Exercice 1 Logique *2 points*

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses.

Si la proposition est fausse, donner un contre-exemple qui prouve qu'elle est fausse.

Si la proposition est vraie, rappeler la propriété du cours qui prouve que la proposition est vraie.

***Proposition 1** : Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$*

La proposition 1 est fausse.

Preuve : $a = -5$ et $b = -2$ d'où $a^2 = 25$ et $b^2 = 4$.

On a bien $a < b$ mais $a^2 < b^2$.

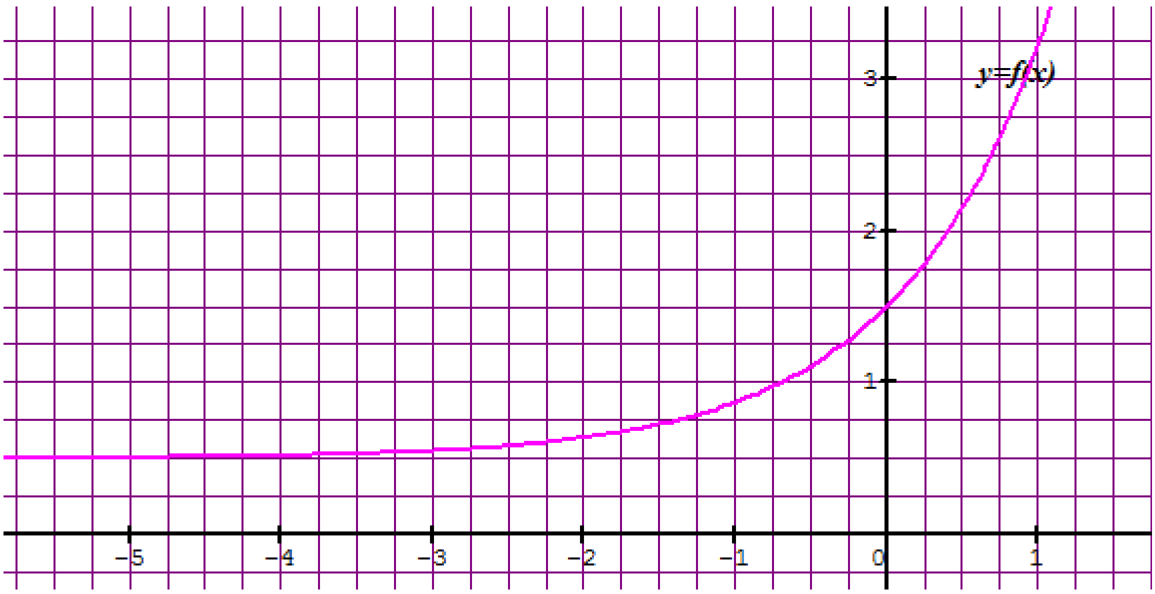
Proposition 2 : Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$.

La proposition 2 est vraie.

Preuve : La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

Commentaires :

* Dire : un carré est positif n'est pas une preuve de la proposition 2/



Voici la représentation graphique d'une fonction f telle que l'image des nombres négatifs est positive … et, pourtant, si $a < b < 0$ alors $f(a) < f(b)$.

Cette représentation graphique montre bien qu'écrire : " comme un carré est toujours positif alors l'ordre change " est incorrecte ; ce n'est pas cet argument qui prouve la proposition 2/.

** Dire : " si deux nombres sont négatifs alors on inverse l'ordre de leur carré " est une affirmation qui remplace l'affirmation proposée en 2/. Ce n'est pas une preuve.

Illustrer par un cas numérique n'est pas une preuve du cas général ...

*** La propriété concerne la fonction

La fonction agit et c'est cette action sur la relation d'ordre qui est analysée et qui est nommée : " variation de la fonction ".

Selon cette action, on nomme : " fonction décroissante sur ... " ou " fonction croissante sur ... ".

En tournant la manivelle, on fait " fonctionner " la fonction.

Elle agit … il se passe quelque chose …

quand ce quelque chose concerne la comparaison des ordres : ordre des antécédents par rapport à celui des images, on dit qu'on étudie la variation de la fonction.

