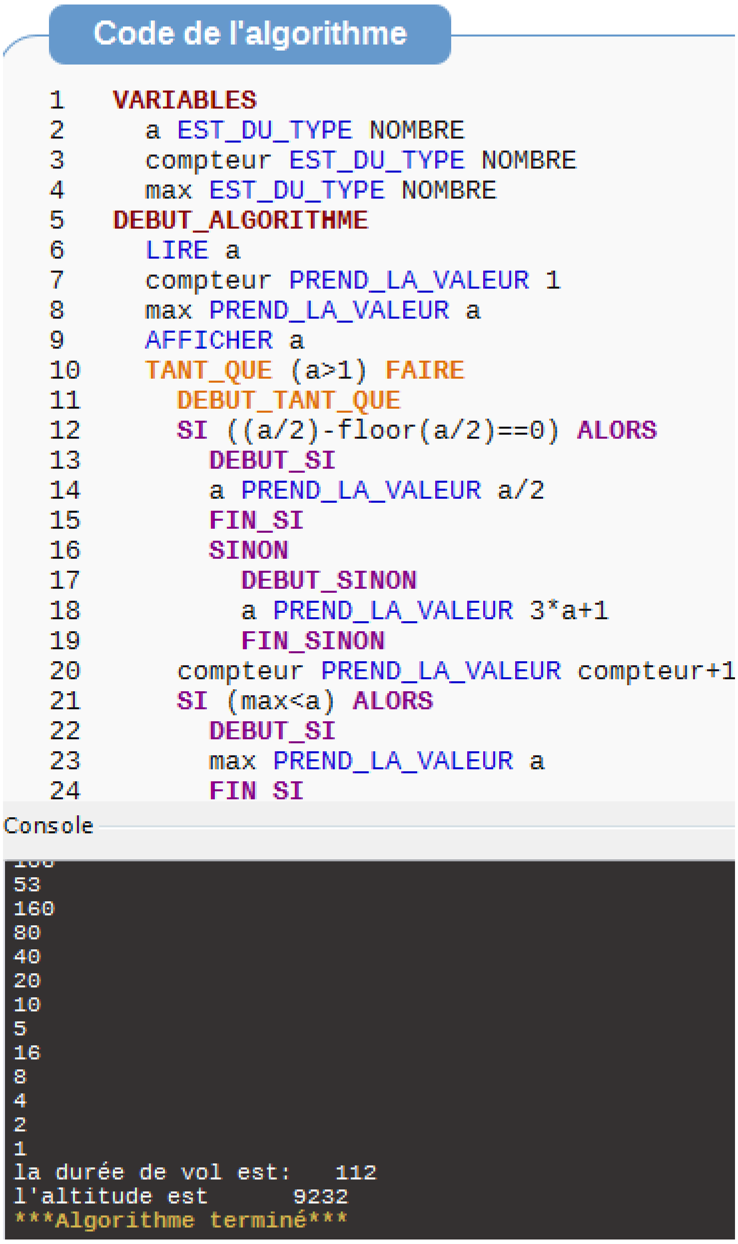
```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 27
27
82
41
124
62
31
94
47
142
71
214
107
322
```

```
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232
4616
2308
1154
577
1732
```

```
106
53
160
80
40
20
10
5
16
8
4
2
1
la durée de vol est:   112
***Algorithme terminé***
```

Pour a = 26, la durée de vol est 11 et l'altitude maximale est: 40
Pour a = 27, la durée de vol est 112 et l'altitude maximale est: 9 232
Programme TI :





109 page 150

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) $u_1 = \dfrac{2u_0+v_0}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $v_1 = \dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{4}{3}$

$u_2 = \dfrac{2u_1+v_1}{3} = \dfrac{8}{9}$ et $v_2 = \dfrac{u_1+2v_1}{3} = \dfrac{10}{9}$

2) La suite (d_n) est définie par $d_n = v_n - u_n$.

a) On exprime d_{n+1} en fonction de d_n.

$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$. par définition de la suite (d_n)

$d_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} - \dfrac{2u_n+v_n}{3}$ par définition des suites (u_n) et (v_n).

$d_{n+1} = \dfrac{v_n-u_n}{3}$ par réduction de la différence précédente

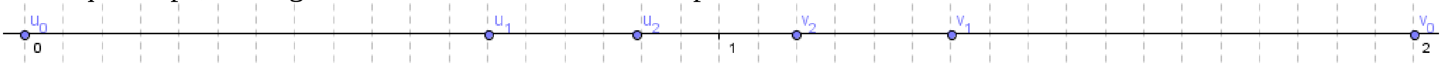
$d_{n+1} = \dfrac{1}{3}d_n$ puisque $v_n - u_n = d_n$

Cette relation prouve que la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d_n = 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Remarque En plaçant les termes u_n et v_n sur une droite graduée, le nombre d_n est l'amplitude de l'intervalle $[u_n ; v_n]$.

