Index

pour reprendre contact page 21

I- Fonction du second degré

1) a) La courbe représentative d'une fonction du second degré ($f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) s'appelle une parabole.

b) Le sommet $S(-2 ; 4)$

c) L'équation $f(x) = 3$ a pour solutions -3 et -1.

L'inéquation $f(x) \leqslant 3$ a pour solutions l'ensemble des réels de la réunion d'intervalles $]-\infty; -3] \cup [-1; +\infty[$,

Remarque:

L'inéquation $f(x) \geqslant 3$ a pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle fermé $[-3 ; -1]$.

d) On peut résumer le signe (positif ou négatif) du réel $f(x)$ dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) On peut résumer la variation (croissante ou décroissante) de la fonction f dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Compléments :

D'après l'allure de la courbe, on sait que le coefficient a est strictement négatif.

D'après les racines (-4 et 0), on sait que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = a(x-0)(x-(-4)) = ax(x+4)$

D'après les coordonnées du sommet, on sait que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = a(x-(-2))^2 + 4 = a(x+2)^2 + 4 = ax^2 + 4ax + 4a + 4$$

En comparant les développements de $f(x)$ obtenus à partir des formes précédents :

$f(x) = ax(x+4) = ax^2 + 4ax$

$f(x) = ax^2 + 4ax + 4a + 4$, on en déduit que : $4a + 4 = 0$, soit : $a = -1$

La parabole admet la droite d'équation $x = -2$ pour axe de symétrie.

Remarques :

Comme $f(-1) = 3$ et $f(x) = ax(x+4)$, on a : $a\times(-1)\times(-1+4) = 3$. On en déduit $a = -1$.

La courbe représentée est la courbe représentative de la fonction : $f : x \mapsto -x(x+4) = -x^2 + 4x = -(x+2)^2 + 4$

II- Développer

a) $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$

b) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$

c) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

d) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = (x + \frac{3}{2})^2$

III- Choisir la bonne forme

	Forme canonique : $g(x) = 2(x+4)^2 - 18$	Forme factorisée : $g(x) = 2(x+1)(x+7)$	Forme développée : $g(x) = 2x^2 + 16x + 14$
Extremum	$2 > 0$ donc g admet un minimum. Le minimum vaut -18 atteint en -4	$2 > 0$ donc g admet un minimum	$2 > 0$ donc g admet un minimum
Résolution de $g(x) = 0$		Un produit nul …. $\mathcal{S} = \{-7 ; -1\}$	
Résolution de $g(x) = 14$			$2x^2 + 16x + 14 = 14$

			si et seulement si $2x^2 + 16x = 0$ si et seulement si $2x(x + 8) = 0$ $\mathscr{S}_1 = \{0 ; -8\}$
Résolution de $g(x) = 54$	$2(x + 4)^2 - 18 = 54$ si et seulement si $2(x + 4)^2 - 72 = 0$ si et seulement si $2[(x + 4)^2 - 36] = 0$ si et seulement si $2(x + 4 + 6)(x + 4 - 6) = 0$ si et seulement si $2(x + 10)(x - 2) = 0$ $\mathscr{S}_2 = \{-10 ; 2\}$		

IV- Avec les tableaux de signes

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
signe de $2x - 4$		–	0	+		+	
signe de $3 - x$		+		+	0	–	
signe du produit $(2x - 4)(3 - x)$		–	0	+	0	–	

TP2 page 30

Reconnaître les trois écritures :

Forme développée

Forme factorisée

Forme canonique

La figure *a/* a pour équation $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ (forme développée). $\mathscr{C}_2$ est représentée par la figure a/.

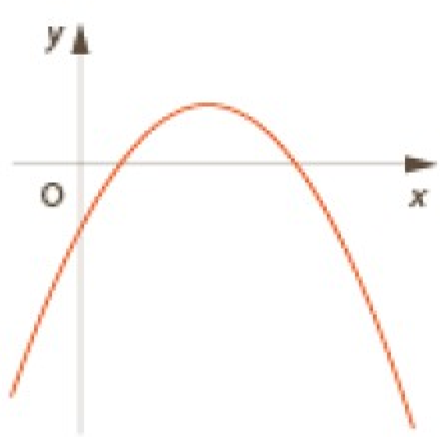


Figure a

En effet, **le coefficient de x^2 est négatif**, donc, la parabole est tournée " vers le bas " (figure *b*/ exclue).

Si $x = 0$ alors $y = -1$. (d'où l'unité sur les ordonnées)

Si l'abscisse x est négative, chacun des termes de la somme est négatif, donc, l'ordonnée y est négative. (figure *c*/ exclue).

Recherche d'un deuxième point de $\mathscr{C}_2$ d'ordonnée –1.

On résout : $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = -1$

d'où, $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x = 0$ si et seulement si $x(-\dfrac{1}{2}x + 2) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 4$.

L'abscisse du sommet Ω_2 de $\mathscr{C}_2$ est : $x_{\Omega 2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$ (d'où l'unité sur l'axe des abscisses)

et l'ordonnée $y_{\Omega 2} = -\dfrac{1}{2} \times 2^2 + 2\times 2 - 1 = 1$

La ***forme canonique*** de $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = -\dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) = -\dfrac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4 + 2)$

$$= -\frac{1}{2}[(x-2)^2 - 2] = -\frac{1}{2}[(x-2)^2 + 1$$

On retrouve ainsi les coordonnées du sommet : l'abscisse vaut 2 et l'ordonnée du sommet est 1.
les unités : l'abscisse du sommet vaut 2 et son ordonnée vaut 1, ce qui permet de placer l'unité sur chaque axe.
À partir de la forme canonique, on obtient **la forme factorisée** :
$-\dfrac{1}{2}[(x-2)^2 - 2] = -\dfrac{1}{2}[(x-2) - \sqrt{2}][(x-2) + \sqrt{2}] = -\dfrac{1}{2}(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$, ce qui permet de donner les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.
$I_1\,(2 + \sqrt{2}\ ;\ 0)$, $I_2\,(2 - \sqrt{2}\ ;\ 0)$

La figure *b/* a pour équation $y = 4(x-1)(x+2)$ (forme factorisée). $\mathscr{C}_3$ est représentée par la figure b/.

En effet, **le coefficient de x^2 est positif**, donc, la parabole est tournée " vers le haut " (figures *a*/ et *c*/ exclues).

Les unités : la courbe coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (1 ; 0) et (–2 ; 0)

Si $x = 0$ alors $y = -8$. La courbe coupe l'axe des ordonnées en (0 ; –8)

L'abscisse du sommet vaut : $\alpha = \dfrac{1+(-2)}{2} = -\dfrac{1}{2}$

L'ordonnée du sommet est

$\beta = 4(-\dfrac{1}{2} - 1)(-\dfrac{1}{2} + 2) = (-1-2)(-1+4) = -9$

D'où :

La forme canonique est : $y = 4(x + \dfrac{1}{2})^2 - 9$

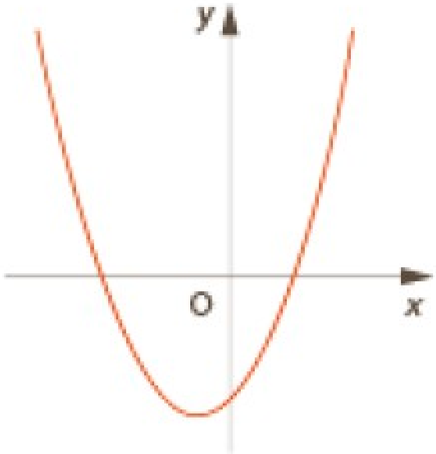


Figure b

La forme développée est :

$4(x^2 + x + \dfrac{1}{4}) - 9 = 4x^2 + 4x - 8$

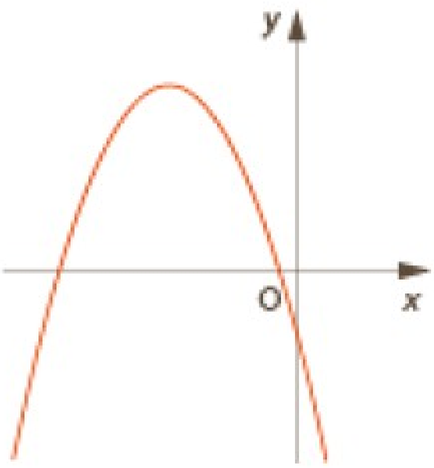


Figure c

La figure *c/* a pour équation $y = -(x+2)^2 + 3$ (forme canonique). $\mathscr{C}_1$ est représentée par la figure c/.

