Il sera tenu compte dans l'évaluation de la copie du soin apporté à la rédaction.

Si vous ne réussissez pas à démontrer un résultat annoncé, vous pouvez l'admettre pour l'utiliser dans des questions suivantes en écrivant clairement que vous admettez ce résultat,

Rédiger chacun des exercices sur des feuilles distinctes (4 exercices = 4 copies)

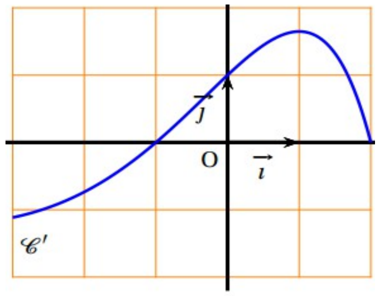
Exercice 1 ***4 points***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère une fonction *f* dérivable sur l'intervalle [–3 ; 2].

On dispose des informations suivantes :

* $f(0) = -1$.
* la dérivée f' de la fonction *f* admet la courbe $\mathscr{C}'$ ci-contre.
* $\mathscr{C}'$ passe par les points de coordonnées (–1 ; 0) et (0 ; 1).



A. *Faire le tableau des variations de f.*

Par lecture graphique, on a **le signe de $f'(x)$,** d'où, la variation de *f*.

x	-3		-1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Commentaire : la représentation graphique est celle de la fonction **dérivée** de *f*.

B. *Pour chaque affirmation suivante, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.*
1. La fonction f est croissante sur l'intervalle [–1 ; 2]
Vraie, puisque $f'(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle.
2. Pour tout réel x de l'intervalle [–3 ; 2], $f(x) \geqslant -1$.
Faux.
En effet, $f(0) = -1$ et *f* strictement croissante sur [–1 ; 2]. Si $-1 \leqslant x < 0$ alors $f(x) < -1$

C. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.*
$f'(0) = 1$ et $f(0) = -1$, d'où, une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = x - 1$

Commentaire : La courbe de f' permet de lire le nombre dérivé en 0 : $f'(0) = 1$ ($\mathscr{C}'$ passe par (0 ; 1))

On cherche donc une équation de la droite passant par le point de coordonnées (0 ; –1) ($f(0) = -1$)

et de coefficient directeur 1.

Exercice 2 *Figure à compléter et à rendre avec l'exercice en annexe* ***8 points***

On considère un triangle ABC, et I est le milieu de [BC].

***Question préliminaire** :*

Placer sur la figure en annexe le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

J est le point du segment [AC] telle que la longueur AJ = $\frac{2}{3}$ AC.

On appelle G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. *(Ne pas chercher à placer le point G maintenant).*

L'objectif de l'exercice est de déterminer la position du point G et de le construire par deux méthodes différentes.

Les deux parties peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie I- Étude par du calcul vectoriel

1) a) Justifier l'égalité suivante: $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{AI}$ puisque I étant le **milieu de [BC]**, on a : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Autre méthode : Soit D défini par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme dont les diagonales [BC] et {AD] ont même milieu I.

Par conséquent : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI}$ …

Autre méthode : I étant le milieu de [BC], on sait : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI}$

$2\overrightarrow{AI} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Commentaire : Il n'est pas possible de démontrer la propriété sans utiliser le fait que I est le milieu de [BC]

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ *et* $\overrightarrow{AG}$ *sont colinéaires,*

En déduire que le point G est sur la droite (AI).

Comme *G* est le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

On a alors : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{5}\overrightarrow{AI}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ étant colinéaires, les points A, G, I sont alignés.

2) a) *Montrer les deux égalités suivantes :*

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BC}\ \ et\ \ \overrightarrow{BG} = \frac{1}{5}\ \overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\ \overrightarrow{BC}\,.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,.$$

Commentaires :

Ne commencez pas la démonstration par la conclusion.

A priori, on ne sait pas qu'il y a l'égalité entre $\overrightarrow{BJ}$ et $\frac{1}{3}\ \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BC}$.

Toute démonstration qui semble aboutir sans jamais utiliser la définition du point J $\left(\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ est fausse.

Cela signifierait que, pour tout point J du plan, on a cette égalité. Étonnant !!!

b) En déduire que G est sur la droite (BJ).

$3\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $5\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, d'où, $3\overrightarrow{\mathrm{BJ}}=5\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ étant colinéaires, les points B, J, C sont alignés.

3) Construire le point G.

Le point G est le point d'intersection des droites (AI) et (BC).

Partie II- Étude par du calcul analytique.

On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

1) Donner sans justification les coordonnées des points A, B, C, I et J dans ce repère.

A(0 ; 0), B(1 ; 0), C(0 ; 1), $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{J}\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

On rappelle que G est le point défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\ \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\ \overrightarrow{AC}$.

Quelles sont les coordonnées de G dans le repère dans ce repère.

$\mathrm{G}\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right)$

Sans commentaires puisque c'est la **définition** même d'un **repère** qui est utile ici.