Exercice 2 Fonction *3 points*

Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1) a) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f.

f, étant un polynôme du troisième degré, est dérivable sur ℝ, et,
pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) En déduire la variation de f sur ℝ.

Comme pour tout x réel, $3x^2 + 2 > 0$ (*cela doit devenir une évidence*), la dérivée de f est strictement positive et la fonction f est strictement croissante sur ℝ.

Commentaire :

" étudier la variation de f "

- on étudie le **signe** (*positif, négatif*) de la dérivée $f'(x)$ pour en déduire

la **variation** (*croissante, décroissante*) de f.

2) a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

$f(0) = -1$, $f(1) = 2$

b) Justifier, en rédigeant précisément, la proposition suivante :

L'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur ℝ et cette solution est strictement comprise entre 0 et 1.

On peut résumer l'ensemble des informations dans le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$			$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	2	↗	$+\infty$
valeurs de $f(x)$	$f(x) \leqslant -1$			$-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$				$f(x) \geqslant 2$	

Si $x \leqslant 0$, alors, $f(x) \leqslant f(0)$ car f est strictement croissante.

Si $x \geqslant 1$, alors, $f(x) \geqslant f(1)$ car f est strictement croissante.

Si $0 < x < 1$ alors $f(0) < f(x) < f(1)$ car f est strictement croissante.

Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$,

$f(x)$ ne peut pas s'annuler sur $]-\infty\ ; 0]$ et sur $[1 ; +\infty[$.
$f(x)$ ne s'annule qu'une seule fois et la solution α est nécessairement comprise entre 0 et 1.
Commentaires :
1) Ne pas confondre les consignes suivantes :
- Résoudre l'équation $f(x) = 0$
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions sur un intervalle …

2) Existence ou non d'une solution à une équation $f(x) = k$ et encadrement de cette solution.
Voici ce qui est essentiel et indispensable pour poursuivre l'étude des fonctions : (la notion sera complétée en terminale mais s'appuie sur la bonne compréhension de la lecture des graphiques et des tableaux commencée les années précédentes).
Conditions suffisantes (en première):
On sait que f est dérivable sur un intervalle I.
On sait que la dérivée $f'(x)$ garde un signe constant sur cet intervalle I.
L'argument essentiel du 2b/ est alors la **stricte monotonie** de f.

Ce qu'il faut apprendre à rédiger correctement est la description de cette observation faite dès les premières lectures graphiques.
On se place dans le cas particulier où $f(x) = 0$ mais la démarche est identique en remplaçant 0 par k.

x	$f(x)$	
…		
a	$f(a)$	$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour avoir l'encadrement de 0. (Remarque : dans ce cas, $f(a) \times f(b) < 0$)
Sol°	0	
b	$f(b)$	
…		

Comme f est strictement monotone :
Si $x \leqslant a$, on ne pourra pas avoir $f(x) = 0$ …..
Si $x \geqslant b$, on ne pourra pas avoir $f(x) = 0$ …..
L'unique solution " Sol° ", c'est-à-dire, l'unique nombre réel " Sol° " tel que f(Sol°) = 0,
est comprise entre a et b.

On peut résumer les deux cas dans deux tableaux de variations :

x	a	**Sol°**	b
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$f(a)$ (négatif)	0	$f(b)$ (positif)

x	a	**Sol°**	b
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$f(a)$ (positif)	0	$f(b)$ (négatif)

Exercice 3 *Variable aléatoire : Connaître le cours et mise en équation* *3 points*

X est une variable aléatoire prenant les valeurs –1 ; 0 et 2.

Calculer les nombres réels a et b sachant que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant et que E(X) = 0.

x_i	-1	0	2	Somme
p_i	$\frac{1}{4}$	a	b	*1*
$p_i\ x_i$	$-\frac{1}{4}$	*0*	*2b*	*E(X) = 0*

Propriétés utiles : La **somme** des probabilités de toutes les éventualités est égale à 1

L'espérance mathématique E(X) = $\sum_{1}^{n} p_i \times x_i$

ce qui permet une **mise en équations**

On sait que : $\begin{cases} \frac{1}{4}+a+b=1 \\ -\frac{1}{4}+0+2b=0 \end{cases}$ (les calculs sont **immédiats**)

