Exercice 1 (fonction …) ***4 points***

Rappel des méthodes d'étude d'une fonction :

* Ensemble de définition …

** Dérivabilité ….

*** Calcul de la fonction dérivée f' …

**** Étude du signe de la dérivée $f'(x)$….

***** Variations de la fonction f

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1) Déterminer le sens de variation de f.

f, étant un polynôme défini sur $\mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et,

pour tout x réel, $f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 3 \times 2x + 9 \times 1 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Comme, pour $x \neq 3$, $(x-3)^2 > 0$, et,
pour $x = 3$, $(x-3)^2 = 0$,
la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Synthèse dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\nearrow$	

2) Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

Rappel : T est la droite de coefficient $f'(0)$ passant par A(0 ; f(0)).

On a : $f'(0) = 9$ (coefficient directeur de la tangente) et $f(0) = 0$ (ordonnée à l'origine), d'où, une équation de T est : $y = 9x$

Exercice 2 suites …. ***8 points***

(Les quatre questions sont indépendantes)

Rappel du cours et méthodes :

Pensez à regarder les premiers termes … (pas trop! souvent trois termes suffisent)

Si il n'apparaît aucune constante additive, aucune constante multiplicative, la suite n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique (question 1)

Si **il semble** qu'il est possible d'avoir une constante additive ou une constante multiplicative …

le **démontrer pour tout entier naturel *n***. (questions 2 et 3).

Au cas où l'écriture est reconnue, rappeler le théorème du cours.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique …. (chaque mot de cet énoncé est important)

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique …. (chaque mot de cet énoncé est important)

Commencer par reconnaître la suite, appliquer les formules (ou savoir les retrover) du cours.

1) Dire si les suites sont arithmétiques, géométriques ou ni l'une, ni l'autre.

Dans tous les cas, **justifier votre réponse**.

a) (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=2u_n+1 \end{cases}$

$u_1 = 5$, $u_2 = 11$, comme $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, la suite n'est pas une suite arithmétique.

Comme $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$, la suite n'est pas une suite géométrique.

b) (v_n) est définie par $v_n = 2(n-1) + n$.

$v_n = 3n - 2$, la suite est donc une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -2$
En effet : pour **tout** $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3$

ou bien
on applique la propriété suivante :
l'égalité $u_n = a + rn$ (ici : $a = -2$ et $r = 3$) caractérise une suite arithmétique de raison r.

c) (w_n) est définie par $w_n = 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

la suite (w_n) est une suite géométrique de premier terme $w_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

En effet : pour **tout** $n\in\mathbb{N}$, $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$.

ou bien
on applique la propriété suivante :
l'égalité $u_n = a\ b^n$ (ici : $a = 5$ et $b = \frac{1}{2}$) caractérise une suite géométrique de raison b.

2) n étant un entier naturel, on considère la suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $v_{15} = 12$.

On pose $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{99}$. Calculer S.

De v_0 à v_{15} il y a 15 étapes où on ajoute $\frac{1}{2}$. $v_0 = 12 - 15\times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

de v_{15} à v_{99}, il y a 99 – 15 = 84 étapes où on ajoute $\frac{1}{2}$. $v_{99} = 12 + 84\times \frac{1}{2} = 54$.

S est la somme de 100 termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'où,

$$S = \frac{\left(\frac{9}{2}+54\right)\times 100}{2} = \frac{117\times 100}{4} = 2\,925$$

Remarque :

S n'est pas la suite arithmétique.

La suite arithmétique est la suite (v_0, v_1, v_2, ….)

3) n étant un entier naturel, on considère la suite géométrique telle que $w_2 = 4$ et $w_4 = 36$.

Montrer qu'il existe deux suites (w_n) vérifiant ces données.

Pour chacune donner les termes w_0, w_1, w_3.

Soit q la raison de la suite géométrique.

On a donc : $w_4 = w_3\times q = w_2\times q^2$.

On en déduit : $q^2 = 9$, soit $q = 3$ ou $q = -3$.

