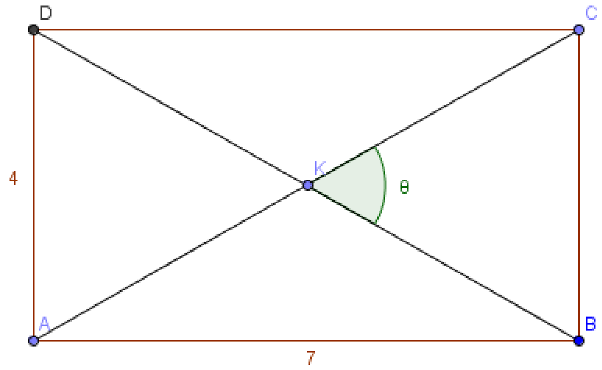
Utilisation du produit scalaire.

Exercice 1 : un angle

ABCD rectangle de centre *K*.

$AB = 7$ et $AD = 4$.

Déterminer une mesure de $\theta = \widehat{BKC}$ à 1° près.



Comprendre : En exprimant le produit scalaire de deux façons différentes, on pourra faire une mise en équation, en tirer les valeurs inconnues ...

Choisir : En remarquant que θ est la valeur absolue d'une mesure d'un angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB})$ ou $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC})$, exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ ou $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec la définition faisant intervenir le cos θ , et, une autre façon de calculer ce produit scalaire.

Une méthode :

On peut déterminer $\theta = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC \times DB \times \cos\theta$

$AC^2 = DB^2 = 49 + 16 = 65$

D'autre part, en choisissant un repère orthonormé tel que $A(0 ; 0)$, $B(7 ; 0)$, $D(0 ; 4)$, on a :

$C(7 ; 4)$, puis : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7\times 7 + 4\times(-4) = 49 - 16 = 33$

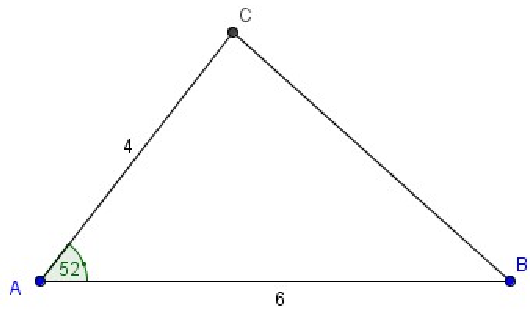
Solution : cos $\boldsymbol{\theta = \frac{33}{65}}$ ***et*** $\boldsymbol{\theta \approx 59°}$ ***à 1° près***

Exercice 2 : une longueur

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$

et $\widehat{BAC} = 52°$.

Calculer *BC*. (Valeur exacte, puis approchée à 0,01 près)



Comprendre : Il n'est pas possible d'ajouter des longueurs lorsque les points ne sont pas alignés ....

Il est nécessaire de décomposer à l'aide d'une somme de vecteurs, le chemin de *B* à *C*.

Passage des longueurs aux vecteurs : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^{\,2}$

Les calculs :

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^{\,2} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^{\,2} + \overrightarrow{AB}^{\,2} - 2.\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$, **Théorème d'Al-Kashi :**

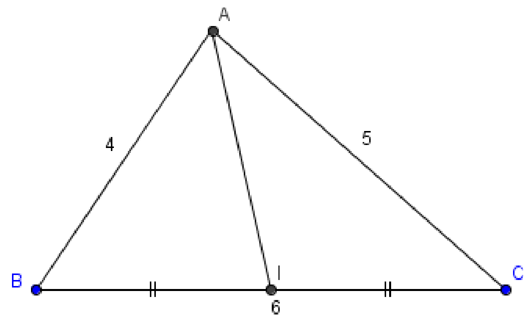
d'où :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times \cos 52°$

$= 36 + 16 - 2\times 6\times 4\times \cos 52°$

Solution : BC = $\sqrt{52 - 48\times\cos(52°)}$ ***BC ≈ 4,74 à 0,01 par excès***

Exercice 3 : une médiane



ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $BC = 6$ et $AC = 5$

I est le milieu de $[BC]$.

Calculer AI. (Valeur exacte, puis approchée à 0,01 près)

Comprendre : Comme les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont opposés, en décomposant les " chemins " $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en passant par I, on aura une simplification ...

$AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$ (voir exercice 2)

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$

$= AI^2 + IB^2 + 2\ \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IB} + AI^2 + IC^2 + 2\ \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}$

$= 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2 + 2\ \overrightarrow{AI}\cdot(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$ or, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, d'où, $\overrightarrow{AI}\cdot(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 0$

Conclusion : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ **Théorème de la médiane**

En remplaçant : AB, AC et BC par leurs valeurs ....

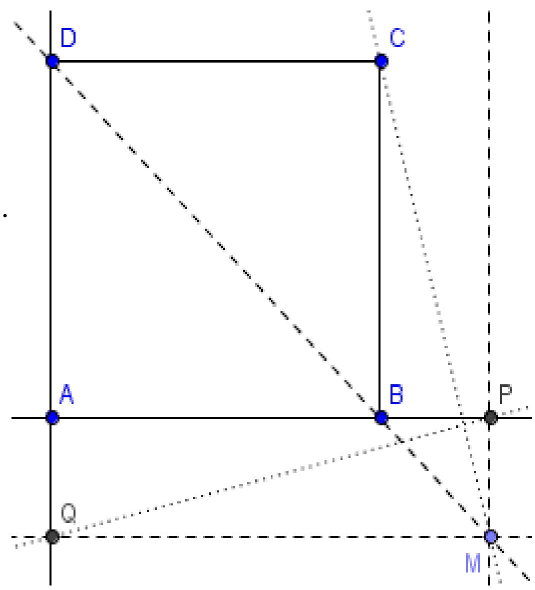
Une autre méthode : utiliser le résultat de l'exercice 2 pour calculer cos $\widehat{B}$ (Garder la valeur exacte) ...

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{27}{48}$$

$$AI^2 = AB^2 + BI^2 - 2 \times BA \times BI \times \cos \widehat{B} = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{27}{48} = ...$$

Solution : $AI = \sqrt{\frac{23}{2}}$ ***$AI \approx 3{,}39$ à 0,01 par défaut***

Exercice 4 : Orthogonalité



$ABCD$ est un carré.

M est un point quelconque de la diagonale (BD).

P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AD).

Montrer que les droites (PQ) et (MC) sont orthogonales.

Comprendre : La géométrie analytique est le domaine approprié au type de problème où un point variable appartient à un " objet " (ici : une droite) dont on connaît une équation.

Choix d'un repère orthonormé :

$A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$, $C(1 ; 1)$, $D(0 ; 1)$

$M(p ; q)$, $P(p ; 0)$, $Q(0 ; q)$

$M \in (BD)$ d'équation $y = -x + 1$, d'où : $q = -p + 1$

$\overrightarrow{MC}\ \begin{pmatrix} 1-p \\ 1-(-p+1) \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{MC}\ \begin{pmatrix} 1-p \\ p \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}\ \begin{pmatrix} -p \\ -p+1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MC} = (1-p)\times(-p) + p(-p+1) = 0$

Comme $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont orthogonaux.