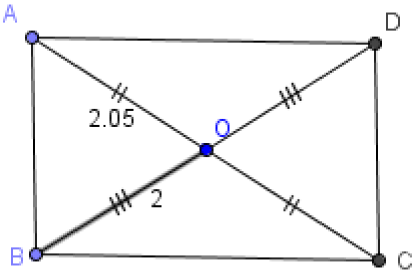
Exercice 1 Logique ***4 points***

Soit un quadrilatère $ABCD$.

1) Compléter le tableau suivant dans lequel on donne l'implication (I), en écrivant la contraposée (C) de (I), la réciproque (R) de (I) et la contraposée (CR) de (R), et, en indiquant si elles sont vraies ou fausses (aucune justification n'est demandée) :

	Énoncé	**Vrai-Faux**
(I)	Si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont de même longueur alors le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.	F
Commentaires : *il n'est pas suffisant d'avoir des diagonales de même longueur pour conclure que le quadrilatère est un rectangle. En revanche, la condition est nécessaire c'est pour cela que la réciproque est vraie.*		
(C)	Si le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un rectangle alors les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ne sont pas de même longueur.	F
Commentaires : *La contraposée de " Si (p) alors (q) " est " Si (non q) alors (non p). La contraposée d'une proposition et la proposition sont équivalentes (elles sont vraies en même temps et fausses en même temps. Ici : fausses)*		
(R)	Si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle alors les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont de même longueur.	V
Commentaires : *La réciproque de " Si (p) alors (q) " est " Si (q) alors (p).*		
(CR)	Si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ne sont de même longueur alors le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un rectangle.	V

2) On donne la figure suivante avec les indications codées sur la figure.



$ABCD$ est-il un rectangle ?

***ABCD* n'est pas un rectangle.**

Quelle proposition avez-vous utilisée pour donner votre réponse ? **La contraposée de la réciproque :**

les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ étant de longueur différente le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un rectangle.

Commentaires : Pour démontrer on utilise une proposition vraie. On cherche à vérifier les conditions suffisantes.

Ici : $AC = 2\times 2{,}05 = 4{,}1$ et $BD = 2\times 2 = 4$

Comme $4{,}1 \neq 4$, la proposition (CR) s'applique.

Exercice 2 ***avec les valeurs absolues et les racines carrées*** ***5 points***

1) Écrire sans les barres |.| de valeur absolue :

Rappel du cours : $|\text{Truc}| = \begin{cases} Truc \text{ lorsque } Truc \text{ est positif} \\ \text{opposé}(Truc) \text{ lorsque } Truc \text{ est négatif} \end{cases}$

a) $|10 - 2\pi| = 10 - 2\pi$ b) $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

c) $|x-5|+|x+3| =$ (étude à faire selon les valeurs de x)

Commençons par étudier le signe de x – 5 et de x + 3

$x-5=0$ lorsque $x=5$, $x-5>0$ lorsque $x>5$ et $x-5<0$ lorsque $x<5$.
$x+3=0$ lorsque $x=-3$, $x+3>0$ lorsque $x>-3$ et $x+3<0$ lorsque $x<-3$.

