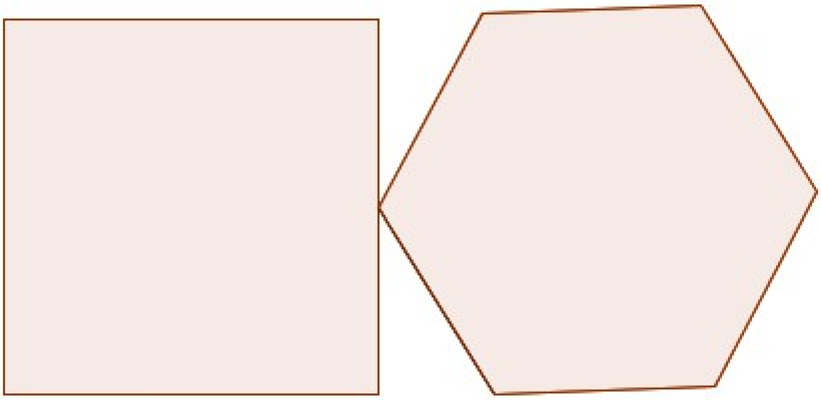
Index

85 page 124

Les données :

Un carré et un hexagone régulier dont la somme des périmètres est égale à 100.



Traduction des données :

Si x est la longueur d'un côté du carré et a celle d'un côté de l'hexagone, on a : $4x + 6a = 100$

Objectif :
Longueur du côté du carré qui rend la somme des aires minimale.
On choisit donc de tout exprimer en fonction de la variable x.

Les calculs :
$0 \leqslant x \leqslant 25$

$a = \dfrac{100-4x}{6} = \dfrac{2(25-x)}{3}$

Aire du carré : $\mathcal{A}_1(x) = x^2$.
Aire de l'hexagone : $\mathcal{A}_2(x)$

Soit h la hauteur d'un des triangles équilatéraux : $h = a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\mathcal{A}_2(x) = 6 \times \frac{a \times h}{2} = 3ah = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2(25-x)}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(25-x)^2$$

La somme des aires :

$$\mathcal{A}(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}(25-x)^2$$

Étude des variations de $\mathcal{A}$.

Dérivée de $\mathscr{A}$:

$\mathscr{A}$ est la somme de deux fonctions du second degré

$\mathscr{A}'(x) = 2x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 \times (-1) \times (25 - x) = (2 + \frac{4\sqrt{3}}{3})x - \frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{6+4\sqrt{3}}{3}x - \frac{100\sqrt{3}}{3}$.

Signe de la dérivée :

L'expression de $\mathscr{A}'(x)$ est du premier degré, elle s'annule en changeant de signe lorsque $x = \frac{100\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{6+4\sqrt{3}}$

Simplification par 2 et par 3, puis, on multiple numérateur et dénominateur par $2\sqrt{3} - 3$.

$x = \frac{50\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \frac{50\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)} = \frac{300-150\sqrt{3}}{3} = 100 - 50\sqrt{3}$.

Tableau de variation de $\mathscr{A}$:

x	0		$100 - 50\sqrt{3}$		25
$\mathscr{A}'(x)$		–	0	+	
$\mathscr{A}(x)$	$\frac{1250\sqrt{3}}{3}$	↘	Min	↗	625

La somme des aires est minimale lorsque la longueur du côté est égale à $100 - 50\sqrt{3}$.

76 page 175

Au 1er janvier 2010, on a : $V_0 = 20$ et $R_0 = 40$, où, V_n et R_n représentent respectivement les populations citadine et rurale (en millions d'habitants) en 2010 + *n*.

On suppose que la population totale est constante sur la période étudiée.