En effet, **le coefficient de x^2 est négatif**, donc, la parabole est tournée " vers le bas " (figure *b*/ exclue)

L'abscisse du sommet vaut –2 (figure *a*/ exclue)

les unités : l'abscisse du sommet vaut –2 et son ordonnée vaut 3
On a aussi : si $x = 0$, $y = -1$. La courbe coupe l'axe des ordonnées en (0 ; –1).
La forme développée : $-(x^2 + 4x + 4) + 3 = -x^2 - 4x - 1$
La forme factorisée :
$-[(x + 2)^2 - 3] = -[(x + 2) - \sqrt{3}\,][(x + 2) + \sqrt{3}\,]$
$= -(x + 2 - \sqrt{3}\,)(x + 2 + \sqrt{3}\,)$, ce qui permet de donner les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'axe des abscisses.
$I_1\ (-2 + \sqrt{3}\ ; 0)$, $I_2\ (-2 - \sqrt{3}\ ; 0)$

Compléments :
$-(x + 2)^2 + 3 = 0$ si et seulement si $x = -2 + \sqrt{3}$ ou $x = -2 - \sqrt{3}$
$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = 0$ si et seulement si $x = 2 + \sqrt{2}$ ou $x = 2 - \sqrt{2}$,
$4(x - 1)(x + 2) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -2$.
$-(x + 2)^2 + 3 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-2 + \sqrt{3}\ ; x = -2 - \sqrt{3}\,]$

$-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [2 + \sqrt{2}\ ; x = 2 - \sqrt{2}\,]$

$4(x - 1)(x + 2) = 0$ si et seulement si $x \in [-2 ; 1]$.

TP4 page 32

1) $x \in [0 ; 6]$

$\mathcal{A}(x) = ?$

En ôtant à l'aire du carré, l'aire des triangles rectangles *BCM*, *AMM'* et *DCM'*, il vient :

$\mathcal{A}(x) = 36 - 2\times\dfrac{(6-x)\times 6}{2} - \dfrac{x\times x}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 6x = -\dfrac{1}{2}(x - 12x) = -\dfrac{1}{2}(x - 6)^2 + 18$

2) Tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$.

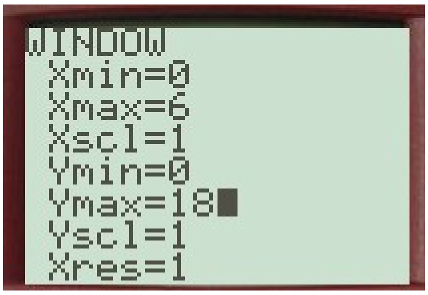
La fonction $\mathcal{A}$ est définie sur [0 ; 6]. Le coefficient de x^2 est négatif.

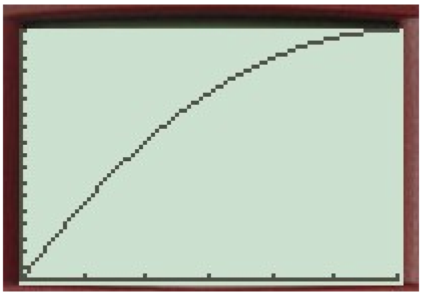
Le maximum 18 est atteint en 6

x	0	6
$\mathcal{A}(x)$	0 ↗	18

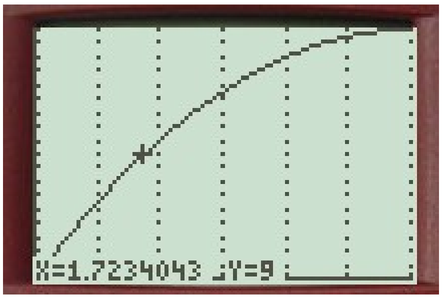
3) a) À la calculatrice

Graphique :

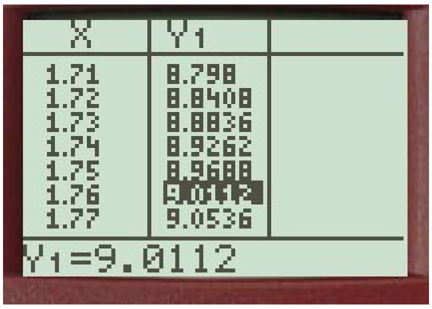




fonction " trace " de la calculatrice :



Tableur de la calculatrice



4) Calcul :

Il suffit de résoudre pour $x \in [0 ; 6]$, les deux équations :

$-\dfrac{1}{2}(x-6)^2 + 18 = 9$ (1) et $-\dfrac{1}{2}(x-6)^2 + 18 = 18$ (2)

$-\dfrac{1}{2}(x-6)^2 + 18 = 9$ équivaut à $(x-6)^2 - 18 = 0$ équivaut à $[(x-6) - 3\sqrt{2}][(x-6) + 3\sqrt{2}] = 0$

La seule solution acceptable est $6 - 3\sqrt{2}$

$-\dfrac{1}{2}(x-6)^2 + 18 = 16$ équivaut à $(x-6)^2 - 4 = 0$ équivaut à $[(x-6) - 2][(x-6) + 2] = 0$

Une seule solution acceptable qui vaut 4.

5) Résolution de l'inéquation : $\mathscr{A}(x) > \dfrac{1}{4} \times 36$

Soit : $\mathscr{A}(x) > 9$

Puisque $\mathscr{A}$ est **strictement croissante** sur $[0 ; 6]$ et que $\mathscr{A}(6 - 3\sqrt{2}) = 9$, les solutions de cette inéquation sont les réels x tels que $x \in]6 - 3\sqrt{2} ; 6]$

TP6 page 33

Les données :

Le raisonnement commence par l'analyse de l'énoncé au fur et à mesure de la lecture

a, b et c réels et $a \neq 0$ (***Remarquer*** : a, b, c sont modifiables mais sont considérés comme des nombres fixés : paramètres, coefficients, …).

α réel (***Remarquer*** : α est la variable d'une fonction à déterminer : α décrit ℝ)
A(0 ; $a + b + c$), B(0 ; $b + c$), C(0 ; c), P(1 ; $a + b + c$),

(Ce sont donc des points fixes …. mais modifiables).

Q est défini par : " le point de (PB) d'abscisse α.
(*Q est donc un point variable sur la droite (PB)*).

R(1, y_Q)
(*R est donc un point variable sur la droite d'équation x* = 1).

M est le point de la droite (CR) d'abscisse α.
(*M est donc un point variable).*

La conclusion (ce qu'il faut prouver)
La conjecture faite grâce à GeoGebra permet de conjecturer :
lorsque α décrit ℝ, M décrit une parabole d'équation y = ……….. (à déterminer).
Autrement dit : On cherche à exprimer l'ordonnée de M en fonction de son abscisse.

La recherche :

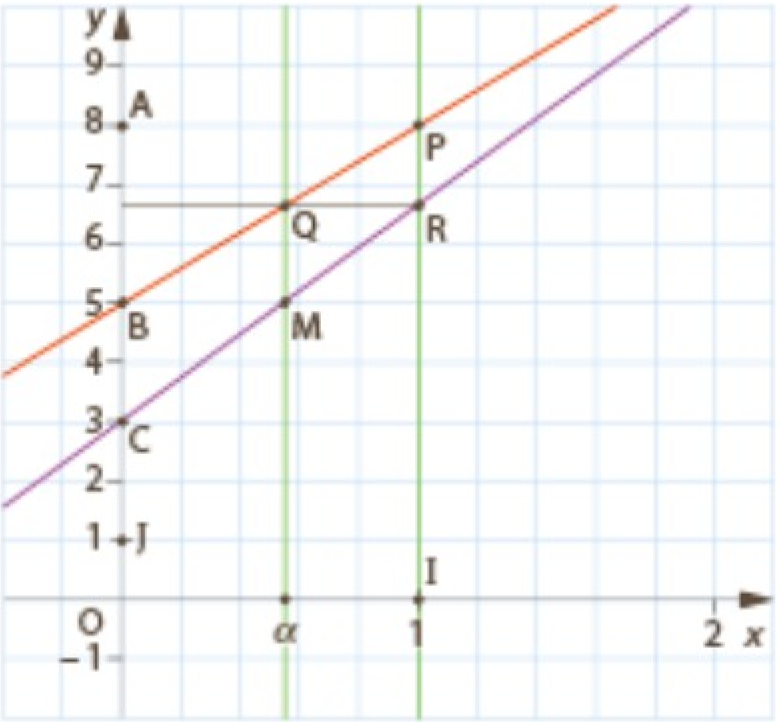
Pour répondre, il faut pouvoir exprimer l'ordonnée de M, y_M , en fonction de son abscisse α.

