Objectif : Analyser un énoncé avant de se lancer dans des " calculs " ….

Exercice 1 : Dans un repère orthonormal

On se donne deux points distincts A et B et on connaît leurs coordonnées $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Indiquer une démarche dans chaque cas :

1) On a besoin d'une équation de la droite (AB).

Démarches : (Notion de vecteur directeur et/ou de coefficient directeur).

*** ***celle que je préfère*** …

$M(x ; y)$ étant un point quelconque de la droite (AB), écrire la relation de colinéarité entre $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $(y_B-y_A)(x-x_A)-(x_B-x_A)(y-y_A)=0$.

Évidemment, on peut aussi faire : $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

*** ***autre démarche*** : (vecteur directeur ...)

On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), d'où, une équation est de la forme : $ax + by + c = 0$.

Il reste à calculer c en remplaçant x et y par les coordonnées de A (ou de B).

*** ***Dans le cas où on est certain que (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées***, c'est-à-dire : $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de (AB) est $m = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Une équation de (AB) est $y = mx + p$.

Il reste à calculer p en remplaçant x et y par les coordonnées de A (ou de B).

2) On a besoin d'une équation de la médiatrice de $[AB]$.

Démarches :

*** ***celle que je préfère*** … (Notion de vecteur normal et/ou produit scalaire nul)

$M(x ; y)$ étant un point quelconque de la médiatrice de $[AB]$, et, I étant le milieu de $[AB]$

écrire la relation d'orthogonalité entre $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$I\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$, $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-x_I \\ y-y_I \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si

$(x_B-x_A)(x-x_I)+(y_B-y_A)(y-y_I)=0$. (produit scalaire : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$)

*** ***autre démarche***. (Notion de distance)

Pour tout $M(x ; y)$ de la médiatrice de $[AB]$, $MA = MB$ et puisque ce sont des longueurs, on peut traiter l'égalité des carrés : $MA^2 = MB^2$.

On obtient : $(x_A-x)^2+(y_A-y)^2=(x_B-x)^2+(y_B-y)^2$

Après développement et réduction, les termes au carré s'annulent, et, il reste une expression du premier degré en x et y.

3) On a besoin d'une équation de la perpendiculaire à (AB) en A.

Démarche : (Notion de vecteur normal et/ou produit scalaire nul)

*** ***la plus immédiate***…

$M(x\,;y)$ étant un point quelconque de la perpendiculaire à (AB) en A,

écrire la relation d'orthogonalité entre $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si

$(x_B-x_A)(x-x_A)+(y_B-y_A)(y-y_A)=0$. (produit scalaire : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$)

*** ***autre démarche*** : (vecteur normal ...)

On sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à (AB), d'où, une équation est de la forme : $ax+by+c=0$.

Il reste à calculer c en remplaçant x et y par les coordonnées de A.

4) On a besoin d'une équation du cercle de diamètre $[AB]$.

Démarche : (Notion d'orthogonalité et/ou produit scalaire nul)

*** ***la plus immédiate***…

$M(x\,;y)$ étant un point quelconque du cercle de diamètre $[AB]$, on sait : $\left\{\begin{array}{c}M=A\\\text{ou}\\M=B\\\text{ou}\\AMB\ \text{ est un triangle rectangle en } M\end{array}\right.$

Dans tous les cas : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\end{pmatrix}$ d'où $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$.

5) On a besoin d'une équation du cercle de centre A passant par B.

Démarche : (Notion de distance)

$M(x\,;y)$ étant un point quelconque du cercle de centre A passant par B, on sait que $AM=AB$.

Puisque ce sont des longueurs, on peut traiter l'égalité des carrés : $AM^2=AB^2$.

On obtient : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$

Exercice 2 : On connaît des équations de courbes …. dans un repère (O ; x, y).

Ne pas chercher à construire ces courbes. Une machine bien programmée le fera mieux … mais qui saura faire le programme si la notion n'est pas maîtrisée.

Soit la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^3+y^2-2xy-5=0$ et la courbe $\mathscr{H}$ d'équation $x^2+y^2+3xy+1=0$

Indiquer une démarche dans chaque cas , poser le calcul et effectuer si vous pensez que le calcul est " immédiat " (pour un élève de 1S ayant les connaissances de 1S).