1) Chaque année, 20% des ruraux émigrent à la ville et 10 % des citadins émigrent à la campagne.
Soit : l'année 2010 + *n*, les effectifs respectifs sont : V_n et R_n
L'année suivante 2010 + (*n* + 1), les effectifs respectifs sont : V_{n+1} et R_{n+1} :
Les citadins ont perdus 10 % de V_n (il reste donc $0{,}9V_n$ de population citadine)
et gagnés 20 % de R_n (on ajoute donc $0{,}2R_n$ provenant de la population rurale), d'où, $V_{n+1} = 0{,}9V_n + 0{,}2R_n$
Quant aux ruraux, ils ont gagné 10% de V_n et perdus 20% R_n , d'où, $R_{n+1} = 0{,}1V_n + 0{,}8R_n$

$$\begin{cases} V_{n+1} = 0{,}9\,V_n + 0{,}2\,R_n \\ R_{n+1} = 0{,}1\,V_n + 0{,}8\,R_n \end{cases}$$

2) Soit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = V_n + R_n$
a) La suite (S_n) est constante car elle représente l'ensemble de la population année par année, et, cette population est stable (60 millions) d'après l'énoncé.
(Les échanges ont lieu entre les deux sous-groupes sans apport extérieur et sans perte)

b) D'après le 1/, on a : $S_{n+1} = V_{n+1} + R_{n+1} = (0{,}9V_n + 0{,}2R_n) + (0{,}1V_n + 0{,}8R_n) = V_n + R_n = S_n$
La suite est donc constante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la population à l 'année *n* est égale à celle de l'année suivante.
Comme en l'année 2010, on a : $S_0 = 60$, il vient : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 60$

c) On en déduit : $S_n = V_n + R_n = 60$, soit : $V_n = 60 - R_n$ et $R_n = 60 - V_n$

En substituant dans les relations trouvées au 1/, on obtient :

$$\begin{cases} V_{n+1}=0{,}9\,V_n+0{,}2(60-V_n)=0{,}7\,V_n+12 \\ R_{n+1}=0{,}1(60-R_n)+0{,}8\,R_n=0{,}7\,R_n+6 \end{cases}$$

3) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n = V_n - 40$

a) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_{n+1} = V_{n+1} - 40 = (0{,}7V_n + 12) - 40 = 0{,}7V_n - 28 = 0{,}7(V_n - 40) = 0{,}7W_n$

(W_n) est donc une suite géométrique de premier terme $W_0 = 20 - 40 = -20$ et de raison 0,7.

D'où : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n = -20\times (0{,}7)^n$

b) Comme $V_n = W_n + 40$, on a : $V_n = -20\times (0{,}7)^n + 40$

et $R_n = 60 - V_n = 60 - (-20\times (0{,}7)^n + 40) = 20 + 20\times (0{,}7)^n$

c) On applique le cours sur les suites géométriques

Comme $0 < 0{,}7 < 1$, la suite $(0{,}7^n)$ est décroissante (et converge vers 0)

D'où : $(-20\times (0{,}7)^n)$ est croissante (et converge vers 0), (en multipliant par un réel négatif, ...)

puis : $(-20\times (0{,}7)^n + 40)$ est croissante (et converge vers 40),

la suite (V_n) est croissante.

et aussi : $(20\times (0{,}7)^n)$ est décroissante (et converge vers 0),

puis : $(20 + 20\times (0{,}7)^n)$ est décroissante (et converge vers 20),

la suite (R_n) est décroissante.

Ou bien : on cherche le signe de la différence : $V_{n+1} - V_n = (-20\times (0{,}7)^{n+1} + 40) - (-20\times (0{,}7)^n + 40)$

$= 20\times 0{,}7^n(-0{,}7+1) = 6\times 0{,}7^n$

Cette différence étant positive, la suite (V_n) est croissante.

Pour la suite (R_n), on a : $R_{n+1} - R_n = (20\times (0{,}7)^{n+1} + 20) - (20\times (0{,}7)^n + 20)$

$= 20\times 0{,}7^n(0{,}7-1) = -6\times 0{,}7^n$

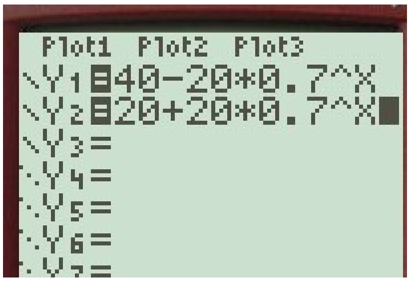
Cette différence étant négative, la suite (V_n) est croissante.