Une des suites : $w_0 = \frac{4}{9}$, $w_1 = \frac{4}{3}$, $w_3 = 12$

L'autre suite : $w_0 = \frac{4}{9}$, $w_1 = -\frac{4}{3}$, $w_3 = -12$

4) n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3, on considère la somme $\Sigma = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n}$.

Calculer Σ en fonction de n.

Σ est la somme de $n + 1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

On a donc : $\Sigma = \dfrac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

Remarque :

Σ n'est pas la suite géométrique

La suite géométrique est la suite $\left(1 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3^2} ; ...\right)$

Exercice 3 suites … ***8 points***

On considère pour n entier naturel **non nul**, la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+2}{n}$

et la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n - 1}{v_n + 1} \end{cases}$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et v_1, v_2, v_3, v_4.

$u_1 = \dfrac{1+2}{1} = 3$, $u_2 = \dfrac{2+2}{2} = 2$, $u_3 = \dfrac{3+2}{3} = \dfrac{5}{3}$, $u_4 = \dfrac{4+2}{4} = \dfrac{3}{2}$

$v_1 = 3$, $v_2 = \dfrac{3\times3-1}{3+1} = 2$, $v_3 = \dfrac{3\times2-1}{2+1} = \dfrac{5}{3}$, $v_4 = \dfrac{3\times\left(\frac{5}{3}\right)-1}{\frac{5}{3}+1} = (5-1)\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{2}$.

Remarques :

bien distinguer : (u_n) définie de façon explicite ($u_n = f(n)$ … on remplace n par 1, par 2, par 3, …)

(v_n) définie par récurrence : $v_{n+1} = g(v_n)$, on remplace par v_1 pour calculer v_2, on remplace par v_2 pour calculer v_3 …

b) Ces calculs permettent-ils de prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales ? Justifier votre réponse.

On ne peut pas conclure en calculant seulement quelques termes.

On n'a aucune information sur le comportement des autres termes.

2) On pose $w_n = u_n - 1$, puis $x_n = \dfrac{1}{w_n}$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{1}{2}n$.

Par définition de x_n , on a : $x_n = \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1}{\frac{n+2}{n} - 1} = \dfrac{1}{\frac{n+2-n}{n}} = \dfrac{n}{2}$

Conséquence : la suite (x_n) est une suite arithmétique de premier terme $x_1 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

3) On pose $s_n = \dfrac{1}{v_n - 1}$

On admet que (s_n) est une suite arithmétique de premier terme $s_1 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.

Les résultats du 2/ et du 3/ permettent-ils de prouver que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales ? Justifier votre réponse.

Les suites (x_n) et (s_n) sont égales (suites arithmétiques de premiers termes égaux et de raisons égales , donc, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \frac{1}{w_n} = \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{v_n - 1}$

on a donc : $u_n - 1 = v_n - 1$, soit : $u_n = v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Les deux suites sont égales.

Complément : démonstration du résultat admis au 3/

$\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n - 1}{v_n + 1} \end{cases}$ et $s_n = \frac{1}{v_n - 1}$

évaluons $v_{n+1} - 1$ en fonction de v_n.

$v_{n+1} - 1 = \frac{3v_n - 1}{v_n + 1} - 1 = \frac{3v_n - 1 - v_n - 1}{v_n + 1} = \frac{2v_n - 2}{v_n + 1} = \frac{2(v_n - 1)}{v_n + 1}$

On a donc : $s_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1} - 1} = \frac{v_n + 1}{2(v_n - 1)}$

La différence : $s_{n+1} - s_n = \frac{v_n + 1}{2(v_n - 1)} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{v_n + 1 - 2}{2(v_n - 1)} = \frac{v_n - 1}{2(v_n - 1)} = \frac{1}{2}$.

Il reste à évaluer $s_1 = \frac{1}{v_1 - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$.

Ces deux résultats prouvent que (s_n) est une suite arithmétique de premier terme $s_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

À noter sur votre agenda :

DM8 à rendre le vendredi 20 mars 2015 :

81 page 123 ; TP1 page 136 ; 109 page 150 ; 29 page 168

Prochain DS : date à fixer …