On en déduit : $b = \frac{1}{8}$ et $a = \frac{5}{8}$

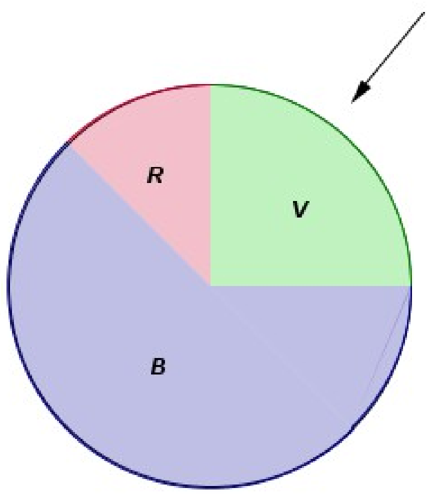
Exercice 4 *Donner du sens à l'espérance mathématique* *4 points*

Pour financer une sortie scolaire, on organise une loterie.

L'organisateur cherche à savoir à combien il doit fixer la mise x (c'est-à-dire : le prix à payer pour jouer une partie) pour s'assurer un bénéfice.

On fait tourner la roue ci-contre divisée en trois secteurs : Rouge (R), Vert (V), Bleu (B).

L'angle au centre du secteur rouge vaut 45° et celui du secteur vert vaut 90°.



Lorsque la roue s'arrête, une flèche indique l'un des secteurs. On considère que la probabilité est proportionnelle à l'angle du secteur.

Le joueur gagne 10 € lorsque la flèche indique le secteur rouge, 5 € lorsqu'elle indique le secteur vert et ne gagne rien lorsque le secteur est bleu.

1) Soit G la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

Déterminer la loi de probabilité de G et l'espérance mathématique E(G).

Un tour complet : 360°

Le secteur rouge fait $\frac{1}{8}$ du disque, le secteur vert : $\frac{1}{4}$ et le secteur bleu : $\frac{5}{8}$.

P(G = 0) = P(" Secteur bleu ") = $\frac{5}{8}$

P(G = 5) = P(" Secteur vert ") = $\frac{1}{4}$

P(G = 10) = P(" Secteur rouge ") = $\frac{1}{8}$

$E(G) = 0\times\frac{5}{8} + 5\times\frac{1}{4} + 10\times\frac{1}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ €

2) L'organisateur compte sur 1 000 parties et espère récolter ainsi 1 500€. Quel doit être le montant de la mise dans ces conditions ?

Le gain moyen d'un joueur par partie sans mettre de mise est de 2,5 € d'après le 1).

Cette somme est ***perdue par l'organisateur***.

Si on compte 1 000 parties, l'organisateur distribuera la somme de $2{,}5\times 1000 = 2\,500$ €.

Pour faire un bénéfice de 1 500 €, il doit recevoir en mise : 2 500 + 1 500 = 4 000 €

Pour espérer un gain de 1 500 € en 1 000 parties, il doit demander une mise de 4 €.

Autre méthode :

Soit Y le gain **algébrique** d'un joueur. *(Ce que peut espérer un joueur après avoir misé est : perdre 1,5 €)*

On sait que $E(Y) = -1{,}5$ $\left(\frac{1500}{1000} = 1{,}5\right)$

Or, $Y = X + m$ où m est le montant de la mise (m est une constante),

d'où, $E(Y) = E(X - m) = E(X) - m$, soit : $m = 2{,}5 + 1{,}5 = 4$

Exercice 5 Produit scalaire ***8 points***

Lorsqu'il s'agit d'un repère, ce repère est un repère orthonormal.

1) On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}x-3\\2x+1\end{pmatrix}$.

Déterminer x pour que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *soient orthogonaux.*

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si et seulement si $1\times(x-3)+2\times(2x+1)=0$

On en déduit : $x = \dfrac{1}{5}$.

2) a) Soit deux points A(2 ; –1) et B(3 ; 5).

Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ *de diamètre [AB].*

$M(x\,;y) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$

si et seulement si $(x-2)(x-3)+(y+1)(y-5)=0$

Une équation de $\mathscr{C}$ est : $(x-2)(x-3)+(y+1)(y-5)=0$

Remarques :

Il n'est pas nécessaire ici de développer … si pour d'autres questions, il est nécessaire de développer, on trouve :

$x^2+y^2-5x+y^2-4y+1=0$.

