Exercice 1- Identification des coefficients (méthode vue en cours) 3 points

Rappel de la méthode vue en cours :

En écrivant les deux polynômes sous la même forme, on identifie les **coefficients de même degré**.

1) Déterminer les réels m, n, p tels que 3x² + mx – 7 = (nx + 1)(x + p).

En développant le membre de droite, il vient : $3x^2 + mx - 7 = nx^2 + (np + 1)x + p$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} n=3 & \text{coefficients de degré 2} \\ np+1=m & \text{coefficients de degré 1} \\ p=-7 & \text{coefficients de degré nul} \end{cases}$.

Conclusion : $m = 3\times(-7)+1 = -20$, $n = 3$, $p = -7$

2) Déterminer les réels s et t tels que x² + 2tx = (x + s)² – 9

On peut utiliser la méthode précédente … mais aussi remarquer que $x^2 + 2tx = (x + t)^2 - t^2$

On en déduit : $t^2 = 9$, d'où, $t = -3$ ou $t = 3$, et, $s = t$.

Conclusion : $s = t = -3$ ou $s = t = 3$

Attention : il existe deux réels qui élevés au carré donnent 9

Commentaires :

La méthode s'applique dès qu'on a deux écritures identiques (sous la même forme) pour une infinité de valeurs de la variable …

Ne confondez pas dans le vocabulaire : coefficient et variable …

Exercice 2- Quelques calculs (comme dans le DM1) 3 points

1) Développer, réduire et ordonner

$A(x) = (2x + 5)^2 - (5x + 2)(5x - 2) - (1 - x)(3 + x)$
$A(x) = 4x^2 + 20x + 25 - (25x^2 - 4) - (3 + x - 3x - x^2)$
$A(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 25x^2 + 4 - 3 - x + 3x + x^2$
$\mathbf{A(x) = -20x^2 + 22x + 26}$

2) Factoriser en un produit de facteurs du premier degré
$B(x) = 4(x - 3)^2 - 9 =$

$4(x - 3)^2 - 9 = [2(x - 3)]^2 - 3^2 = [2(x - 3) - 3][2(x - 3) + 3]$

$= (2x - 6 - 3)(2x - 6 + 3)$

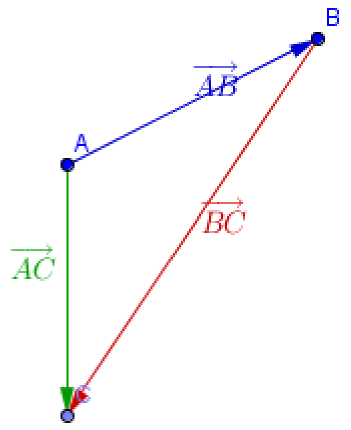
$\mathbf{B(x) = (2x - 9)(2x - 3)}$

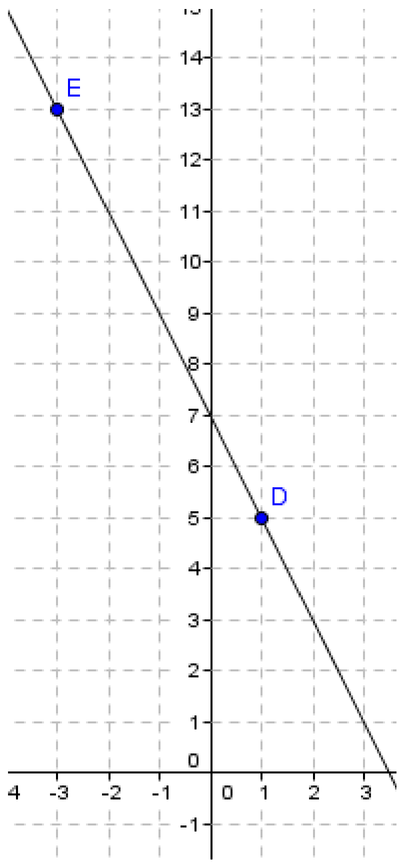
Commentaires : Voir DM1 (ces calculs étaient dans le DM1)

Exercice 3- Vrai-Faux 4 points

Pour chaque item, dire si la proposition est vraie ou fausse et dans tous les cas, **justifier votre réponse.**

Une réponse non justifiée ne sera pas notée.