À chaque étape, la longueur de l'intervalle est divisée par 3.



3) La suite (s_n) est définie par $s_n = u_n + v_n$

a) $s_0 = u_0 + v_0 = 2$

$s_1 = u_1 + v_1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = 2$

$s_2 = u_2 + v_2 = ... = 2$

b) On exprime s_{n+1} en fonction de s_n.

$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$. par définition de la suite (s_n)

$s_{n+1} = \dfrac{2u_n+v_n}{3} + \dfrac{u_n+2v_n}{3}$ par définition des suites (u_n) et (v_n).

$s_{n+1} = u_n + v_n$ par réduction de la somme précédente

$s_{n+1} = s_n$ par définition de la suite (s_n)

Cette relation prouve que la suite (s_n) est une suite constante égale à $s_0 = 2$

4) **Puisqu'on connaît la somme et la différence des nombres u_n et v_n,** on peut calculer chaque terme u_n et v_n.

$$\begin{cases} u_n+v_n=2 \\ v_n-u_n=2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

En faisant la somme des deux lignes, il vient : $2v_n = 2 + 2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, soit : $v_n = 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

En faisant la différence des deux lignes, il vient : $2u_n = 2 - 2\times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, soit : $u_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

5) $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Posons $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a la somme de $n + 1$ termes de la forme $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - w_n$.

$U_n = (1 + ... + 1) - (w_0 + w_1 + w_n)$

(w_n) est une suite géométrique de raison $\left(\frac{1}{3}\right)$ et de premier terme $w_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

La somme des $n + 1$ termes de la suite géométrique (w_n) est : $W_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$U_n = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n+1 \text{ termes égaux à } 1} - (w_0 + w_1 + ... + w_n) = n + 1 - \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$U_n = n - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$V_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

La m^me démarche en remplaçant la différence par la somme donne :

$V_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = n + 1 + W_n = n + 1 + \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$V_n = n + \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

---

29 page 168

1 a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

$u_1 = \frac{2^1}{1^2} = 2$, $u_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$, $u_3 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$, $u_4 = \frac{2^4}{4^2} = 1$, $u_5 = \frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25} = 1{,}28$

b) D'après ces valeurs, la suite n'est pas monotone.

2 a) $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$ est une inéquation du second degré.

Une méthode : $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$, d'où, $(n-1)^2 - 2 \geqslant 0$ lorsque $n - 1 \geqslant \sqrt{2}$ ou $n - 1 \leqslant -\sqrt{2}$

Comme n est un entier supérieur ou égal à 1, on a : $n \geqslant 1 + \sqrt{2}$, soit : $n \geqslant 3$

Autre méthode : $\Delta = 8$, d'où $n_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $n_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

Le polynôme est du signe de 1 coefficient de n^2 à l'extérieur des racines .... (Voir résultat au-dessus)

b) Soit $n \geqslant 3$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{2^{n+1}\times n^2 - 2^n\times(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{2^n(2n^2 - n^2 - 2n - 1)}{n^2(n+1)^2}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^n(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$

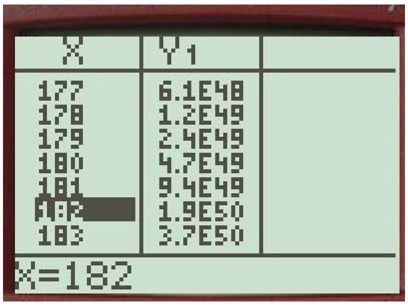
Comme $n \geqslant 3$, les nombres 2^n, n^2 et $(n+1)^2$ sont strictement positifs,

d'où, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $n^2 - 2n - 1$

D'après l'étude précédente : $n^2 - 2n - 1$ dès que $n \geqslant 3$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est donc une suite croissante.

3 a) On cherche un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 10^{50}$
Remarque : il suffit de trouver un entier .... il n'est pas nécessaire de trouver le plus petit de ces entiers.
On peut chercher un ordre de grandeur en remarquant que $2^{10} > 10^3$, d'où, $(2^{10})^{16} > (10^3)^{16}$
Soit : $2^{160} > 10^{48}$, d'autre part : $2^7 > 10^2$, d'où, $2^{167} > 10^{50}$
Comme on divise par n^2, on peut commencer le tableau à partir de 170 environ ...
La calculatrice donne en entrant la fonction $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2}$



Tout entier supérieur ou égal à 182 convient.
b) Soit n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 10^{50}$
Comme $n_0 \geqslant 3$ et (u_n) croissante, on a :
Si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant u_{n_0}$