Si on a besoin de la forme canonique, $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{37}{4}$.

Il est facile de vérifier que le point $\Omega\left(\dfrac{5}{2};2\right)$ est le milieu de $[AB]$ $\dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{-1+5}{2} = 2$

et que $\dfrac{37}{4} = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2$ $AB^2 = (3-2)^2+(5-(-1))^2 = 37$

Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ *en A.*

$M(x\,;y) \in T$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

si et seulement si $(x-2)\times 1+(y+1)\times 6=0$

$x+6y+4=0$ est une équation de T.

Remarque :

vérifier que le point A …. $2+6\times(-1)+4 = …. = 0$

b) Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_1$ *des points M(x ; y) tels que* $x^2+y^2+2x-4y+4=0$

$x^2+y^2+2x-4y+4=0$ si et seulement si $(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+4=0$

si et seulement si $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

$\mathscr{E}_1$ est le cercle de centre Ω_1 $(-1\,;2)$ et de rayon 1.

c) Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_2$ *des points M(x ; y) tels que* $x^2+y^2+6x+8y+55=0$

$x^2+y^2+6x+8y+55=0$ si et seulement si $(x+3)^2-9+(y+4)^2-16+55=0$

si et seulement si $(x+3)^2+(y+4)^2=-30$.

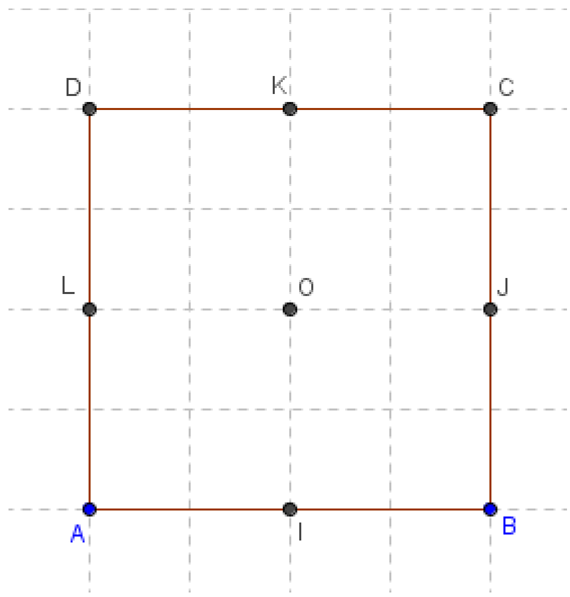
$\mathcal{E}_2$ est l'ensemble vide. $\mathcal{E}_2 = \emptyset$.

3) ABCD est un carré de centre O et I, J, K, L sont les milieux des côtés (voir figure).

La longueur du côté vaut 4.

Remarquer que par le théorème de Pythagore : $OA^2 = 4 + 4 = 8$

et que $AC^2 = 32$



Compléter les égalités :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = -16$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = 16$

c) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA}^2 = -8$

d) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$

e) $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{IL} = 8$

f) $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{LK} = -8$

Remarques :

Beaucoup de façons de faire …

*** Le plus immédiat : par projection orthogonale d'un des vecteurs sur l'autre vecteur.

*** Il est possible de travailler dans un repère orthonormal ….

par exemple : $A(0 ; 0)$, $B(4 ; 0)$, $D(0 ; 4)$, etc …

*** $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ d'où, c) et f).

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ ….

*** Méthode maladroite ici mais peut servir dans d'autre contexte

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LA}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}$, d'où, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LA})\cdot(\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}) = \overrightarrow{OL}\cdot\overrightarrow{OJ} + 0 + 0 + \overrightarrow{LA}\cdot\overrightarrow{JC}$

$= -2\times 2 + (-2\times 2) = -8$

*** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 16 + 0 = 16$

f) M étant un point quelconque sur [BD], calculer $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = 16.$$

En effet, le point M se projette orthogonalement sur (AC) en O.

Remarque : Dans le repère orthonormal choisi auparavant, $M(x ; y) \in (BD)$ d'équation $y = -x + 4$, d'où,

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ -x+4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC} = 4x + 4(-x + 4) = 16$