1) Existe-t-il des points d'abscisse 0 sur $\mathscr{C}$? sur $\mathscr{H}$?

Les points d'abscisse 0 sur $\mathscr{C}$ ont pour ordonnées les solutions du système : $\begin{cases} x=0 \\ x^3+y^2-2xy-5=0 \end{cases}$

On obtient : $y^2 = 5$.

il existe deux points d'abscisse 0 sur $\mathscr{C}$, le point $A_1(0;\sqrt{5})$ et le point $A_2(0;-\sqrt{5})$.

Les points d'abscisse 0 sur $\mathscr{H}$ ont pour ordonnées les solutions du système : $\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2+3xy+1=0 \end{cases}$

On obtient : $y^2 + 1 = 0$ qui n'a aucune solution réelle.

il n'existe aucun point d'abscisse 0 sur $\mathscr{H}$.

2) La courbe $\mathscr{C}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ? La courbe $\mathscr{H}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions du système :

$\begin{cases} y=0 \\ x^3+y^2-2xy-5=0 \end{cases}$. On obtient : $x^3 = 5$.

Il existe un et un seul point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses : le point $B(\sqrt[3]{5};0)$.

les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{H}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions du système :

$\begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2+3xy+1=0 \end{cases}$. On obtient : $x^2 + 1 = 0$ qui n'a aucune solution réelle.

il n'existe aucun point d'intersection de $\mathscr{H}$ et de l'axe des abscisses.

3) Existe-t-il des points d'abscisse 1 sur $\mathscr{C}$? sur $\mathscr{H}$?

Les points d'abscisse 1 sur $\mathscr{C}$ ont pour ordonnées les solutions du système : $\begin{cases} x=1 \\ x^3+y^2-2xy-5=0 \end{cases}$

On obtient : $y^2 - 2y - 4 = 0$. $\Delta = \ldots = 20 = 4\times 5$

$y_1=\dfrac{2-2\sqrt{5}}{2\times 1}=1-\sqrt{5}$, $y_2=1+\sqrt{5}$

il existe deux points d'abscisse 1 sur $\mathscr{C}$, le point $C_1(1;1-\sqrt{5})$ et le point $C_2(1;1+\sqrt{5})$.

Les points d'abscisse 1 sur $\mathscr{H}$ ont pour ordonnées les solutions du système : $\begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2+3xy+1=0 \end{cases}$

On obtient : $y^2 + 3y + 2 = 0$. $\Delta = \ldots = 1$ $y_1=-2$, $y_2=-1$

il existe deux points d'abscisse 1 sur $\mathscr{H}$, le point $D_1(1;-2)$ et le point $D_2(1;-1)$.

4) Existe-t-il des points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$?

