Exercice 1 Une étude de fonctions 10 points

Avertissement : il ne s'agit pas de lecture graphique …. mais le graphique donné à la fin de l'exercice peut être une aide pour contrôler les résultats obtenus.

En cas d'incohérence entre vos résultats et le graphique et si vous ne retrouvez pas la provenance de votre erreur, indiquez-le sur votre copie.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-6}$

1) Justifier que la fonction f est définie sur $]-\infty;-2[\cup]-2;3[\cup]3;+\infty[$.

***Commentaires** :*

f est définie si et seulement si $x^2 - x - 6 \neq 0$.
Il s'agit d'une équivalence.
Il ne suffit pas dé vérifier que –2 et 3 sont des valeurs exclues,
il faut aussi justifier que les autres nombres réels ne sont pas exclus.

Résolution de $x^2 - x - 6 = 0$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 25 = 5^2$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-5}{2\times1} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2\times1} = 2$

Le dénominateur s'annule pour $x = -2$ et $x = 3$, ces deux réels (et seulement eux) sont donc exclus.

2) Pour tout réel x différent de –2 et 3, calculer $f'(x)$.

f est le **quotient** de deux fonctions :

$u : x \mapsto x + 3$ (fonction affine) et $v : x \mapsto x^2 - x - 6$ (fonction polynôme du second degré).

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x - 1$.

Comme $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$,

on obtient : $f'(x) = \dfrac{1\times(x^2-x-6)-(2x-1)(x+3)}{(x^2-x-6)^2} = \dfrac{x^2-x-6-2x^2-6x+x+3}{(x^2-x-6)^2} = \dfrac{-x^2-6x-3}{(x^2-x-6)^2}$

Commentaire :
Schéma à avoir en tête (ou à écrire)

Fonction quotient	$f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-6}$	f est de la forme $\dfrac{u}{v}$
Les formules	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	
Les facteurs et leurs dérivées	$u(x) = x + 3$ $v(x) = x^2 - x - 6$	*u : somme de …. (fonction affine)* : $u'(x) = 1$ *v : somme de …. (fonction 2^d degré)* :$v'(x) = 2x - 1$
Application de la formule	$f'(x) = \dfrac{1\times(x^2-x-6)-(2x-1)(x+3)}{(x^2-x-6)^2}$	

3) a) Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

Puisque le dénominateur est **strictement positif** sur $]-\infty;-2[\cup]-2;3[\cup]3;+\infty[$,

le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur : $-x^2-6x-3$

On reconnaît une expression du second degré :

discriminant $\Delta = b^2-4ac = 24 = 4\times 6$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2\sqrt{6}}{2\times(-1)} = -3+\sqrt{6}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -3-\sqrt{6}$

Comme **le coefficient (–1) de x^2 est strictement négatif**, on a :

$f'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty\ ;-3-\sqrt{6}[\cup]-3+\sqrt{6}\ ;+\infty[$
$f'(x) > 0$ pour $x \in]-3-\sqrt{6}\ ;-3+\sqrt{6}[$
$f'(x) = 0$ pour $x = -3-\sqrt{6}$ ou $x = -3+\sqrt{6}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Propriété :

Si $f'(x) \leqslant 0$ sur un intervalle I alors f décroissante sur cet intervalle I.

Si $f'(x) \geqslant 0$ sur un intervalle I alors f croissante sur cet intervalle I.

x	$-\infty$		x_2		-2		x_1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	‖	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	‖	$\searrow$	

Commentaire :

L'allure de la courbe donnée à la fin de l'exercice permet de contrôler la vraisemblance du résultat.

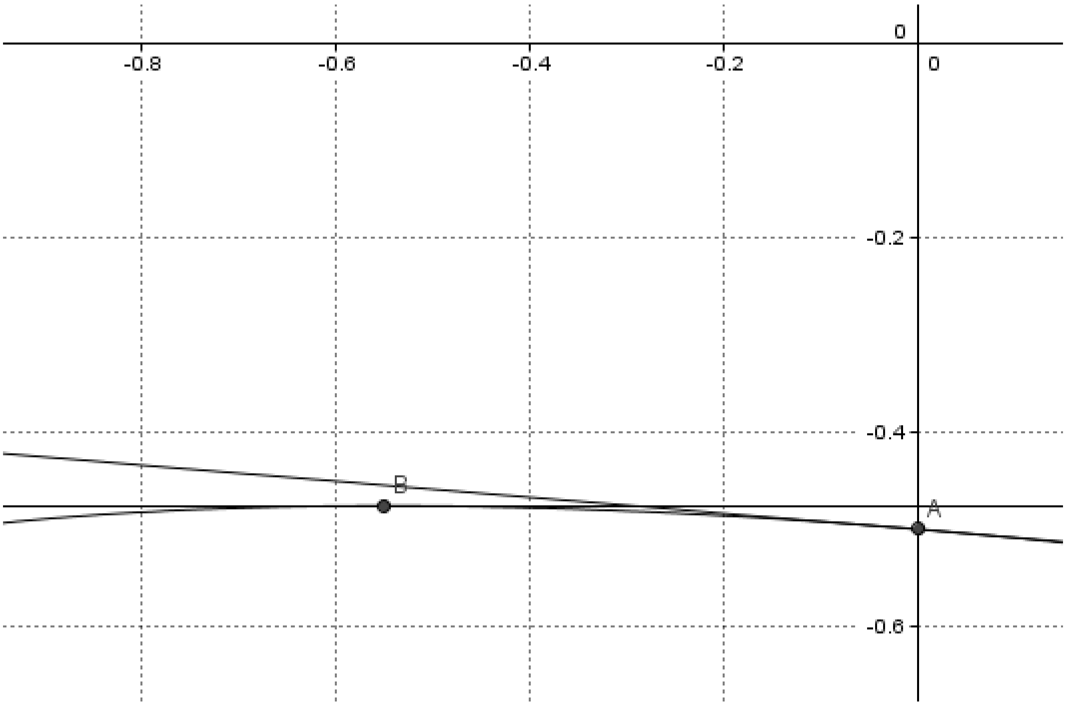
4) Donner une équation de la tangente à C_f , courbe représentative de f, au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = -\dfrac{3}{36} = -\dfrac{1}{12}$.

