Dans tous ces exercices, les justifications attendues sont celles amenées par les propriétés du cours et les calculs. En aucun cas, le lecture sur l'écran de la calculatrice n'est une justification.

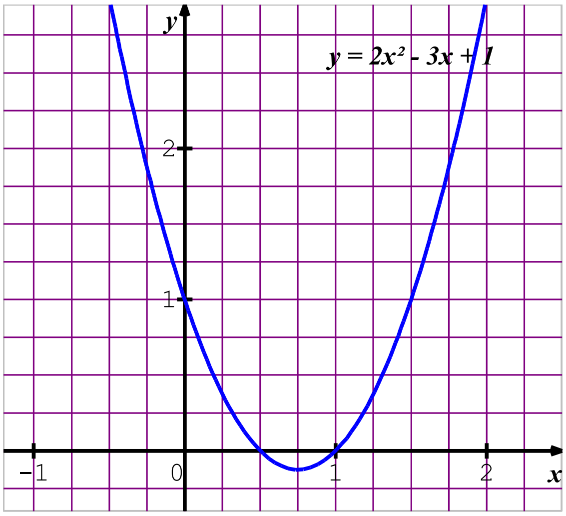
Exercice 1 ***2 points*** ***(durée : très coutre le temps d'écrire ...)***

Une élève de 1ère, Emma Lémat', a fait une tâche sur sa feuille.

Aidez-la à retrouver l'équation de la parabole. (**Justifiez votre réponse**).

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $\left(\frac{1}{2};0\right)$ et (1 ; 0).

On sait que $a = 2$, que les racines sont $\frac{1}{2}$ et 1, donc, $y = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) = 2x^2 - 3x + 1$.



Exercice 2 ***Étude d'une expression du second degré.*** ***6 points***

Voici une suite de questions concernant l'expression $-2x^2 - 5x + 12 = f(x)$.

Il n'y a pas d'ordre pour traiter ces questions mais des liens à créer entre les informations que vous obtenez. Quand vous avez obtenu et **justifié une réponse à une question**, ce résultat peut et doit être interprété pour une ou plusieurs questions.

(Le tracé de la représentation graphique n'est pas demandée).

1) Donner la forme factorisée et la forme canonique de l'expression $-2x^2 - 5x + 12$.

2) On considère la fonction $f : x \mapsto -2x^2 - 5x + 12$

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) On appelle $\mathscr{P}$ la représentation graphique de f dans un repère.

Indiquer, s'ils existent, les coordonnées du ou des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des abscisses.

Indiquer, s'ils existent, les coordonnées du ou des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des ordonnées.

4) Dresser le tableau de signes de l'expression $-2x^2 - 5x + 12$

Au final, ce tableau doit être rempli. Une justification devant être écrite sur la copie

On peut calculer $\Delta = (-5)^2 - 4\times(-2)\times12 = 121 = 11^2$

D'où les racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-11}{2\times(-2)} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+11}{2\times(-2)} = -4$

D'où la factorisation : $f(x) = -2(x - \frac{3}{2})(x + 4)$

On peut calculer $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{5}{4}$, puis, $\beta = f(\alpha) = -2\times\left(\frac{-5}{4}\right)^2 - 5\times\left(\frac{-5}{4}\right) + 12 = \frac{121}{8}$

D'où, la forme canonique : $f(x) = -2(x + \frac{5}{4})^2 + \frac{121}{8}$.

On peut pour retrouver α faire la demi-somme des racines : $\alpha = \dfrac{-4+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-5}{4}$.

On peut commencer par la forme canonique :

$$f(x) = -2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right) + 12 = -2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] + 12 = -2(x + \frac{5}{4})^2 + \frac{121}{8} = -2[(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{121}{16}]$$

puis, factoriser : $f(x) = -2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)-\frac{11}{4}\right]\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)+\frac{11}{4}\right] = -2(x - \frac{3}{2})(x + 4)$

et ainsi retrouver les racines ….

<table>
<tr><td>Forme factorisée de $f(x)$</td><td>$f(x) = -2(x - \frac{3}{2})(x + 4)$</td></tr>
<tr><td>Forme canonique de $f(x)$</td><td>$f(x) = -2[(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{121}{16}]$</td></tr>
<tr><td>Tableau de variations de la fonction f.
Comme le coefficient –2 de x^2 est strictement négatif</td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>$\frac{-5}{4}$</td><td></td></tr><tr><td>f</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{121}{8}$</td><td>$\searrow$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>point(s) d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des abscisses.</td><td>A(–4 ; 0) et $B\left(\frac{3}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>point(s) d'intersection de $\mathscr{P}$ et de l'axe des ordonnées</td><td>C(0 ; 12)</td></tr>
<tr><td>tableau de signes de l'expression $-2x^2 - 5x + 12$</td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>-4</td><td></td><td>$\frac{3}{2}$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr></table></td></tr>
</table>

Exercice 3 Vecteurs. 0,5 + 1,5 + 2 points (durée : courte … le temps de faire une figure et de se repérer)

On considère un parallélogramme $ABCD$.