Pour cela, on a besoin d'une équation de la droite (CR) puisque M appartient à (CR).

C étant connu, on a besoin des coordonnées de R, (***voir cours sur équations de droites et/ou fonctions affines de seconde***)

autrement dit : de l'ordonnée de Q (*puisque par construction l'ordonnée de R est celle de Q*)

et, comme Q appartient à la droite (PB), on cherche une équation de (PB). (*Ce qui est possible puisqu'on connaît les coordonnées de ces deux points*).



Rédaction de la démonstration :

Rappel : une équation de droite peut se mettre sous la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Équation de (PB) :
l'ordonnée à l'origine est celle de B , d'où, $p = b + c$.

Le coefficient $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \dfrac{a+b+c-(b+c)}{1-0} = a$

On en déduit : une équation de (PB) est $y = ax + b + c$.

***Ordonnée de Q* :**

Comme Q est le point de (PB) d'abscisse α, on obtient : $y_Q = a\alpha + b + c$.

Ordonnée de R : $y_R = y_Q = a\alpha + b + c$.

Équation de (CR) :

l'ordonnée à l'origine est celle de C, d'où, $p = c$.

Le coefficient $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_R - y_C}{x_R - x_C} = \dfrac{a\alpha + b + c - c}{1-0} = a\alpha + b$.

On en déduit : une équation de (CR) est $y = (a\alpha + b)x + c$.

***Ordonnée de M* :**

Comme M est le point de (CR) d'abscisse α, on obtient : $y_M = (a\alpha + b)\alpha + c = a\alpha^2 + b\alpha + c$.

Conclusion :

lorsque α décrit ℝ, M décrit une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

TP7 page 33

x est le nombre de centaines de coccinelles présentes une année avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$f(x)$ est le nombre de coccinelles présentes l'année suivante avec $f(x) = 2{,}8x(1 - x)$.

1) La fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 2{,}8x(1 - x)$ est une fonction du second degré qui admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$ et ce maximum est : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2{,}8 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = 0{,}7$

Preuve : le coefficient –2,8 de x^2 est négatif.

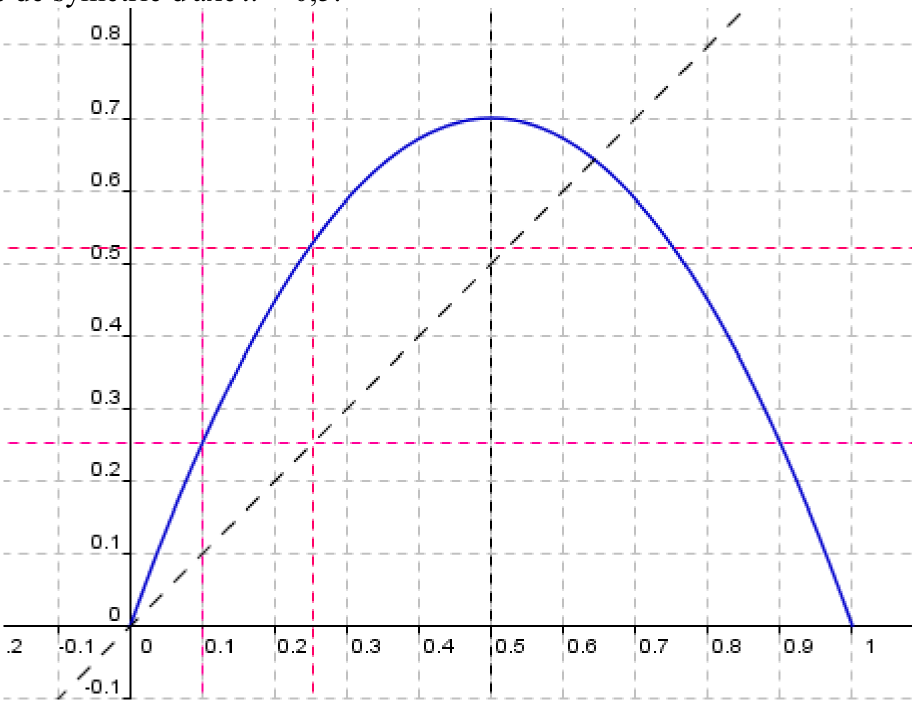
L'abscisse du sommet est le milieu des racines (évidentes) 0 et 1.

x	0		0,5		1
$f(x)$	0	↗	0,7	↘	0

2) On trace un arc de parabole de sommet (0,5 : 0,7), d'extrémités (0 ; 0) et (1 ; 0).
On affine avec la recherche d'un ou deux points ...
Tableau de valeurs :

x	**0**	**0,5**	**0,4**	**....**	**...**
$f(x)$	0	0,7	0,67		

Comme on attend une lecture graphique, on prend des unités suffisamment grandes .
On n'oublie pas l'axe de symétrie d'axe $x = 0,5$.



3) 10 coccinelles en 2010, d'où $x = 0,1$
Par lecture graphique, on lit : $f(0,1) \approx 0,25$ En 2011, on a alors environ 25 coccinelles.
On lit : $f(0,25) \approx 0,32$ En 2012, on a alors environ 32 coccinelles.
Calculs :
$f(0,1) = 2,8\times0,1\times0,9 = 0,252$ Le nombre de coccinelles est un nombre entier ....
$f(0,25) = 2,8\times0,25\times0,75 = 0,525$ Ce qui confirme la lecture graphique

4) La population est stable lorsque $f(x) = x$.
Par lecture graphique, on lit l'abscisse des points d'intersection de la courbe d'équation $y = f(x)$ et de la droite d'équation $y = x$.
Par le calcul : on résout : $2,8x(1 - x) = x$
$2,8x(1 - x) = x$ équivaut à $2,8x(1 - x) - x = 0$ équivaut à $x[2,8(1 - x) - 1] = 0$
Le produit $x(1,8 - 2,8x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \dfrac{1,8}{2,8} = \dfrac{18}{28} \approx 0,64$
La population est stable lorsqu'il y a : 0 coccinelles ou 64 coccinelles.

5) 20 coccinelles correspond à $x = 0,2$
On résout : $f(x) \geqslant x + 0,2$
$2,8x(1 - x) \geqslant x + 0,2$ équivaut à $2,8x(1 - x) - x - 0,2 \geqslant 0$ équivaut à $-2,8x^2 + 1,8x - 0,2 \geqslant 0$
En multipliant les deux membres par -5, il vient : $14x^2 - 9x + 1 \leqslant 0$.
Factorisation : $14x^2 - 9x + 1$ discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4\times14\times1 = 25$
Comme $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-5}{2\times 14} = \dfrac{1}{7}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+5}{2\times 14} = \dfrac{1}{2}$ et se factorise en :

$14x^2 - 9x + 1 = 14(x - \dfrac{1}{7})(x - \dfrac{1}{2})$

Un tableau de signes donne pour ensemble solution l'intervalle $S = \left[\dfrac{1}{7};\dfrac{1}{2}\right]$.

Comme $\dfrac{1}{7} \approx 0{,}142$ ...

Le nombre de coccinelles doit être entre 15 et 50 pour que l'année suivante, on ait au moins 20 coccinelles de plus.

---

13 page 34

Énoncé : les expressions sont-elles des trinômes du second degré.
Si oui, donner les coefficients.

Expressions	**2^d^ degré**	***a***	***b***	***c***
$2x^2 - 3x - 4$	Oui	2	–3	–4
$3x - 9$	Non	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXX
$(x - 4)(3x + 2)$	Oui	3	–10	–8
$4x^2 - 5$	Oui	4	0	–5

---

15 page 34

a) **Une méthode** : $y = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1$

Comme $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$, on a : $y = (x - 2)^2 + 1$

l'abscisse du sommet est 2, l'ordonnée du sommet est 1.

Une autre méthode :

$y = x^2 - 4x + 5$ est une équation de la parabole de sommet d'abscisse $\alpha = \dfrac{-(-4)}{2\times 1} = 2$ et

d'ordonnée : $2^2 - 4\times 2 + 5 = 1$.

