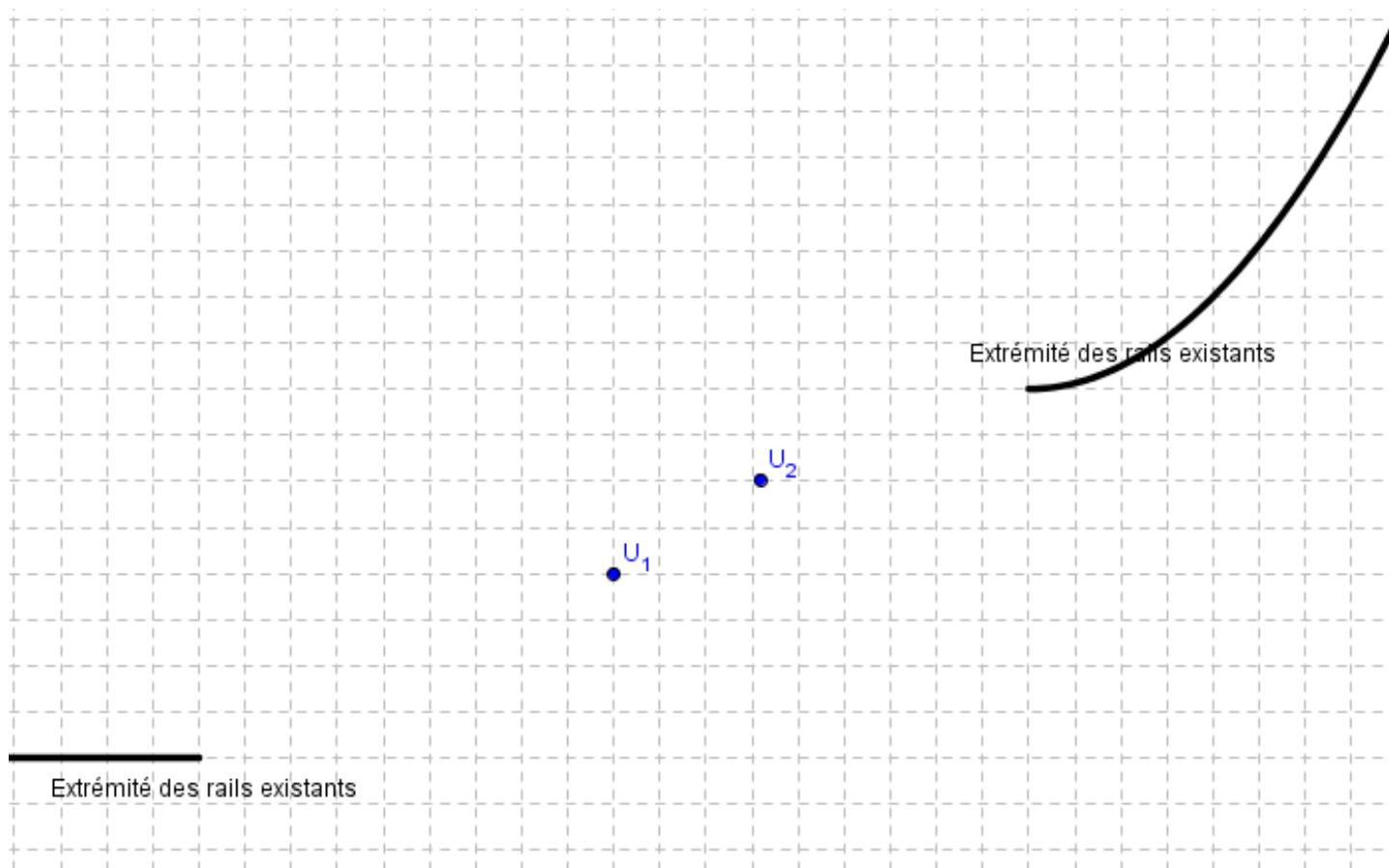


Activité 1: raccorder une voie ferrée (une "bonne" courbe)

Sur le plan ci-dessous sont représentés des rails déjà existants de chemin de fer.



Une société de transports veut relier ces rails pour permettre le passage de wagons.

Le « rail » doit desservir les deux usines U_1 et U_2 .

Aidez l'ingénieur à dessiner une courbe possible liant ces rails en précisant comment doivent être les raccords pour que les wagons puissent rouler sans dérailer.

Toute courbe sans aucun angle reliant les deux extrémités et passant par U_1 et U_2 convient.