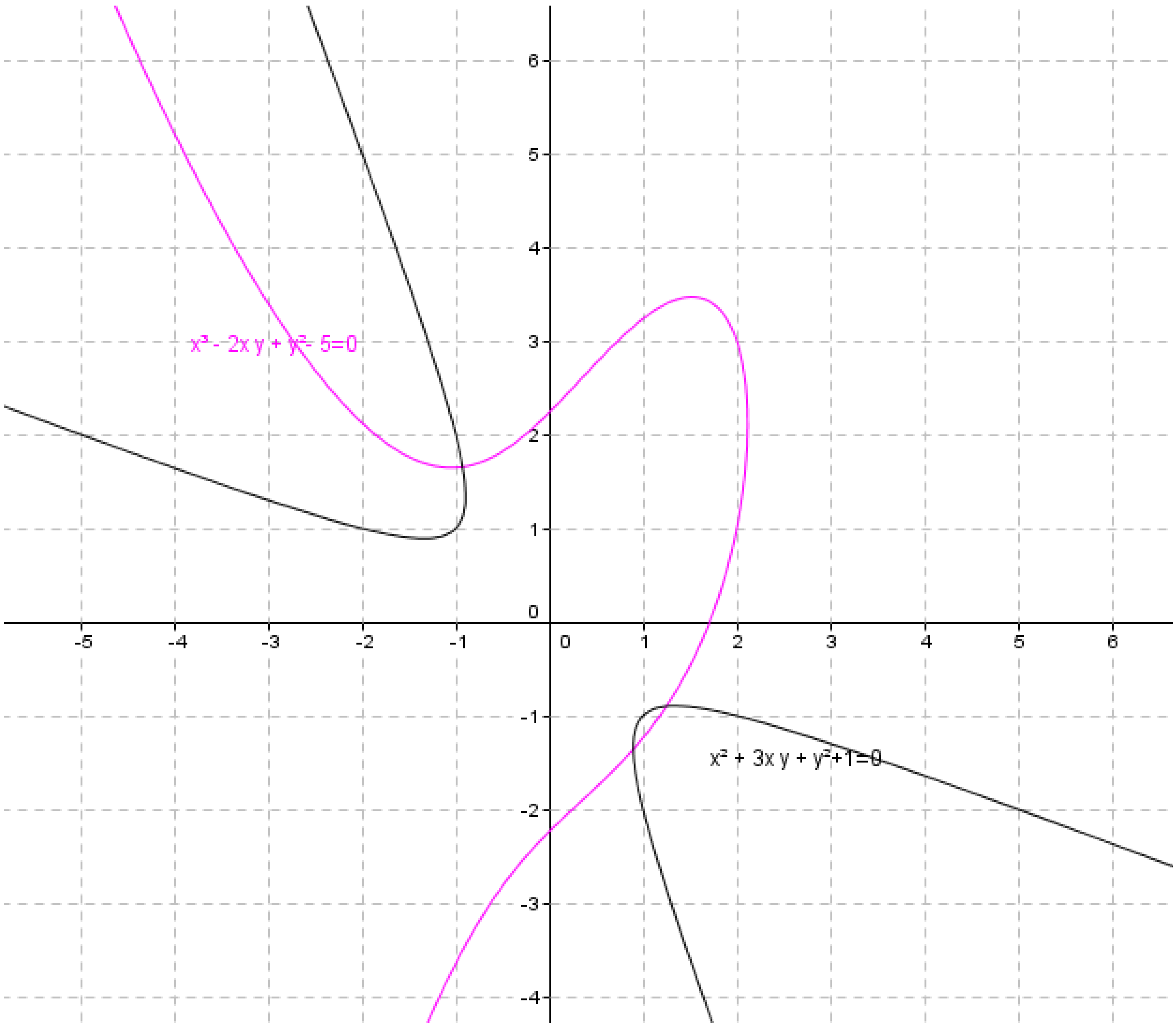
les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{H}$ sont les solutions du système : $\begin{cases} x^2+y^2+3xy+1=0 \\ x^3+y^2-2xy-5=0 \end{cases}$

En 1S, on n'a pas de méthode immédiate de résolution ….

D'après GeoGebra, il semble qu'il y ait 4 points d'intersection ….

5) $\mathscr{C}$ est-elle représentative d'une fonction f ? $\mathscr{H}$ est-elle représentative d'une fonction g ?

La réponse est non dans chaque cas … puisqu'aux questions précédentes, on a trouvé deux points d'ordonnées différentes pour une même abscisse.



Exercice 3 : Étude de fonctions *(Sans calculatrice)*

Indiquer une démarche dans chaque cas , poser le calcul et effectuer si vous pensez que le calcul est " immédiat " (pour un élève de 1S ayant les connaissances de 1S).

1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

a) admet-elle un maximum ? un minimum ?

Démarche :

f étant dérivable, on cherche la dérivée et on établit le tableau de signes de la dérivée.
Calculs : Dérivée d'un quotient

$f'(x) = \dfrac{2\times(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

f admet un minimum en -1 qui vaut $f(-1) = -1$
f admet un maximum en 1 qui vaut $f(1) = 1$

b) est-elle positive ? négative ?