La forme canonique est : $y = (x - 2)^2 + 1$

Une autre méthode :

$x^2 - 4x + 5 = 5$ si et seulement si $x^2 - 4x = 0$ si et seulement si $x(x - 4) = 0$ ....

La parabole passe par les points $A(0 ; 5)$ et $B(4 ; 5)$.

L'axe de symétrie a pour équation $x = \dfrac{0+4}{2} = 2$, d'où, ...

b) $y = -(x + 4)(x - 2)$

La forme étant factorisée, on sait que la parabole coupe l'axe des abscisses aux points I_1 (–4 ; 0) et I_2 (2 ; 0)

$y = -(x + 4)(x - 2)$ est une équation de la parabole de sommet d'abscisse $\alpha = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et

d'ordonnée : $-(-1 + 4)\times(-1 - 2) = 9$.

La forme canonique est : $y = -(x + 1)^2 + 9$

c) $y = 3x^2 - 4$ est une équation de la parabole de sommet d'abscisse $\alpha = 0$ et d'ordonnée : -4

Remarquer : $y = 3(x - 0)^2 - 4$.

d) $y = -x^2 + x$

La factorisation est évidente : $-x^2 + x = -1\times x(x - 1)$

la parabole coupe l'axe des abscisses aux points O (0 ; 0) et I (1 ; 0).

L'abscisse du sommet est : $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, l'ordonnée du sommet : $-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

La forme canonique est : $y = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

---

17 page 34

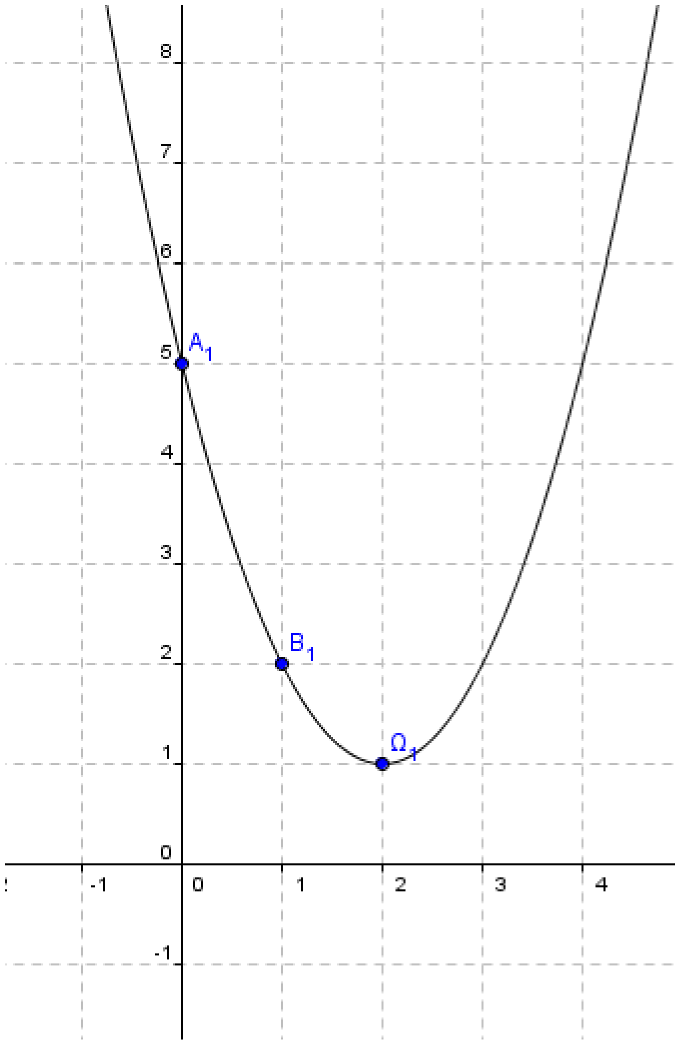
a) Voir n°15 pour détermination des coordonnées du sommet.

La parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 5$ a pour sommet Ω_1 (2 ; 1).

On place le sommet, on pense à l'axe de symétrie.

le coefficient 1 de x^2 est positif.

On détermine deux autres points : par exemple A_1 (0 ; 5), ; B_1 (1 ; 2)

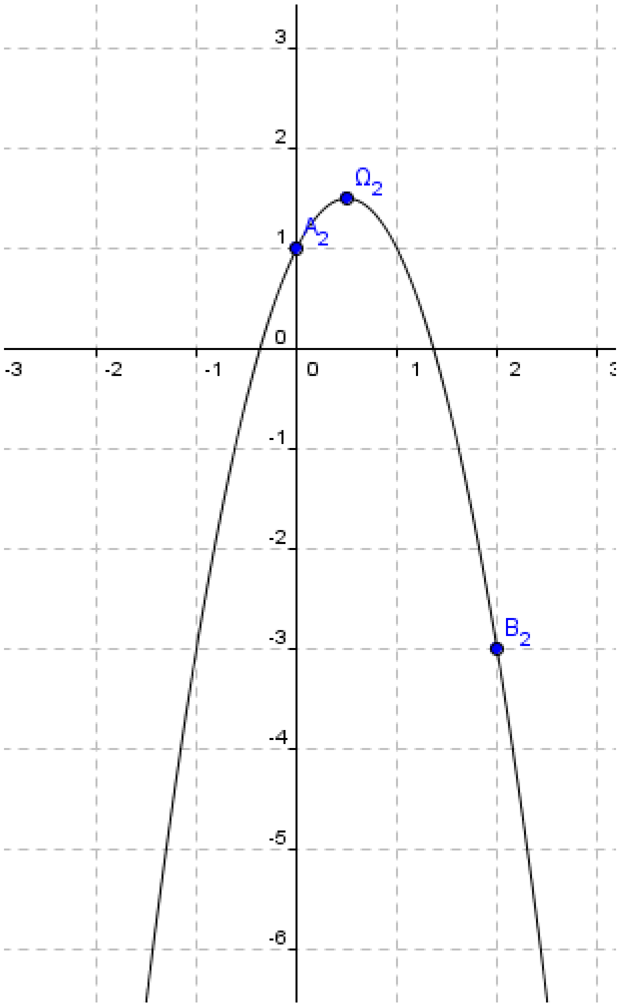


b) La parabole d'équation $y = -2x^2 + 2x + 1$ a pour sommet $\Omega_2\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

On place le sommet, on pense à l'axe de symétrie.

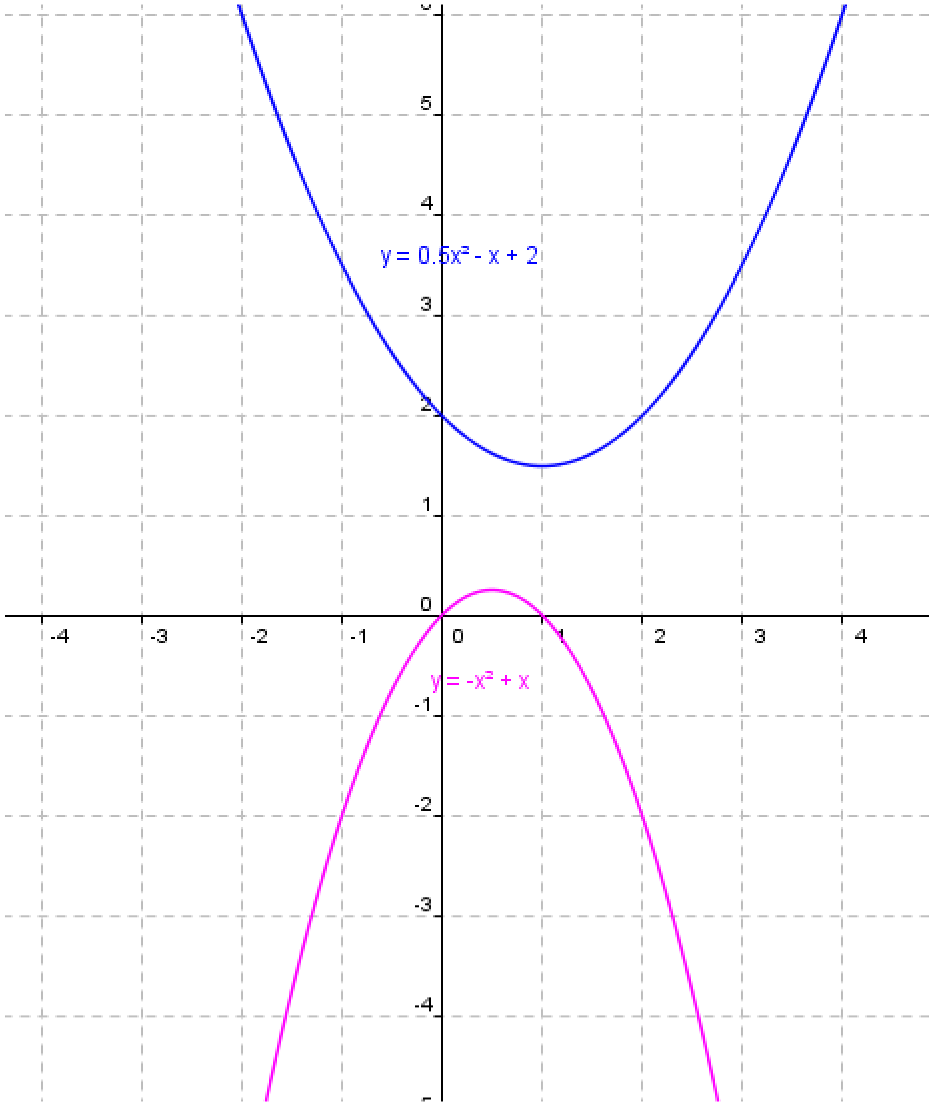
le coefficient -2 de x^2 est négatif.