Activité 2 : la piste de ski

Énoncé

La courbe ci-dessous représente le profil d'une piste de ski, partant d'une vallée O, en passant par un col C et arrivant dans la vallée A. En abscisse est indiquée la distance horizontale depuis le point de départ O, en ordonnée l'altitude par rapport à O. L'unité sur chaque axe est l'hectomètre.

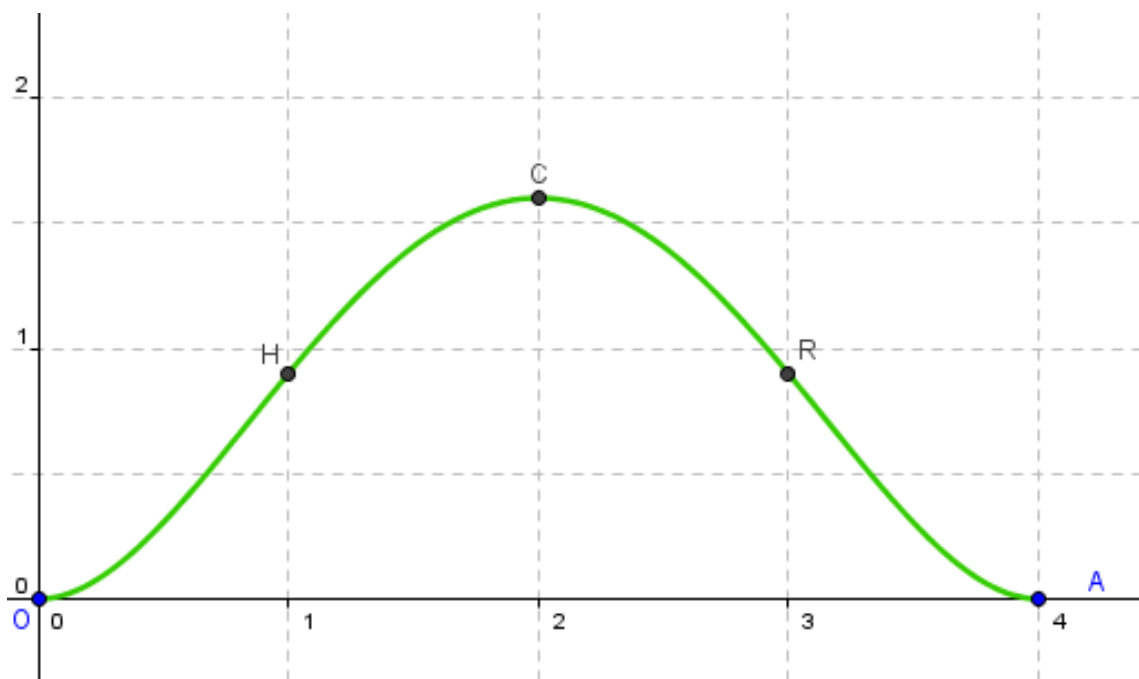
Le point H désigne un hameau, le point R un refuge.

Le guide prétend qu'au hameau H, la pente de la piste est de 120%.

Quelle construction peut-on envisager pour vérifier cette valeur ?

On trace une droite la plus proche possible de la courbe et passant par H.

Le **coefficient directeur** (pente) de cette droite lu graphiquement vaut environ 1,2.



Observations : Utilisation de GeoGebra (version portable sur serveur " classes ")

En réalité la courbe est celle de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{10} x^2(x-4)^2$ sur $[0; 4]$

Créer un curseur a variant de 0 à 4 avec un pas de 0,1

Créer un curseur h variant de -1 à 1 avec un pas de 0,01

Dans la ligne de saisie, entrez $M=(a,f(a))$ (laissez la valeur par défaut)

Dans la ligne de saisie, entrez $N=(a+h,f(a+h))$ (laissez la valeur par défaut)

Sur quelle courbe sont situés M et N? Pourquoi?

Les points M et N sont sur la courbe de f puisque l'ordonnée de chacun de ces points est l'image de son abscisse par f .

Faites apparaître la droite (MN)

Faites varier h sur le curseur. Que constatez-vous lorsque $h = 0$?

Lorsque $h = 0$, la droite (MN) n'est pas définie, les points M et N étant confondus.

Que constatez-vous lorsque $h \neq 0$ mais de plus en plus proche de 0?

La droite (MN) est de plus en plus proche de la courbe, tend vers une " position limite "

Faites varier le curseur a pour choisir un autre point de la piste et recommencez l'analyse.

Entrez dans la ligne de saisie: Tangente[a, f]

Faites varier le curseur a .