Démarche :

On cherche le signe de $f(x)$ …

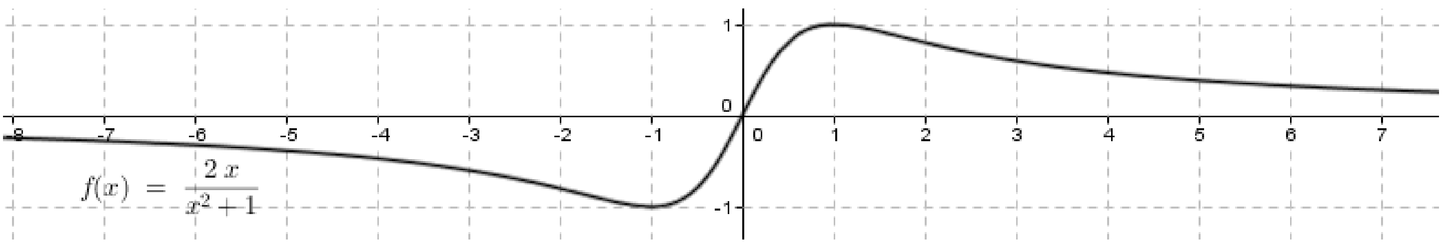
Calculs :

Comme $x^2 + 1 > 0$, $f(x)$ est du signe de $2x$, donc, du signe de x.

Si $x < 0$, $f(x) < 0$

Si $x > 0$, $f(x) > 0$

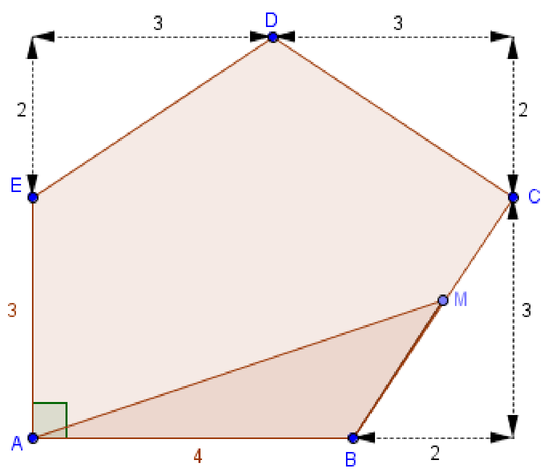
$f(0) = 0$



2) Sur cette figure, le point M est mobile sur les côtés du pentagone $ABCDE$.

On pose x la distance parcourue par M dans le sens direct depuis le point A.

Quand M décrit la figure, comment évolue l'aire du triangle ABM en fonction de x ?



Démarche :

On analyse la situation côté par côté ….

Calculs (s'ils sont possibles en 1S).

En notant $\mathcal{A}$ la fonction donnant l'aire ….

*** Lorsque $M \in [AB]$, on a : $x \in [0 ; 4]$ et le triangle est aplati.

Si $x \in [0 ; 4]$ alors $\mathscr{A}(x) = 0$

$\mathscr{A}(x) = 0$

*** Lorsque $M \in [BC]$, $x \in [4 ; 4 + BC]$, $BC = \sqrt{13}$

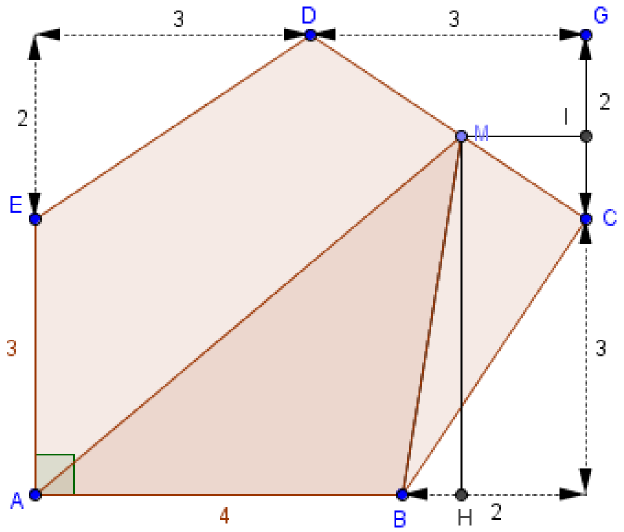
Soit MH la hauteur issue de M, $\frac{MH}{3} = \frac{BM}{BC}$ $BM = x - 4$ et donc : $MH = \frac{3(x-4)}{\sqrt{13}}$

Aire de ABM : $\frac{AB \times MH}{2} = 2MH$.