On détermine deux autres points : par exemple $A_2\,(0\ ;\ 1)$; $B_2\,(2\ ;\ -3)$



c) La parabole d'équation $y = \frac{1}{2} x^2 - x + 2$

d) La parabole d'équation $y = -x^2 + x$



19 page 34

$\mathscr{P}_1 : y = x(-x + 4)$.

La parabole a les branches tournées vers le bas. (Coefficient de x^2 est -1)

La parabole passe par les points $O(0 ; 0)$ et $I(4;0)$.

L'abscisse du sommet est : $\dfrac{0+4}{2} = 2$, son ordonnée est : $-2(2 - 4) = 4$.

$\mathscr{P}_2 : y = 2(x - 1)^2 + 4$

Le sommet S de $\mathscr{P}_2$ est : $S(1 ; 4)$

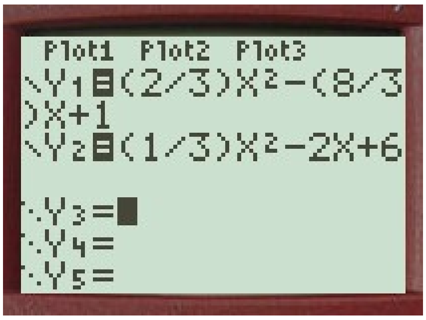
Quand $x = 0$, $y = 6$. $\mathscr{P}_{\square}$ passe par le point $A(0 ; 6)$

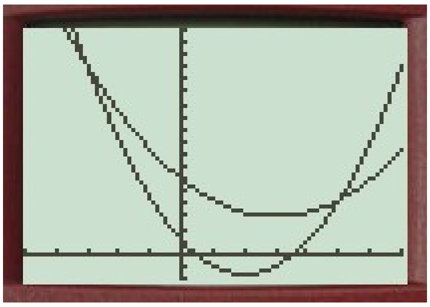
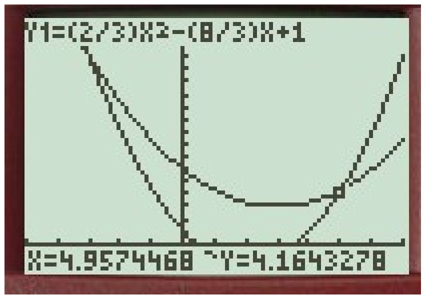
Le coefficient 2 de x^2 est positif, la parabole a les branches tournées vers le haut.

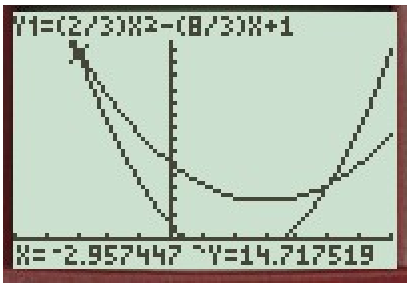
22 page 35

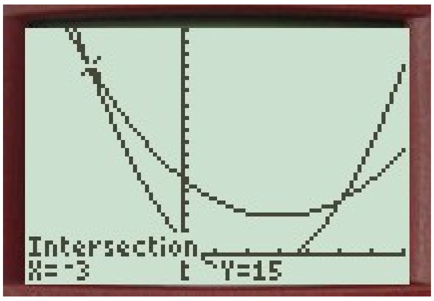
Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 1$ et $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 6$

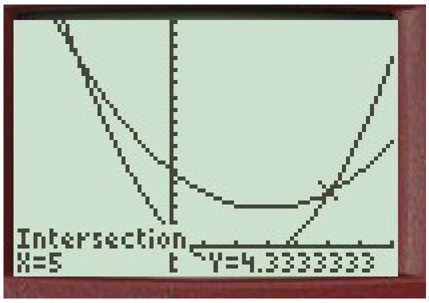
a) Calculatrices :









Graphiquement, on lit les coordonnées des points d'intersection. La fonction " trace " permet de donner une approximation des coordonnées.

La fonction " Intersection " (dans " calculs ") permet de préciser davantage (sans pour autant donner les valeurs exactes).

b) Soit l'équation $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 6$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 5 = 0$$ (en multipliant les deux membres par 3)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 5\right) = 3\times 0$$ soit : $x^2 - 2x - 15 = 0$

Or, $(x + 3)(x - 5) = x^2 + 3x - 5x - 15$, d'où, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x + 3)(x - 5) = 0$

c) Ce produit est nul si et seulement si $x = -3$ ou $x = 5$.

$f(-3) = g(-3) = \ldots. = 15$ (faire les calculs) et $f(5) = g(5) = \ldots = \frac{13}{3}$ (faire les calculs)

Conclusion : les deux paraboles C_f et C_g représentant les fonctions f et g se coupent en A(-3 ; 15) et B(5 ; $\frac{13}{3}$).

24 page 35

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -(2x-1)(x+5)$

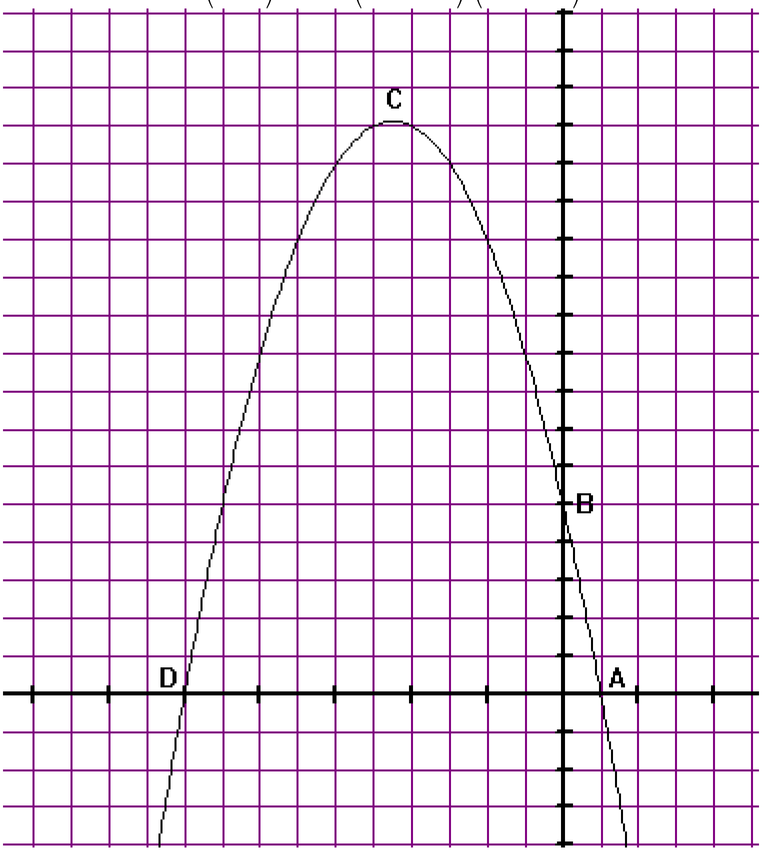
1) La figure a est exclue car le coefficient de x^2 qui vaut -2 est strictement négatif.
la fonction h admet donc un maximum.
$2x - 1 = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ et $x + 5 = 0$ pour $x = -5$.
C'est donc la figure c qui représente h, car la parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -5 et $\frac{1}{2}$.