E est le symétrique de A par rapport à B.

F est le point défini par $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

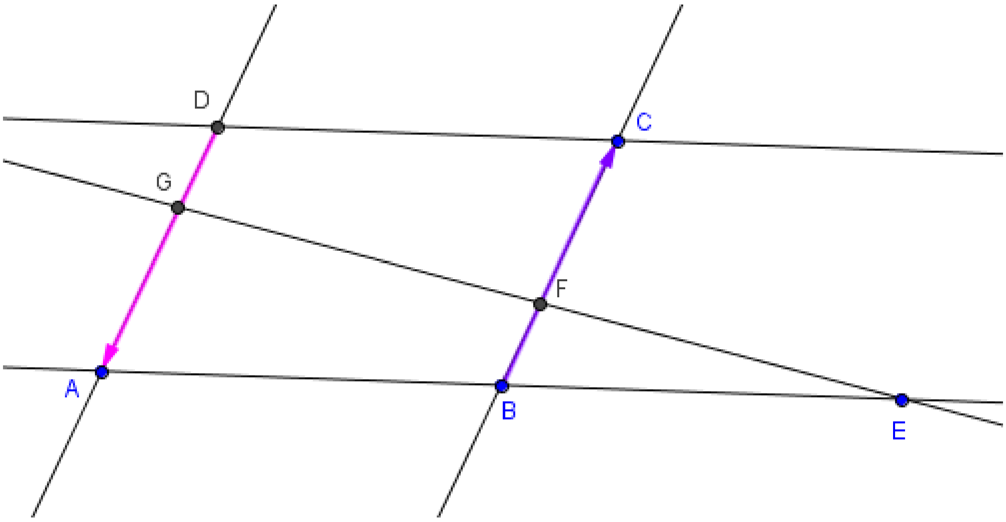
G est le point défini par $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

1) Faire une figure où vous ferez apparaître les points E, F et G. (Aucune justification n'est demandée).

2) On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G. (Aucune justification n'est demandée).

(Vous pouvez répondre en complétant ce tableau)



Points	Coordonnées dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$.	Points	Coordonnées dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})$.
A	(0 ; 0) (origine du repère)	E	(2 ; 0) B milieu de [AE], d'où, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$
B	(1 ; 0) marque l'unité en abscisses	F	F(1 ; $\frac{1}{3}$) $x_F - x_B = \frac{1}{3}(x_C - x_B)$ et $y_F - y_B = \frac{1}{3}(x_C - x_B)$
C	(1 ; 1) ABCD parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD}$	G	G(0 ; $\frac{2}{3}$) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}$ $= \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
D	(0 ; 1) marque l'unité en ordonnées		

(Les justifications n'étaient pas demandés mais il est important de savoir justifier)

3) **Démontrer** que les points *E*, *F* et *G* sont alignés.

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1-2\\ \frac{1}{3}-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}0-1\\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont égaux, donc, F est le milieu de [EG]

Autre méthode :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}x_F - x_E\\ y_F - y_E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}x_G - x_E\\ y_G - y_E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Comme $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, et, par conséquent, les points *E*, *F* et *G* sont alignés.

Autre méthode :

Coefficient directeur de (EF) : $\dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \dfrac{\frac{1}{3} - 0}{1 - 2} = \dfrac{-1}{3}$

Coefficient directeur de (EG) : $\dfrac{y_G - y_E}{x_G - x_E} = \dfrac{\frac{2}{3} - 0}{0 - 2} = \dfrac{-1}{3}$

Les coefficients directeurs étant égaux, les droites (EF) et (EG) sont parallèles …...

Autre méthode :

Une équation de la droite (EG) est égale à $y = mx + p$ (non parallèle aux axes)

$p = \dfrac{2}{3}$ (car G est le point d'abscisse 0 et d'ordonnée $\dfrac{2}{3}$)

Comme $E(2 ; 0) \in (EG)$, on sait : $0 = 2m + \dfrac{2}{3}$, d'où, $m = -\dfrac{1}{3}$

Une équation de (EG) est : $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.

Comme $F(1 ; \dfrac{1}{3})$ et que : $-\dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$, les coordonnées du point F vérifient une équation de (EG),

d'où, le point $F \in (EG)$.