Si $x \leqslant -3$ alors $|x-5|+|x+3| = -(x-5)-(x+3) = -2x+2$

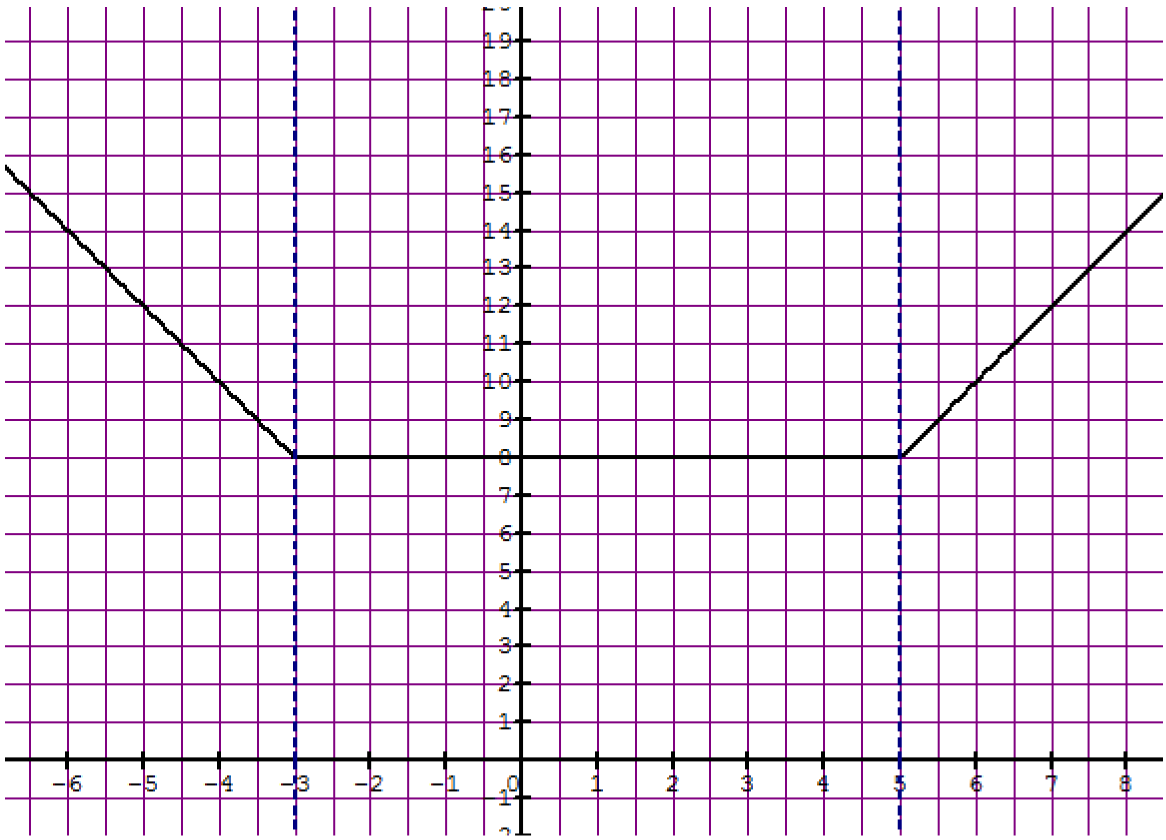
Si $-3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $|x-5|+|x+3| = -(x-5)+(x+3) = -2x+8$

Si $x \geqslant 5$ alors $|x-5|+|x+3| = (x-5)+(x+3) = 2x-2$

On peut résumer dans un tableau :

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
signe $x-5$		$-$	-8	$-$	0	$+$	
$\|x-5\|$		$-(x-5)$	8	$-(x-5)$	0	$x-5$	
signe $x+3$		$-$	0	$+$	8	$+$	
$\|x+3\|$		$-(x+3)$	0	$x+3$	8	$x+3$	
Somme		$-2x+2$	8	8	8	$2x-2$	

Complément :



Si on considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = |x-5|+|x+3|$, sa représentation graphique est une ligne brisée.

2) Résoudre les équations et inéquations suivantes : *(n'oubliez pas de conclure … en donnant l'ensemble des solutions).*

Rappel du cours : $\sqrt{Truc}$ existe si et seulement si $Truc \geqslant 0$

Lorsque $Truc \geqslant 0$ et $Machin \geqslant 0$ alors

$\sqrt{Truc}$ et $\sqrt{Machin}$ sont dans le même ordre que *Truc* et *Machin*.

Conséquences : on doit chercher les conditions sur la variable afin d'avoir *Truc* et *Machin* positifs ou nuls avant toute autre " intervention ".

a) $\sqrt{x} \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant 16 \end{cases}$ $\mathcal{S}_1 = [0\ ;\ 16]$ (Il est évident que $4 = \sqrt{16}$)

b) $\sqrt{x-1} \geqslant 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 10$ $\mathcal{S}_2 = [10\ ;\ +\infty[$

Rappel du cours : $|Truc|$ est un réel positif ou nul.

Conséquences : $|Truc| = Machin$ avec *Machin* strictement négatif n'a pas de solutions.

Lorsque *Machin* est positif,

deux cas : soit *Truc* est positif, soit *Truc* est négatif

ce qui donne :

pour une égalité : $|Truc| = Machin$

$Truc = Machin$ ou opposé$(Truc) = Machin$

pour une inégalité : $|Truc| \leqslant Machin$

$0 \leqslant Truc \leqslant Machin$ ou $0 \leqslant$ opposé$(Truc) \leqslant Machin$

opposé$(Machin) \leqslant Truc \leqslant 0$

soit : opposé$(Machin) \leqslant Truc \leqslant Machin$

c) $|x-2| = 3 \Leftrightarrow x-2 = -3$ ou $x-2 = 3 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 5$ $\mathcal{S}_3 = \{-1\ ;\ 5\}$

d) $|2x+1| = -1$ aucune solution $\mathcal{S}_5 = \varnothing$

e) $|2x+1| \leqslant 4 \Leftrightarrow -4 \leqslant 2x+1 \leqslant 4 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2x \leqslant 3 \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2}$ $\mathcal{S}_6 = \left[\dfrac{-5}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Exercice 3 ***les fonctions de la forme*** $\sqrt{u}$ ***,*** $\frac{1}{u}$ ***.*** ***4 points***