2) $A\left(\frac{1}{2};0\right)$, $D(-5\ ;\ 0)$ (preuve précédente).

L'abscisse de B vaut 0 et son ordonnée $h(0) = 5$. $B(0\ ;\ 5)$

L'abscisse d C est $x_C = \frac{x_A + x_D}{2} = -\frac{9}{4}$ et

son ordonnée est $h\left(-\frac{9}{4}\right) = -\left(-\frac{9}{2}-1\right)\left(\frac{-9}{4}+5\right) = \frac{11}{2}\times\frac{11}{4} = \frac{121}{8}$. $C\left(\frac{-9}{4};\frac{121}{8}\right)$.



25 page 35

a) f définie par $f(x) = 3x^2 + 4$ admet un minimum en 0 qui vaut $f(0) = 4$.

Preuve : forme canonique $f(x) = 3(x-0)^2 + 4$ et $3 > 0$

b) h définie par $h(x) = -2x^2 + 8x - 1$ admet un maximum en 2 qui vaut $h(2) = 7$.

Preuve : forme canonique $h(x) = -2\,(x^2 - 4x) - 1 = -2[(x-2)^2 - 4] - 1 = -2(x-2)^2 + 7$ et $-2 < 0$

c) g définie par $g(x) = -2(x-4)^2 + 8$ admet un maximum en 4 qui vaut $g(4) = 8$.

Preuve : *g* est donnée sous sa forme canonique

---

26 page 35

a) *f* définie par $f(x) = x^2 + 4x - 6$ admet un minimum en -2 qui vaut $f(-2) = -10$.

En effet : le coefficient 1 de x^2 est positif et $x_S = \frac{-b}{2a} = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-10	↗	$+\infty$

b) *g* définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x$ admet un maximum en 5 qui vaut $g(5) = \frac{25}{2}$

En effet : le coefficient $-\frac{1}{2}$ de x^2 est négatif et $x_S = \frac{-b}{2a} = 5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{25}{2}$	↘	$-\infty$

c) $k(x) = (x-1)(x+2)$

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et -2, d'où, l'abscisse du sommet :

$x_S = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$ et $y_S = k\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

le coefficient 1 de x^2 est positif

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$k(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	$+\infty$

d) $h(x) = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

---

28 page 35

1) $I = [-5 ; 3]$ et $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$

1) Tableau de variations

Comme $3 > 0$ et $x_S = \frac{-6}{2\times 3} = -1$ et que $f(-1) = -10$, on a :

x	-5		-1		3
$f(x)$	38	$\searrow$	-10	$\nearrow$	38

2) le minimum est -10 atteint en -1, et, le maximum est 38 atteint en -5 et en 3.
3 a) $f(x) = -10$ a une et une seule solution qui vaut -1
b) $f(x) = 17$ si et seulement si $3x^2 + 6x - 7 = 17$
si et seulement si $3x^2 + 6x - 24 = 0$
Or, $3x^2 + 6x - 24 = 3(x^2 + 2x - 8) = 3[(x + 1)^2 - 1 - 8] = 3[(x + 1)^2 - 9]$
On résout : $3[(x + 1)^2 - 9] = 0$, soit : $(x + 1)^2 - 9 = 0$
Comme $(x + 1)^2 - 9 = (x + 1 + 3)(x + 1 - 3) = (x + 4)(x - 2)$,
l'équation $f(x) = 17$ a deux solutions dans I : -4 et 2.
c) L'inéquation $f(x) < 17$ a, d'après le b) et d'après le tableau de variations, pour ensemble solution l'intervalle $J =]-4 ; 2[$
d) $f(x) > -20$ est toujours vérifiée sur I, d'où, l'inéquation $f(x) > -20$ a pour ensemble solution l'intervalle I.

30 page 35
On sait : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, et,

x	-4	-2	0	2	5	8
$f(x)$	13	1	-15	-23	-20	1

$f(0) = c$ et $f(0) = -15$, donc, $c = -15$

Comme $\begin{cases} -4<-2<0<2 \text{ et } f(-4)>f(-2)>f(0)>f(2) \\ 5<8 \text{ et } f(5)<f(8) \\ \text{f est du second degré} \end{cases}$, f admet un minimum donc $a > 0$

$f(-2) = f(8) = 1$, donc, l'extremum de f est atteint en $\alpha = \dfrac{-2+8}{2} = 3$
(On ne connaît pas la valeur de l'extremum).
Comme $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et que a est positif, α et $-b$ sont de même signe.

b est donc négatif (puisque α est positif)

Compléments (non demandés mais pour l'entraînement)
D'après le tableau de valeurs, on a :

$$\begin{cases} 16a-4b+c=13 \\ 4a-2b+c=1 \\ c=-15 \\ 4a+2b+c=-23 \\ 25a+5b+c=-20 \\ 64a+8b+c=1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \\ L5 \\ L6 \end{pmatrix}$$

(Trois équations suffisent pour déterminer les coefficients)

On connaît $c = -15$, et, la somme de (L2) et (L4) donne : $8a - 30 = -22$, d'où, $8a = 8$.
$a = 1$
En remplaçant a par 1 et c par -15 dans l'une des équations, on a : $b = \dfrac{-23-4+15}{2} = -6$

$f(x) = x^2 - 6x - 15$ (Vérifier en calculant les autres images ...)

---

31 page 35

Énoncé : Mettre sous forme canonique

a) $2x^2 + 8x - 2$

Une méthode :

$2x^2 + 8x - 2 = 2(x^2 + 4x - 1)$. Or, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ soit : $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

d'où, $2x^2 + 8x - 2 = 2[(x + 2)^2 - 5] = 2(x + 2)^2 - 10$

Une autre méthode :

On cherche les réels α et β tels que :

$2x^2 + 8x - 2 = 2(x - \alpha)^2 + \beta$.

En développant le second membre, on a :

$2x^2 + 8x - 2 = 2x^2 - 4\alpha x + 2\alpha^2 + \beta$.

Par identification des coefficients : $\begin{cases} \text{coefficient de degré 2} & 2=2 \\ \text{coefficient de degré 1} & 8=-4\alpha \\ \text{coefficient de degré 0} & -2=2\alpha^2+\beta \end{cases}$

Il vient : $\alpha = -2$, puis $\beta = -2 - 2\times(-2)^2 = -10$

b) $x^2 + 3x + 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

c) $-x^2 + 2x + 5 = -(x^2 - 2x - 5) = -[(x - 1)^2 - 6] = -(x - 1)^2 + 6$

d) $3x^2 + x - 4 = 3(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}) = 3[(x + \frac{1}{6})^2 - \frac{49}{36}] = 3(x + \frac{1}{6})^2 - \frac{49}{12}$

---

34 page 36

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ pour tout x réel.

1) Forme canonique

Une méthode en utilisant l'identité remarquable : $a^2 + 2ab = (a + b)^2 - b^2$.

$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

Une autre méthode en utilisant l'axe de symétrie de C_f.

On cherche les abscisses des points d'ordonnée 6 (*pourquoi 6*?)

$x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$

On a alors $x = 0$ et $x = 5$ comme abscisses des points d'ordonnée 6.

Le milieu a pour abscisse : $x_S = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$

l'ordonnée du sommet est : $y_S = f\left(\frac{5}{2}\right) = \ldots = -\frac{1}{4}$

Le coefficient de x^2 est 1, d'où : $f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$

Une autre méthode en utilisant l'identification des coefficients.

$x^2 - 5x + 6 = (x - \alpha)^2 + \beta$

En développant : $(x - \alpha)^2 + \beta = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$.

Par identification des coefficients : $\begin{cases} 1=1 & \text{coefficient de x^\{2\}} \\ -5=-2\alpha & \text{coefficient de x} \\ 6=\alpha^2+\beta & \text{coefficient de degré nul} \end{cases}$

On en déduit : $\alpha = \frac{5}{2}$ et $\beta = 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$.