Autre méthode :

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}$ (relation de Chasles) (1)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}$ (relation de Chasles). (2)

Or, E est le symétrique de A par rapport à B, d'où, $\overrightarrow{EA} = 2\,\overrightarrow{EB}$. (3)

$\overrightarrow{DG} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{DA}$, d'où, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA}$ (4)

$\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$ (5), et, $ABCD$ étant un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. (6)

de (5) et (6), il vient : $\overrightarrow{DG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. (7)

de (2) et (7), il vient : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. (8)

de (1), (3) et (4), il vient : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DA} = 2\left(\overrightarrow{EB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}\right)$ (9)

Par comparaison de (8) et (9), il vient : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$.

Exercice 4 Équations de droites ***2 + 3 points***

Les deux questions sont indépendantes.

On se place dans un repère quelconque.

1) Déterminer une équation de la droite d passant par le point A(2 ; –1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Une méthode :

$M(x\,;y) \in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, d'où : $-2(x-2) = y+1$ est une équation de d.

On peut réorganiser l'écriture de l'équation : par exemple, $y = -2x + 3$

Une autre méthode :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de d, une équation de d est $2x + y + c = 0$ (cf. cours)

$A(2\,;-1) \in d$, on a : $2\times2 + (-1) + c = 0$, d'où, $c = -3$.

Une équation de d est : $2x + y - 3 = 0$

Une autre méthode :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ étant un vecteur directeur de d, le coefficient directeur de d est $m = \dfrac{-2}{1} = -2$

On a donc : $y = -2x + p$ et, comme $A(2\,;-1) \in d$, on en déduit : $-1 = -2\times2 + p$, soit : $p = 3$

Une équation de d est : $y = -2x + 3$

2) Soit la droite d d'équation y = x + 1.

Soit la droite d_1 passant par les points A(–1 ; 5) et B(3 ; –2).

Calculer les coordonnées de C, point d'intersection de d et d_1 .

Les coordonnées de C sont les solutions du système formé par les équations de d et de d_1 .

Une équation de d_1 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-5\end{pmatrix}$ sont colinéaires, d'où : $4(y-5) = -7(x+1)$

Or, si $C \in d$, on sait : $y = x + 1$.

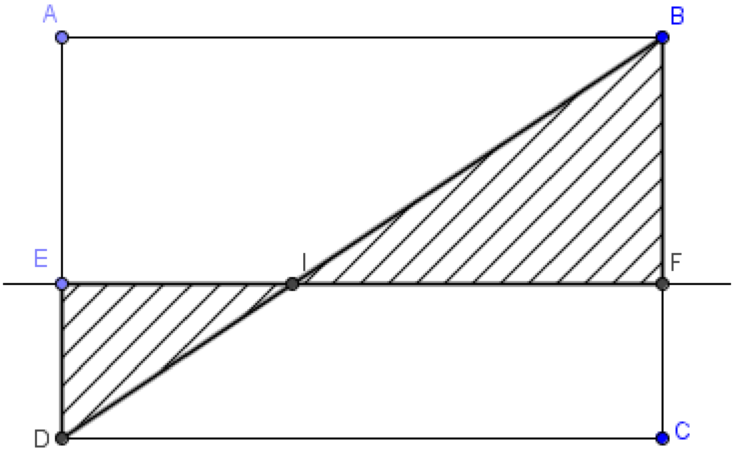
On obtient : $4(y+5) = -7y$, soit : $11y = 20$ $y = \dfrac{20}{11}$ puis : $x = \dfrac{20}{11} - 1 = \dfrac{9}{11}$

$C\left(\dfrac{9}{11};\dfrac{20}{11}\right)$

Exercice 5 ***3 points***

Toute recherche cohérente sera valorisée.

Sur cette figure, on sait : *ABCD* est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$, $E \in [AD]$, $F \in (BC)$ et $(EF) \parallel (CD)$.
I est le point d'intersection de (*EF*) et (*BD*).



On pose $ED = x$.
On note $\mathscr{A}$ la fonction donnant l'aire de la partie hachurée.
Quel est l'ensemble de définition de $\mathscr{A}$ et déterminer $\mathscr{A}(x)$.

$x \in [0 ; 4]$.
L'ensemble de définition de $\mathscr{A}$ est $[0 ; 4]$

En appliquant le théorème de Thalès dans les triangles DIE et DBA, on a : $\frac{IE}{AB} = \frac{DE}{DA}$, d'où :

$IE = \frac{6x}{4} = \frac{3}{2}x$.

$IF = 6 - IE = 6 - \frac{3}{2}x = \frac{12-3x}{2}$.

$FB = 4 - x$

$$\mathscr{A}(x) = \frac{EI \times ED}{2} + \frac{IF \times FB}{2} = \frac{\frac{3}{2}x \times x}{2} + \frac{\frac{12-3x}{2} \times (4-x)}{2} = \frac{3x^2 + 48 - 24x + 3x^2}{4} = \frac{3x^2 - 12x + 24}{2}$$