Cette " position limite " est celle obtenue avec la commande " Tangente " du logiciel.

Dans la suite du texte, la droite tangente est cette droite permettant de lire la pente de la courbe au point indiqué.

Répondre aux questions suivantes:

Évaluer la pente de la piste au refuge R.

Au refuge R, la pente " en descente " vaut 120 %. Le coefficient directeur de la droite tangente en R est $-1,2$.

Quelle est la pente de la piste au col C ? au départ O ? à l'arrivée A ?

la pente de la piste au col C , au départ O , à l'arrivée A est 0 (La tangente en un de ces points est une droite parallèle à l'axe des abscisses)

Les calculs:

Les calculs vont être faits dans le cas où $a = 1$

Calculer $f(1)$. $f(1) = \frac{9}{10}$

Calculez $f(1+h)$ $f(1+h) = \frac{1}{10} (1+h)^2(h-3)^2 = \frac{1}{10} (h^4 - 4h^3 - 2h^2 + 12h + 9)$

Aide : c'est un calcul où il faut prendre son temps sans se préoccuper outre mesure de $\frac{1}{10}$ sans oublier les relations du type $(a+b)^2 = \dots$

Calculez $f(1+h) - f(1)$ et factorisez h

$$f(1+h) - f(1) = \frac{1}{10} (h^4 - 4h^3 - 2h^2 + 12h) = \frac{1}{10} h(h^3 - 4h^2 - 2h + 12)$$

Là encore, prendre son temps en factorisant au début par $\frac{1}{10}$...

On appelle $\tau_1(h)$ le quotient: $\tau_1(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ avec $h \neq 0$.

Commentaire : La lettre grecque τ se lit 'tau' ce qui nous arrange bien puisqu'un taux d'accroissement d'une fonction est le quotient de l'accroissement des valeurs images Δy par l'accroissement des valeurs antécédentes Δx .

Que représente $\tau_1(h)$ pour la droite (MN) ?

$\tau_1(h)$ est le coefficient directeur de la droite (MN) .

Vers quel réel se rapproche $\tau_1(h)$ lorsque h se rapproche de 0 aussi près que l'on veut ?

Lorsque h tend vers 0, $\tau_1(h)$ se rapproche de 1,2.

On dit que la limite en 0 de $\tau_1(h)$ est 1,2, et, on écrit : $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_1(h) = 1,2$

Attention : cela ne veut pas dire que le réel $\tau_1(h)$ est défini en 0 ... il s'agit du **comportement de ce réel** lorsque la variable h **se rapproche indéfiniment de 0**.

Activité 3: sécante à une courbe, position limite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -x^2 + 3$.

On note P sa représentation graphique dans un repère.

P est la parabole d'équation $y = -x^2 + 3$.

Son sommet est le point $\Omega(0 ; 3)$

1) Construire P et placer sur P les point A et B d'abscisses respectives 1 et 3.

A(1 ; 2) B(3 ; -6)

Calculer le coefficient directeur de la droite (AB) .

Coefficient directeur de (AB) : $m = \frac{-6-2}{3-1} = -4$

2) h étant un réel non nul, placer le point M sur P d'abscisse $1+h$.

Calculer le coefficient directeur m de la droite (AM) en fonction de h .

Le point M a pour coordonnées $(h ; 2 - 2h + h^2)$.

$$m = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-2h + h^2}{h} = -2 + h$$