Conclusion : $f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$

2) On reconnaît la différence des carrés de $A = (x - \frac{5}{2})$ et $B = \frac{1}{2}$, d'où,

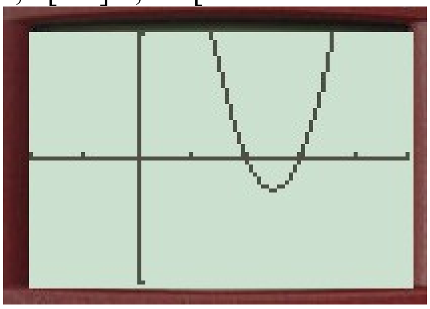
$f(x) = [(x - \frac{5}{2}) - \frac{1}{2}][(x - \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}] = (x-3)(x-2)$

3) On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		–		–	0	+	
$x-\mathbf{2}$		–	0	+		+	
$f(x)$		+	**0**	–	**0**	+	

Les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les réels $x \in]-\infty\ ; 2[\cup]3\ ; +\infty[$.
$S =]-\infty\ ; 2[\cup]3\ ; +\infty[$.

4) La courbe représentative de f est une parabole.
Les ordonnées des points de cette parabole sont strictement positives lorsque les abscisses appartiennent à $]-\infty\ ; 2[\cup]3\ ; +\infty[$.



35 page 36

L'ensemble des solutions est noté $\mathcal{S}$.

a) $2x^2 - 12x + 18 = 0$ équivaut à $x^2 - 6x + 9 = 0$ équivaut à $(x-3)^2 = 0$

$\mathcal{S}_a = \{3\}$

b) $x^2 - x + 6 = 0$ équivaut à $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 6 = 0$ équivaut à $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{23}{4} = 0$

$\mathcal{S}_b = \emptyset$ (somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif)

ou encore : discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times6 = -23$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle.

c) $3x^2 + 4x - 1 = 0$

Factorisation de $3x^2 + 4x - 1$

Forme canonique

$$3x^2 + 4x - 1 = 3(x^2 + \frac{4}{3}x) - 1 = 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] - 1 = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 1$$

$$= 3(x + \frac{2}{3})^2 - \frac{7}{3} = 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right]$$

Factorisation

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right] = 3\left(x+\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

Résolution :

Un produit est nul si et seulement si ….

On a donc : $x + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} = 0$ ou $x + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3} = 0$

soit : $x = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ ou $x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$.

L'équation possède deux solutions : $\mathcal{S}_c = \{ \frac{-2-\sqrt{7}}{3} ; \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \}$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 12 = 28 = 4\times 7$
$\Delta > 0$, d'où, l'équation possède deux solutions :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{2\times 3} = \frac{-2-\sqrt{7}}{3}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2\sqrt{7}}{2\times 3} = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$

$\mathcal{S}_c = \{ \frac{-2-\sqrt{7}}{3} ; \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \}$

d) $2x^2 - x + 1 = 0$ équivaut à $2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 1 = 0$ équivaut à $2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] + 1 = 0$

équivaut à $2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + 1 = 0$ équivaut à $2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = 0$

$\mathcal{S}_d = \emptyset$ (somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif)

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = -7$
$\mathcal{S}_d = \emptyset$

36 page 36

a) $2x^2 + 3x - 2$ $\Delta = 3^2 - 4\times2\times(-2) = 25 = 5^2$

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1}{2}$

b) $3x^2 - 4x + 1$ Une racine évidente 1, car, $3 - 4 + 1 = 0$. On peut factoriser par $x - 1$

On a donc : $3x^2 - 4x + 1 = (x - 1)(3x - 1)$. L'autre racine est $\dfrac{1}{3}$.

c) $8x^2 - 2x - 1$ $\Delta = (-2)^2 - 4\times8\times(-1) = 36 = 6^2$

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

d) $\dfrac{1}{3}x^2 + x - 6$ $\Delta = 1^2 - 4\times\dfrac{1}{3}\times(-6) = 9 = 3^2$

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$

---

37 page 36

a) $y = x^2 - 4x + 3$ Une racine évidente 1, car, $1 - 4 + 3 = 0$. On peut factoriser par $x - 1$

On a donc : $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. L'autre racine est 3.

La parabole d'équation $y = x^2 - 4x + 3$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (1 ; 0) ; (3 ; 0).

b) $y = 3x^2 + 2x + 3$ $\Delta = 2^2 - 4\times3\times3 = -32$

Comme $\Delta < 0$, l'expression $3x^2 + 2x + 3$ n'a aucune racine réelle.

La parabole d'équation $y = 3x^2 + 2x + 3$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

c) $y = -x^2 - 9x - 20$ $\Delta = (-9)^2 - 4\times(-1)\times(-20) = 1$

$-x^2 - 9x - 20$ possède deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -5$

La parabole d'équation $y = -x^2 - 9x - 20$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (–5 ; 0) ; (–4 ; 0).

d) $y = x^2 + 2x = x(x + 2)$

$x^2 + 2x$ possède deux racines 0 et –2

La parabole d'équation $y = x^2 + 2x$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (–2 ; 0) ; (0 ; 0).

---

38 page 36 **Avec ou sans discriminant**

équation	Discriminant " utile " Oui-Non	éléments pour résoudre	solutions éventuelles
$x^2 + 6x = 0$	NON	Factorisation immédiate du facteur x : $x(x + 6) = 0$	$\mathscr{S} = \{-6;0\}$

$2x^2 - 2x + 6 = 0$	oui	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-2)^2 - 4\times2\times6 = -44$ $\Delta < 0$	$\mathcal{S} = \varnothing$
$3x^2 + 4 = 0$	NON	Somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif.	$\mathcal{S} = \varnothing$
$x^2 + 2x + 1 = 0$	NON	Factorisation immédiate : $(x + 1)^2 = 0$	$\mathcal{S} = \{-1\}$
$2x^2 - 8 = 0$	NON	équation équivalente à l'équation $x^2 = 4$	$\mathcal{S} = \{-2 ; 2\}$
$(2x - 1)(x + 4) = 0$	NON	déjà factorisée	$\mathcal{S} = \left\{-4 ; \frac{1}{2}\right\}$
$3x^2 - 4x = 0$	NON	Factorisation immédiate du facteur x : $x(3x - 4) = 0$	$\mathcal{S} = \left\{0 ; \frac{4}{3}\right\}$
$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$	OUI	$\Delta = b^2 - 4ac$ $= \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{35}{48}$ $\Delta > 0$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{-1}{4}-\frac{\sqrt{35}}{4\sqrt{3}}}{2\times\frac{1}{3}}$ $x_1 = \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{35}}{4\sqrt{3}}\times\frac{3}{2} = \frac{-3-\sqrt{105}}{8}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{105}}{8}$

Commentaires sur ce dernier cas : pour éviter des calculs avec beaucoup de quotients ….

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ équivaut à $4x^2 + 3x - 6 = 0$ (*on a multiplié chaque membre de l'égalité par 12*)

$$\Delta = 3^2 - 4\times4\times(-6) = 9 + 96 = 105$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{105}}{2\times4} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{105}}{2\times4}$$

45 page 36 .

factorisation en produit de facteurs du premier degré :

a) $x^2 - 4x - 1$

Une méthode :

$x^2 - 4x - 1 = (x - 2)^2 - 4 - 1 = (x - 2)^2 - 5$

$= [(x - 2) - \sqrt{5}\,][(x - 2) + \sqrt{5}\,]$

$= (x - 2 - \sqrt{5}\,)(x - 2 + \sqrt{5}\,)$

Une autre méthode :

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times(-1) = 20 = 4\times5 = (2\sqrt{5}\,)^2$

Calcul des racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-(-4)-2\sqrt{5}}{2\times 1}$, $x_2 = \dfrac{-(-4)+2\sqrt{5}}{2\times 1}$.

Après réduction : $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{5}$

Le coefficient de x^2 est 1, d'où, $x^2 - 4x - 1 = 1\times[x-(2-\sqrt{5})][x-(2+\sqrt{5})]$

$= (x - 2 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{5})$

b) $x^2 - x - 6$

Une méthode :

$$x^2 - x - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}.$$

$$= [(x - \frac{1}{2}) - \frac{5}{2}][(x - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2}]$$

$$= (x-3)(x+2)$$

Une autre méthode :

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 25$

Calcul des racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-(-1)-5}{2\times 1}$, $x_2 = \dfrac{-(-1)+5}{2\times 1}$

Après réduction : $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$

Le coefficient de x^2 est 1, d'où, $x^2 - x - 6 = 1\times[x-(-2)][x-3]$

$= (x+2)(x-3)$

c) $3x^2 + 7x + 2$

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4\times 3\times 2 = 25$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 = \dfrac{-7-5}{2\times 3} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-7+5}{2\times 3} = -\dfrac{1}{3}$.