2) Déterminer une équation de la droite (AI) dans ce repère.

$\mathrm{M}(x\,;y)$ ∈ (AI) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} ½ \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où, une équation de (AI) est : $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y$, soit : $y = x$.

Commentaires : Toute équation sans signe = **n'est pas** une équation.

Ne confondez pas équation et fonction … Les liens sont très forts mais les " objets " mathématiques sont différents.

(AI) **<u>représente</u>** la fonction affine $f : x \mapsto x$, d'où, une équation de (AI) est : $y = f(x) = x$

Vérifier que G est un point de la droite (AI).

Comme $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, les coordonnées de G vérifient l'équation de (AI).

3) Déterminer une équation de la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}$.

$M(x;y) \in$ (BJ) si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

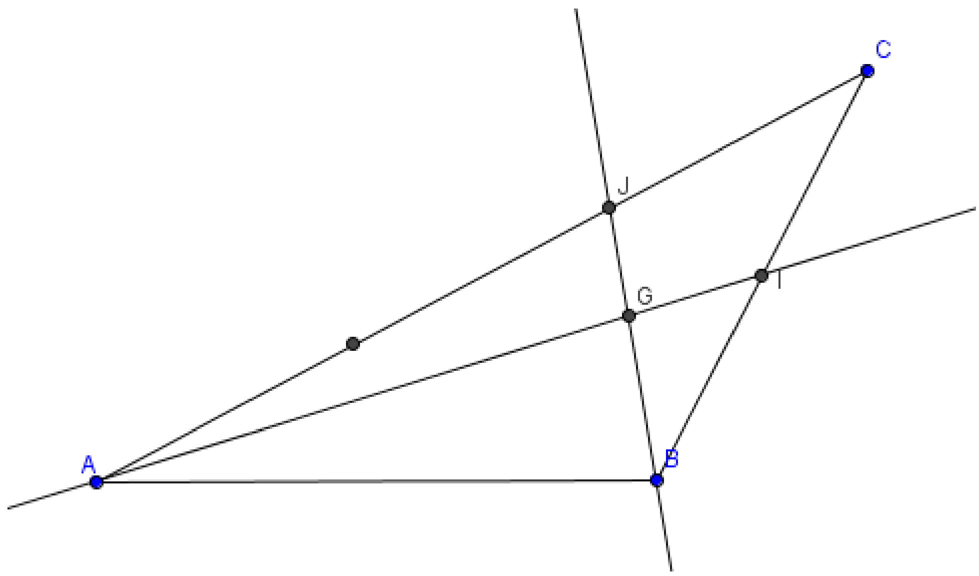
Or, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, d'où, $\frac{2}{3}(x-1)+y=0$ est une équation de (BJ).

(Toute autre écriture **équivalente** est correcte … ce qui n'est pas le cas de $-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ qui **n'est pas** une **équation** ...)

Montrer que G est le point d'intersection des droites (AI) et (BJ).

Les coordonnées de G vérifient cette équation, en effet : $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}-1\right)+\frac{2}{5} = -\frac{2}{5}+\frac{2}{5} = 0$

G est donc un point commun à (BJ) et à (AI)



Exercice 3 *4 points*

Dans une usine de produits cosmétiques, le coût de fabrication journalier d'une crème est donné (en euros) par $C(q) = 2q^2 + 40q + 200$, où q est la quantité produite en kilogrammes. La capacité de production est de 25kg par jour. Le prix de vente est de 90€ le kilo et on suppose que toute la production de l'entreprise est vendue.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A *Toute prise d'initiative cohérente sera prise en compte dans l'évaluation.*

1. Quelles quantités doit produire l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?

Le prix de vente étant de 90€ par kg, pour q kg vendu, la recette est $R(q) = 90q$ et le bénéfice est donné par :
$B(q) = R(q) - C(q) = -2q^2 + 50q - 200$.

Le coefficient de degré 2 est -2.

$-2 < 0$, l'expression du second degré $-2q^2 + 50q - 200 \geqslant 0$ lorsque q est pris entre les racines.

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 2\times(-2)\times(-200) = 900 = 30^2$

$q_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-50-30}{2\times(-2)} = 20$ et $q_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-50+30}{2\times(-2)} = 5$

Le bénéfice a lieu pour $q \in [5 ; 20]$

2. Quel est le bénéfice maximal que peut atteindre l'entreprise ?

Le maximum de B est atteint en $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = 12{,}5$ kg (ou $\dfrac{5+20}{2} = 12{,}5$)

Partie B

On admet que le bénéfice est donné, en euros, par $B(q) = -2q^2 + 50q - 200$

1. Calculer les racines de B, en déduire son signe.

Voir partie A

2. Expliquer pourquoi le tableau de variation de B est de la forme ci-dessous, préciser les valeurs de α, $B(\alpha)$, $B(0)$ et $B(25)$.

B, étant une **fonction du second degré**, est représentée par une parabole.