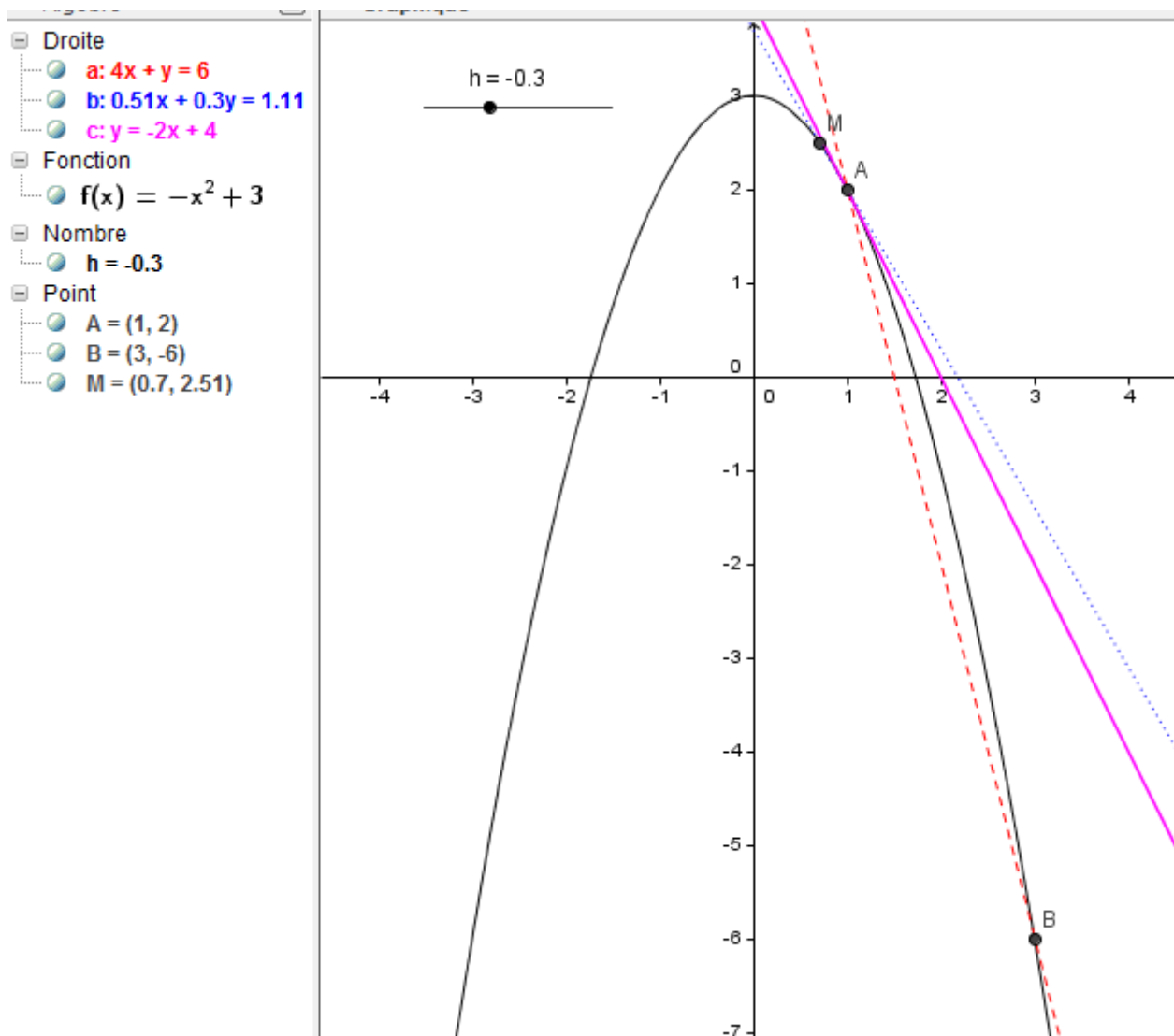
3) Que devient m quand h tend vers 0? (On dit que la limite de m quand h tend vers 0 est)

Tracer la droite correspondante, et, interpréter les résultats.

Quand h tend vers 0, m tend vers -2. On écrit : $\lim_{h \rightarrow 0} -2 + h = -2$

La droite passant par A et de coefficient directeur -2 est la tangente (voir activité 2) de P en A.

Copie d'écran :



Activité 4: vitesse moyenne, vitesse instantanée

Un mobile se déplace sur une trajectoire. Un savant calcul à montrer que la distance parcourue sur cette trajectoire s'exprime par la fonction $d(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$ où t est la durée du parcours exprimée en secondes et $d(t)$ la distance exprimée en mètres.

1 a) Calculer $d(5)$ et $d(3)$.

$$d(5) = \frac{35}{2} \text{ et } d(3) = \frac{15}{2}$$

b) Quelle est la vitesse moyenne en ms^{-1} du mobile entre ces deux dates?

La vitesse moyenne est donnée par le quotient : $\frac{d(5) - d(3)}{5 - 3} = 5 \text{ m.s}^{-1}$

2) a) Soit h un réel positif. Calculer en fonction de h la vitesse moyenne $V_m(h)$ en ms^{-1} du mobile entre les dates 3 et $3 + h$.

$$V_m(h) = \frac{d(3+h) - d(3)}{h} = \left(\frac{1}{2}(9 + 6h + h^2) + 3 + h - \frac{15}{2} \right) \times \frac{1}{h} = 4 + \frac{1}{2}h$$

b) Que devient V_m quand h tend vers 0?

Quand h tend vers 0, $V_m(h)$ tend vers 4.

Ce nombre 4 est la vitesse instantanée du mobile à l'instant $t = 3$.