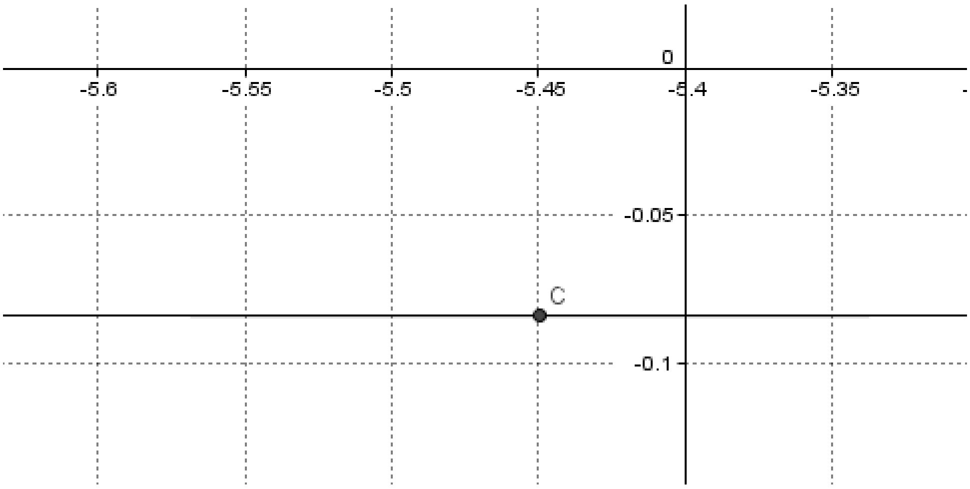
T est donc la droite de coefficient directeur $-\dfrac{1}{12}$ et d'ordonnée à l'origine : $-\dfrac{1}{2}$.

Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est : $y = -\dfrac{1}{12}x-\dfrac{1}{2}$