On considère une fonction u définie sur $[-7 \,;\, 12]$ dont on connaît le tableau de variations et quelques valeurs (présentes dans ce tableau) $u(-7) = -15$, $u(3) = 4$, $u(8) = -17$, $u(12) = -1$, $u(1) = u(6) = 0$.

x	-7		1		3		6		8		12
u	-15	$\nearrow$	**0**	$\nearrow$	4	$\searrow$	**0**	$\searrow$	-17	$\nearrow$	-1

a) Donner l'ensemble de définition et les variations de la fonction $f = \sqrt{u}$.

f est définie si et seulement si $u(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [1 \,;\, 6]$. $E_f = [1 \,;\, 6]$.

u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations

d'où, f est strictement croissante sur $[1 \,;\, 3]$ et strictement décroissante sur $[3 \,;\, 6]$.

Le maximum est atteint en 3 et vaut $\sqrt{4} = 2$

Résumé dans un tableau :

x	-7 Non définie		1		3		6		8 Non définie		12
u	-15	$\nearrow$	**0**	$\nearrow$	4	$\searrow$	**0**	$\searrow$	-17	$\nearrow$	-1
signe $u(x)$		$-$	**0**	$+$		$+$	**0**	$-$	$-$		$-$
$f = \sqrt{u}$	Non définie		**0**	$\nearrow$	2	$\searrow$	**0**		Non définie		

b) Donner l'ensemble de définition et les variations de la fonction $g = \frac{1}{u}$.

g est définie si et seulement si $u(x) \neq 0$ si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq 6$. $E_g =]-\infty \,;\, 1[\cup]1 \,;\, 3[\cup]3 \,;\, +\infty[$

u et $\frac{1}{u}$ ont des variations inverses.

d'où, g est strictement décroissante sur $]-7 \,;\, 1[$ et sur $]1 \,;\, 3]$ et sur $[8 \,;\, 12]$
et strictement croissante sur $[3 \,;\, 6[$ et sur $]6 \,;\, 8]$.

Résumé dans un tableau :

x	-7		1		3		6		8		12
u	-15	↗	**0**	↗	4	↘	**0**	↘	-17	↗	-1
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{15}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{4}$	↗	‖	↗	$-\frac{1}{17}$	↘	

(0 n'a pas d'inverse d'où quand $u(x) = 0$ (2ième ligne, on ne peut pas calculer son image par la fonction inverse)

Exercice 4 lecture graphique : Nombre dérivé et tangente. 4 points

Sur la représentation graphique de la page 3 les droites tracées sont les tangentes aux points A, B, C d'abscisses respectives 1 ; –3 ; 2,5.

(Les croix sur le quadrillage représentent des points sur les tangentes pour faciliter la lecture graphique)

1) Par lecture graphique donner les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(-3)$, $f'(2{,}5)$

$f'(1) = -1$ (coefficient directeur de la tangente en A d'abscisse 1)
$f'(-3) = 7$ (coefficient directeur de la tangente en B d'abscisse –3)

$f'(2{,}5) = \frac{17}{4}$ (coefficient directeur de la tangente en C d'abscisse 2,5)

2) On sait que $f'(0) = -2$.

Tracer la tangente au point d'abscisse 0, et,

on trace une droite de coefficient directeur –2 à partir du point d'abscisse 0 (point D sur le graphique)

déterminer une équation de cette tangente sachant que l'équation de la courbe est $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{4}{3}$

$f(0) = -\frac{4}{3}$, on a donc : $\dfrac{y - -(\frac{4}{3})}{x-0} = -2$, d'où, $y = -2x - \frac{4}{3}$ est une équation de la tangente au point d'abscisse0.

Exercice 5 Calculs d'un nombre dérivé 3 points

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;+\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x-1}$.

h est un réel non nul et supérieur à –4.

1) Calculer $f(5+h) - f(5)$ en fonction de h, puis montrer que $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{4}{2\sqrt{4+h}+4}$

$f(5+h) - f(5) = 2\sqrt{4+h} - 2\times 2 = 2\sqrt{4+h} - 4$ (*aucune simplification possible sous cette forme*)

Pour montrer que $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{4}{2\sqrt{4+h}+4}$, tout calcul où apparaît :

$\left(2\sqrt{4+h}-4\right)\left(2\sqrt{4+h}+4\right) = 4\times(4+h)-16 = 4h$ est valable.

Comme $h \neq 0$, en divisant par h, on obtient : $\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{4}{2\sqrt{4+h}+4}$

2) En déduire le nombre dérive $f'(5)$

Quand h tend vers 0, on a : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4}{2\sqrt{4+h}+4} = \dfrac{4}{2\sqrt{4}+4} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

$f'(5) = \dfrac{1}{2}$.

Graphique pour l'exercice 4