Si $x \in [4 ; 4+\sqrt{13}]$ alors $\mathscr{A}(x) = \frac{6}{\sqrt{13}}x - \frac{24}{\sqrt{13}}$ (Fonction affine croissante).

*** Lorsque $M \in [CD]$, $x \in [4 + BC ; 4 + BC + CD]$, ….. $CD = \sqrt{13}$.

Voir notations sur la figure.



$MH = 3 + CI$

$\frac{CI}{2} = \frac{CM}{CD}$

$CM = x - 4 - \sqrt{13}$

$CI = \frac{2(x-4-\sqrt{13})}{\sqrt{13}}$

$MH = 3 + CI = \frac{2x-8+\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$

Aire de ABM : $\frac{AB \times MH}{2} = 2MH$.

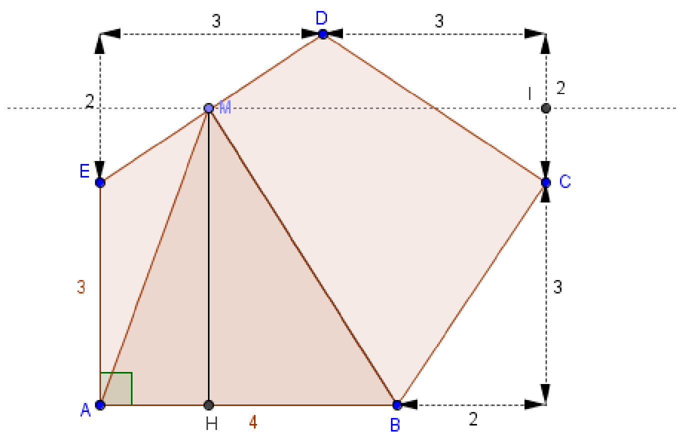
Si $x \in [4+\sqrt{13} ; 4+2\sqrt{13}]$

alors $\mathscr{A}(x) = \frac{4}{\sqrt{13}}x - \frac{16}{\sqrt{13}} + 2$ (Fonction affine croissante).

*** Lorsque $M \in [DE]$, $x \in [4 + BC + CD ; 4 + BC + CD + DE]$, ….. $DE = \sqrt{13}$.

Par symétrie (EDC étant isocèle), la hauteur MH vaut encore $3 + CI$.

mais comme x n'est plus dans le même intervalle, il faut reposer le calcul …..



Par symétrie, on aura : $\frac{CI}{2} = \frac{EM}{ED}$

$EM = 4 + 3\sqrt{13} - x$

$CI = \frac{2(4+3\sqrt{13}-x)}{\sqrt{13}}$

$MH = 3 + \frac{2(4+3\sqrt{13}-x)}{\sqrt{13}} = \frac{-2x+8+9\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$

Aire de ABM : $\frac{AB \times MH}{2} = 2MH$.

Si $x \in [4+2\sqrt{13} ; 4+3\sqrt{13}]$

alors $\mathscr{A}(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{13}}x + \dfrac{16}{\sqrt{13}} + 18$ (Fonction affine décroissante).

*** Lorsque $M \in [EA]$, $x \in [4 + BC + CD + DE\ ;\ 4 + BC + CD + DE + EA]$, …

le triangle ABM est rectangle en A, d'où,

Aire de ABM : $\dfrac{AB \times MA}{2} = 2MA$.

$MA = 4 + 3\sqrt{13} + 3 - x = 7 + 3\sqrt{13} - x$

Si $x \in [4+3\sqrt{13}\ ;\ 7+3\sqrt{13}]$

alors $\mathscr{A}(x) = -2x + 14 + 6\sqrt{13}$ (fonction affine décroissante)

L'aire sera donc maximale lorsque M est en D et elle vaut en ce cas :

Max = $\dfrac{AB \times DH}{2} = \dfrac{4 \times 5}{2} = 10$ unités d'aire

Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction affine définie par morceaux, c'est-à-dire : sur chaque intervalle où la fonction est définie, on a une expression d'une fonction affine.