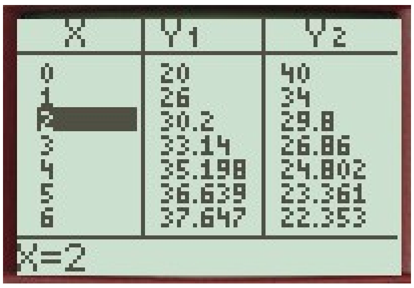
4) On peut entrer dans un tableur les deux fonctions et déterminer l'année *n* par lecture des valeurs.

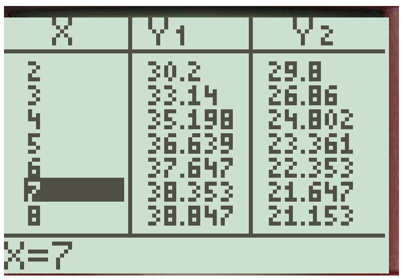
On lit : $V_n \geqslant R_n$ dès que $n \geqslant 2$,

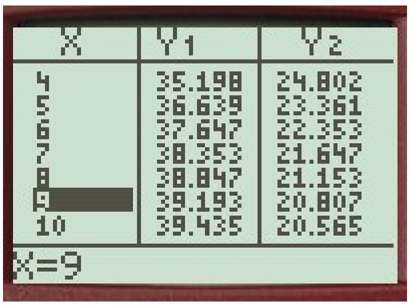
$V_n \geqslant 39$ dès que $n \geqslant 9$

et $R_n \leqslant 22$ dès que $n \geqslant 7$







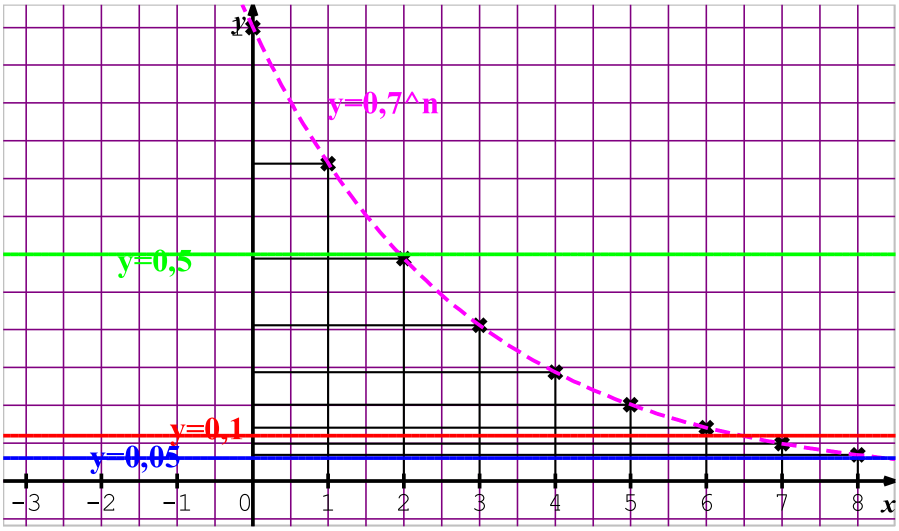


On peut aussi faire : $V_n \geqslant R_n$ dès que $V_n \geqslant 30$, soit : $-20\times (0{,}7)^n + 40 \geqslant 30$

On résout : $0{,}7^n \leqslant \dfrac{1}{2}$

$V_n \geqslant 39$, soit : $-20\times (0{,}7)^n + 40 \geqslant 39$ et on résout : $0{,}7^n \leqslant \dfrac{1}{20}$

$R_n \leqslant 22$, soit : $20 + 20\times\ (0{,}7)^n \leqslant 22$ et on résout : $0{,}7^n \leqslant \frac{1}{10}$



Sur cette représentation de la suite $(0{,}7^n)$, on retrouve les résultats précédents.

139 page 337 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et de rayon r ($r > 0$).

M un point du plan et d une droite passant par M qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B.