Comme le coefficient -2 de q^2 est négatif, la parabole, représentation graphique de B, a les branches tournées vers le bas.

$\alpha = 12{,}5$ $B(12{,}5) = 225$ $B(0) = -200$ $B(25) = -200$

q	0		α		25
$B(q)$			$B(\alpha)$		
	$B(0)$	$\nearrow$		$\searrow$	$B(25)$

3. Donner les variations des fonctions g et h définies par $g(q) = \sqrt{B(q)}$ et $h(q) = \dfrac{1}{B(q)}$.

La fonction racine carrée est définie sur $[0 ; +\infty[$, d'où, g est définie si et seulement si $B(q) \geqslant 0$.

u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations.

g est donc définie sur $[5 ; 20]$ et a les mêmes variations que B , d'où, g est strictement croissante sur $[5 ; 12{,}5]$ et strictement décroissante sur $[12{,}5 ; 20]$.

La fonction inverse est définie pour tout réel **NON NUL**, d'où, h est définie si et seulement si $B(q) \neq 0$.

u et $\frac{1}{u}$ ont des variations inverses.

h est définie sur [0 ; 5[∪]5 ; 20[∪]20 ; 25] et a des variations inverses de celles de B,
d'où, h est strictement croissante sur [12,5 ; 20[et sur]20 ; 25[
et strictement décroissante sur [0 ; 5[et sur]5 ; 12,5[.

Exercice 4 **4 points**
Partie A: Questionnaire à choix multiples.
Indiquer la ou les bonnes réponses.

1) Soit $f(x) = 5x^2 + 9x + 4$ sur ℝ.
a) $f(x) > 0$ pour tout x réel. Faux
b) $f(x) < 0$ pour tout x réel. Faux
c) $f(x)$ n'est pas de signe constant. Vrai
d) $f(x) < 0$ sur $]-\infty; 0]$. Faux

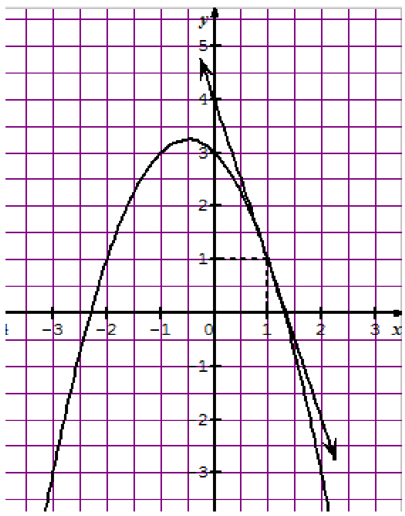
Commentaires : $5x^2 + 9x + 4$ a une racine évidente -1, l'autre racine est $-\frac{4}{5}$.

$$5x^2 + 9x + 4 > 0 \text{ pour } x \in \left]-\infty\ ; -1\right[\cup \left]\frac{-4}{5};+\infty\right[.$$

$$5x^2 + 9x + 4 < 0 \text{ pour } x \in \left]-1;-\frac{4}{5}\right[.$$

2) Soit $f(x) = \sqrt{3-x}$. Alors f est strictement décroissante sur:
a) $[0; +\infty[$. Faux
b) $]-\infty; 4]$ Faux
c) $[3; +\infty[$. Faux
d) $]-\infty; 3]$ Vrai
On doit avoir $3 - x$ $\geqslant 0$, ce qui est vrai seulement dans le d/
$x \mapsto 3 - x$ est une fonction affine strictement décroissante

3) Cette courbe représente une fonction f. Par lecture graphique :
a) $f'(1) = 1$ Faux
b) $f'(1) = -\frac{1}{3}$ Faux
c) $f'(1) = -3$ Vrai
d) La tangente à cette courbe en son point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x + 1$.
Faux



Le coefficient directeur de la tangente est -3, l'ordonnée à l'origine est 4.

4) Soit $d_1 : 5x - 2y - 1 = 0$ et $d_2 : -10x + 4y + 2 = 0$
a) $A(1 ; 2)$ appartient à d_1 et à d_2. Vrai
b) d_1 et d_2 sont sécantes. Faux
c) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d_1 Faux
d) Les vecteurs directeurs de d_1 et de d_2 sont colinéaires. Vrai

Les droites sont confondues : $-2(5x-2y-1) = -10x+4y+2$.
Les deux équations sont équivalentes.

Partie B: Vrai- Faux.
Dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.
1) La fonction $x \to 3x^2 - 8x + 2$ admet un maximum. **Faux**, la fonction est du second degré et le coefficient 3 de x^2 est strictement positif.

2) La fonction $x \to -4 + \dfrac{2}{x}$ a le sens de variation contraire à celui de la fonction inverse sur $]-\infty; 0[$. **Faux**
Cette fonction est de la forme $k.u + \lambda$ avec $k > 0$, donc, elle a la même variation que u

3) Si $RI = IS$ alors I est le milieu de $[RS]$. **Faux**. Construire un contre exemple avec R, I, S non alignés.