Proposition	**Vrai-Faux**	**Justification**
La parabole d'équation $y = x^2 + x + 1$ coupe l'axe des abscisses en deux points	FAUX	**Une méthode** : On peut écrire $x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$ $= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Le sommet de la parabole est $\frac{3}{4} > 0$ et le coefficient de x^2 est strictement positif. **Une autre méthode :** $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = -3$ $\Delta < 0$, l'expression $x^2 + x + 1$ n'est jamais nulle. **Une autre méthode** : $x^2 + x + 1 = 1$ équivaut à $x(x + 1) = 0$. On obtient deux points de la parabole d'ordonnée 1 : $A(0 ; 1)$ et $B(-1 ; 1)$ L'abscisse du sommet est $-\frac{1}{2}$ et $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$ (on retrouve la première méthode)
La fonction $x \mapsto -x^2 + 2x + 5$ admet un maximum.	VRAI	Le coefficient -1 de x^2 est strictement négatif. La fonction admet un maximum en $-\frac{2}{2\times(-1)} = 1$. Ce maximum vaut : $f(1) = 6$
Dans un repère, la droite passant par les points $A(3 ; 2)$ et $B(0 ; 2)$ a pour équation $x = 2$	FAUX	Les deux points A et B ont la même ordonnée 2. Une équation de (AB) est : $y = 2$ *(L'équation $x = 2$ caractérise l'ensemble des points ayant la même abscisse 2, c-à-d. une droite parallèle à l'axe des ordonnées)*
Si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ alors B est le milieu de $[AC]$	FAUX	***Contre-exemple*** : Cette construction vérifie la condition suffisante :  et ne vérifie pas la condition nécessaire .

Proposition	**Vrai-Faux**	**Justification**
La droite passant par les points $D(1 ; 5)$ et $E(-3 ; 13)$ a pour coefficient directeur 2.	FAUX	Calcul : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{13-5}{-3-1} = -2$ ***ou encore***  La droite représente une fonction affine décroissante ***ou encore*** $-3 < 1$ et $13 > 5$, donc, la fonction affine est décroissante. Le coefficient directeur de (DE) sera négatif.

Commentaires :

Une " affirmation " n'est pas une preuve :

Dire : " c'est vrai car, la parabole est tournée vers le bas " est une affirmation sans preuve. La proposition ne dit pas que la parabole est tournée vers le bas.

Dans la proposition, quel(s) élément(s) permet(tent) de dire que " la parabole est tournée vers le bas " ?

Ne donner pas une preuve (fausse) au hasard :

Dans $y = x^2 + x + 1$, le coefficient $c = 1$ est positif.

Dans $y = x^2 + 3x + 1$, le coefficient $c = 1$ est positif.

Pourtant, la situation est entièrement différente.

Si vous pensez que votre argument est valable, dites à quelle propriété vous faites allusion.

Vocabulaire :

je ne connais pas : " équation positive ", " courbe positive " ou " courbe négative " ou " courbe croissante " ou " courbe décroissante " ou " fonction montante " ….

je connais : expression positive, fonction croissante, fonction décroissante …

Exercice 4 - Second degré

Quelques rappels :

Résoudre ...

Il ne suffit pas de donner une solution ....

Résoudre une équation (resp. une inéquation), c'est donner **toutes** les solutions de l'équation (resp. inéquation)

Une solution d'une équation (resp. une inéquation) numérique est un nombre réel qui rend vraie l'égalité (resp. l'inégalité).

Une égalité : 2 + 3 = 5 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **(toujours vérifiée)**

Une équation : $x + 3 = 5$ **(égalité seulement lorsque** $x = 2$)

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + 9$ **(égalité seulement lorsque** $b = 3$ **ou lorsque** $b = -3$**)**

Propriété : Produit nul :

Vous connaissez bien cette propriété :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Que faut-il pour l'appliquer :

- un produit
- que ce produit soit nul
- reconnaître chaque facteur.

Par conséquent :

Si vous n'avez pas un produit

Si vous avez un produit qui n'est pas nul,

la propriété ne s'applique pas

Développement, factorisation

Le passage d'un produit à une somme est un développement

Le passage d'une somme à un produit est une factorisation ...