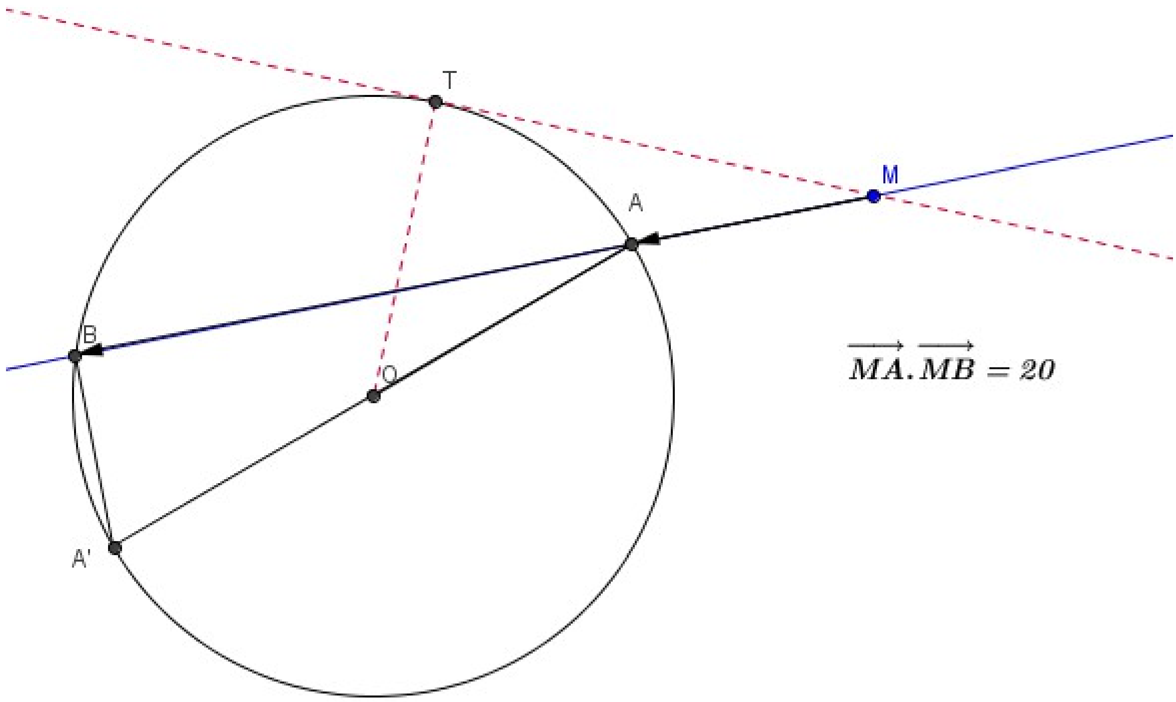
A) La construction permet de conjecturer la proposition suivante :

M étant donné, quelque soit la droite d passant par M et coupant le cercle en deux points A et B

(on peut avoir $A = B$), le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est constant.

B) Démonstration

Soit A' le symétrique de A par rapport à O (A' est diamétralement opposé à A).



1) Le projeté orthogonal de A' sur d est B car le triangle ABA' est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AA']$.

On a donc : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

Or, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.

On a alors : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - r^2$.

2) On vient de montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$.

Les deux nombres MO et r sont indépendants de la position de la droite d.

Ce nombre $MO^2 - r^2 = p_{\mathscr{C}}(M)$ est la puissance de M par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

3) Si M est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$, $0 \leqslant MO < r$ et $MO^2 - r^2 < 0$. $p_{\mathscr{C}}(M) < 0$.

Si M est sur le cercle $\mathscr{C}$, $MO = r$ et $MO^2 - r^2 = 0$. $p_{\mathscr{C}}(M) = 0$.

Si M est à l'extérieur du cercle $\mathscr{C}$, $MO > r > 0$ et $MO^2 - r^2 > 0$. $p_{\mathscr{C}}(M) > 0$.

4) Soit la droite (MT) tangente au cercle en $\mathscr{C}$.

Le triangle MOT est rectangle en T et d'après le théorème de Pythagore, $MT^2 = MO^2 - r^2 = p_{\mathscr{C}}(M)$