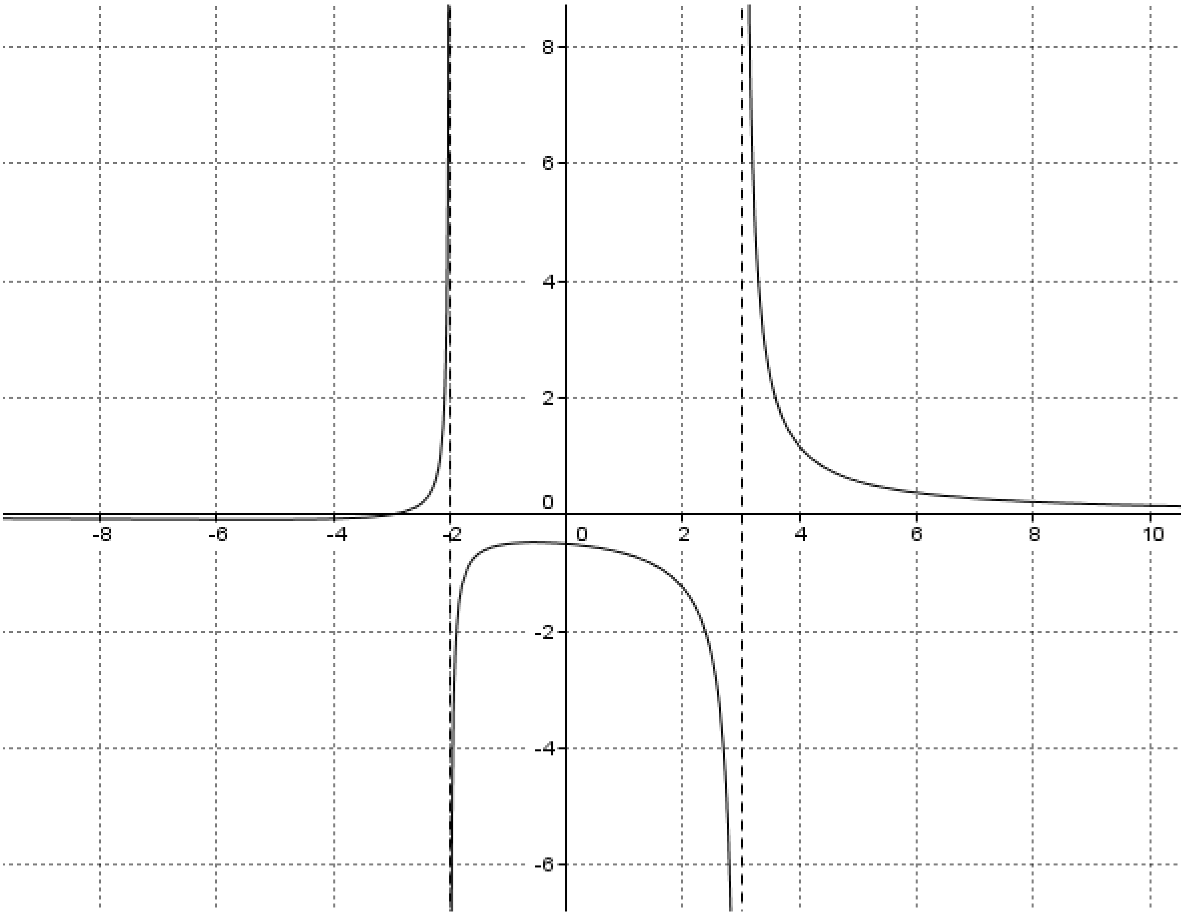
Un zoom sur le point A(0 ; *f*(0)) et le point $B\left(-3+\sqrt{6};f\left(-3+\sqrt{(6)}\right)\right)$



Un zoom sur le point $C\left(-3-\sqrt{6};f\left(-3-\sqrt{(6)}\right)\right)$



La tangente en C et la courbe sont extrêmement proches …



Exercice 2 suites

La suite (u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_n = n^2 - 2n + 3$

1) Calculer u_0, u_1, u_2

$u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$

2) Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de n.

$u_{n+1} = (n + 1)^2 - 2(n + 1) + 3 = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3 = n^2 + 2$

3) Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2) - (n^2 - 2n + 3) = 2n - 1$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Si $n \geqslant 1$ alors $2n - 1 \geqslant 1$, d'où, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Or, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ équivaut à $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Exercice 3 suites …

La suite (v_n) est la suite définie sur ℕ par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 3 \end{cases}$

la suite (w_n) est la suite définie sur ℕ par $\begin{cases} w_0 = 10 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + 3 \end{cases}$

1) Calculer v_1, v_2, v_3.

$v_1 = \frac{1}{2} v_0 + 3 = 0 + 3 = 3,$

$v_2 = \frac{1}{2} \times v_1 + 3 = \frac{1}{2} \times 3 + 3 = \frac{9}{2}.$

$v_3 = \frac{1}{2} \times v_2 + 3 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} + 3 = \frac{21}{4}$

2) Calculer w_1, w_2, w_3.

$w_1 = \frac{1}{2} w_0 + 3 = 5 + 3 = 8,$

$w_2 = \frac{1}{2} \times w_1 + 3 = \frac{1}{2} \times 8 + 3 = 7.$

$w_3 = \frac{1}{2} \times w_2 + 3 = \frac{7}{2} + 3 = \frac{13}{2}.$

3) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+2} en fonction de v_n.

$$v_{n+2} = \frac{1}{2} v_{n+1} + 3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} v_n + 3\right) + 3 = \frac{1}{4} v_n + \frac{9}{2}$$

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n)$

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \left(\frac{1}{2} v_{n+1} + 3\right) - \left(\frac{1}{2} v_n + 3\right) = \frac{1}{2}(v_{n+1} - v_n)$$

Commentaires :
Différencier bien les deux modes de génération des suites.
Dans l'exercice 2, la suite est définie de façon ***explicite*** en fonction de *n*.
L'image de *n* par *u* est notée u_n et ss traite comme la notation image par *u* de *n*, notée $u(n)$.
On calcule u_0, u_1, u_2, …. u_{n+1}, …
en remplaçant *n* dans l'expression $n^2 - 2n + 3$ respectivement par 0, 1, 2, …, $n + 1$, …

Le reste des calculs dépend de votre maîtrise en calculs algébriques.

Dans l'exercice 3, les suites sont définies par ***récurrence*** (on définit un terme en fonction de termes qui le précèdent).
On calcule v_1 lorsqu'on connaît le terme précédent v_0.
On calcule v_2 lorsqu'on connaît le terme précédent v_1 ….
On calcule v_{n+2} lorsqu'on connaît le terme précédent v_{n+1} et on calcule v_{n+1} lorsqu'on connaît son précédent v_n … d'où, le résultat du 3/.