Pensez toujours à contrôler les calculs ....

Les formules :

Vous verrez dans le corrigé qu'aucune formule n'était nécessaire si on appliquait les résultats démontrés en cours sur les liens entre " racines ", " factorisation ", axe de symétrie de la parabole ...

Correction

f est un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 42x + 80$

1) Résoudre l'équation f (x) = 80

$f(x) = 80 \Leftrightarrow x^2 - 42x + 80 = 80 \Leftrightarrow x(x-42) = 0$ (On ramène à 0, on factorise, ...)
$\mathcal{S}_1 = \{0 ; 42\}$
Commentaire : Les autres méthodes sont maladroites puisque la factorisation est évidente.

2) Donner la forme canonique de f (x). (Indiquer la démarche)

Méthode la plus simple si le 1/ est résolu.

(Lien avec la parabole : On pense à l'axe de symétrie, et, on calcule l'ordonnée du sommet)

Comme $\frac{0+42}{2} = 21$ et $f(21) = 21^2 - 42\times21 + 80 = 21^2(1-2) + 80 = 80 - 441 = -361$

$f(x) = (x-21)^2 - 361$

Si on n'a pas réussi le 1/

$x^2 - 42x = (x-21)^2 - 21^2$ (cela doit devenir une évidence … à condition de bien connaître et analyser la relation $(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$).
$x^2 - 42x + 80 = (x-21)^2 - 21^2 + 80 = (x-21)^2 - 361$

***Commentaires** : les formules sont inutiles dans ce cas ....*

3) Résoudre l'équation f (x) = 0. (Indiquer la démarche)

(À partir de la forme canonique, on reconnaît une différence de deux carrés qui est le développement du produit de la somme de deux termes par leur différence .... autrement dit : $A^2 - B^2$ avec $A = ...$ et $B = ...$)

En remarquant que $19^2 = 361$, on a :

$f(x) = (x-21)^2 - 361 = [(x-21) - 19][(x-21) + 19] = (x-40)(x-2)$
D'où, $(x-40)(x-2) = 0$ (un produit est nul ...)
$\mathcal{S}_3 = \{2 ; 40\}$

Si on n'a pas remarqué, ce qui est remarquable :

$f(x) = x^2 - 42x + 80$ $a = 1, b = -42, c = 80$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4\times1\times80 = …. = 38^2$$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-42)-38}{2\times1} = 2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-42)+38}{2\times1} = 40$

4) Résoudre l'inéquation f (x) ⩾ 0. (Indiquer la démarche)

(On a factorisé au 3/, d'où, un tableau de signes)

Tableau de signes : (*et dans ce tableau, on lit les intervalles où le produit est positif ou nul*)

x	$-\infty$			2			40			$+\infty$
$x-2$		$-$		0		$+$		$+$		
$x-40$		$-$				$-$	0	$+$		
$f(x)$		$+$		0		$-$	0	$+$		

$\mathcal{S}_4 =]-\infty\ ; 2] \cup [40\ ; +\infty[$.

ou encore : *Penser à la parabole.*

Le coefficient 1 de x^2 est positif, donc l'expression du second degré est du signe positif pour les valeurs de x à l'extérieur des racines.

Partie B/

On note C_f la représentation graphique de f dans un repère et D la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -36x + 71$.

1) Quelle est la nature de D ?
D est une **droite** de coefficient directeur -36 et d'ordonnée à l'origine $+ 71$
Commentaire :
une droite n'est ni croissante, ni décroissante (elle est représentative d'une fonction croissante ou décroissante).
une droite n'est ni positive, ni négative …. (les abscisses de points sont positives, négatives, …, les ordonnées de points sont positives, négatives)

2) a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
Soit : $x^2 - 42x + 80 = -36x + 71$ qui équivaut à $x^2 - 6x + 9 = 0$ (*On reconnaît* ….)
On a donc : $(x-3)^2 = 0$.
$f(x) = g(x)$ a une et une seule solution 3.
commentaire *: Toute autre méthode est maladroite*

b) Interpréter graphiquement le 2a/
C_f et D ont un et un seul point commun, le point d'abscisse 3 et d'ordonnée $f(3) = g(3) = -37$