$3x^2 + 7x + 2 = 3(x-(-2))(x-(-\frac{1}{3})) = (x+2)(3x+1)$.

d) $16x^2 + 24x + 9$ On **remarque** : $24x = 2\times 4x\times 3$, d'où,

$16x^2 + 24x + 9 = (4x+3)^2$

commentaires : le calcul de Δ ..... discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ = ... = 0, on a donc une racine double.

C'est donc le développement d'une somme au carré.

---

49 page 37

a) $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

Rappel : Les facteurs du premier degré s 'annulent en changeant de signe.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'expression $x^2 - 4$ est positive sur $]-\infty\ ; -2] \cup [2\ ; +\infty[$

L'expression $x^2 - 4$ est négative sur $[-2\ ; 2]$.

b) $4x^2 - 8 = 4(x^2 - 2)$

Comme $4 > 0$, le signe de $4x^2 - 8$ est celui de $x^2 - 2$

$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x - \sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'expression $4x^2 - 8$ est positive sur $]-\infty\ ; -\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}\ ; +\infty[$

L'expression $4x^2 - 8$ est négative sur $[-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\,]$.

c) $(x - 2)(x + 3)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x - 2)(x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'expression $(x - 2)(x + 3)$ est positive sur $]-\infty\ ; -3] \cup [2\ ; +\infty[$

L'expression $(x - 2)(x + 3)$ est négative sur $[-3\ ; 2]$.

d) $-3x^2 + x + 10$

calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times(-3)\times 10 = 121 = 11^2$,

d'où, l'expression est factorisable.

Les racines sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-11}{2\times(-3)} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+11}{2\times(-3)} = -\dfrac{5}{3}$.

Le coefficient -3 de x^2 est négatif, d'où,

l'expression est positive pour $x \in [-\dfrac{5}{3}\ ; 2]$, et,

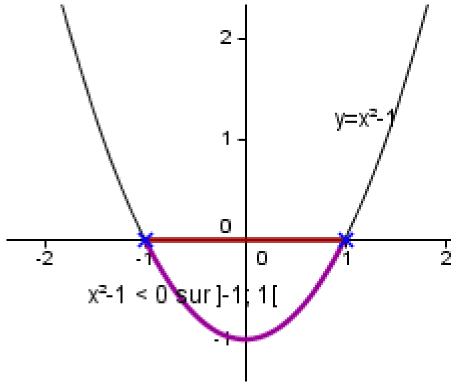
l'expression est négative pour $x \in]-\infty\ ; -\dfrac{5}{3}] \cup [2\ ; +\infty[$.

---

50 page 37

a) $x^2 - 1 < 0$.

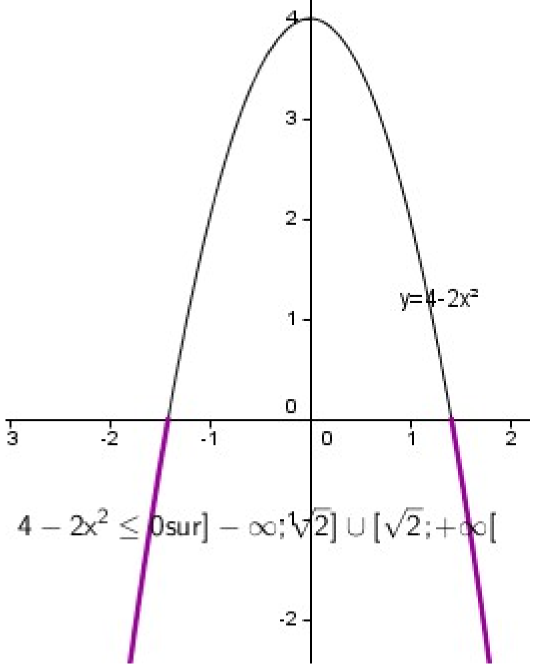
Comme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, les solutions de l'inéquation $x^2 - 1 < 0$ sont les réels de l'intervalle $]-1\ ; 1[$.



b) $4 - 2x^2 \leqslant 0$

Comme $4 - 2x^2 = -2(x^2 - 2)$ voir exercice 49/

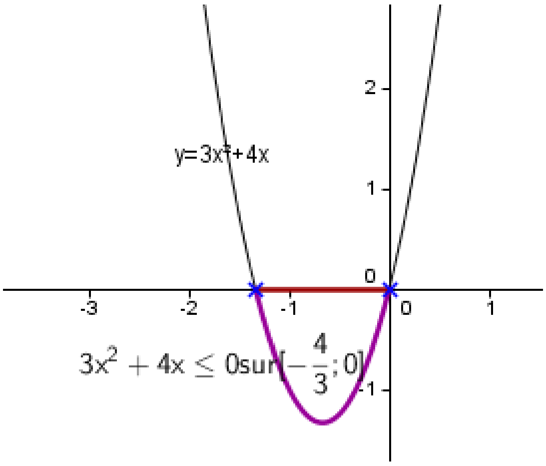
les solutions de l'inéquation $4 - 2x^2 \leqslant 0$ sont les réels de la réunion d'intervalles : $]-\infty\ ; -\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{2}\ ; +\infty[$.



c) $3x^2 + 4x = x(3x + 4)$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$3x + 4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(3x + 4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $3x^2 + 4x \leqslant 0$ sont les réels de l'intervalle $[-\frac{4}{3}\ ; 0]$

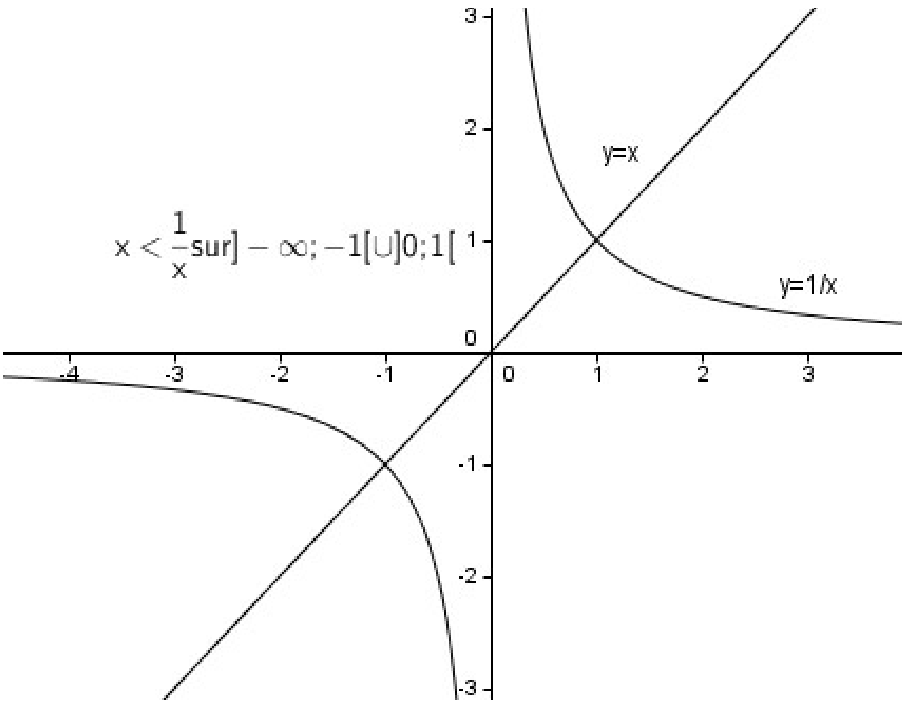


d) $x < \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - \dfrac{1}{x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x} < 0 \end{cases}$

Signe de $x^2 - 1$ (voir a) de cet exercice)

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

les solutions de l'inéquation $x < \dfrac{1}{x}$ sont les réels de la réunion d'intervalles : $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]0\,;1[$



53 page 37

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 5x + \dfrac{7}{2}$

$\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative de g définie sur ℝ par $g(x) = -x^2 - 3x$.

1) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \dfrac{7}{2} > -x^2 - 3x$

Or, $x^2 + 5x + \dfrac{7}{2} > -x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 5x + \dfrac{7}{2} + x^2 + 3x > 0$

On résout donc : $2x^2 + 8x + \dfrac{7}{2} > 0$

Calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 28 = 36 = 6^2$

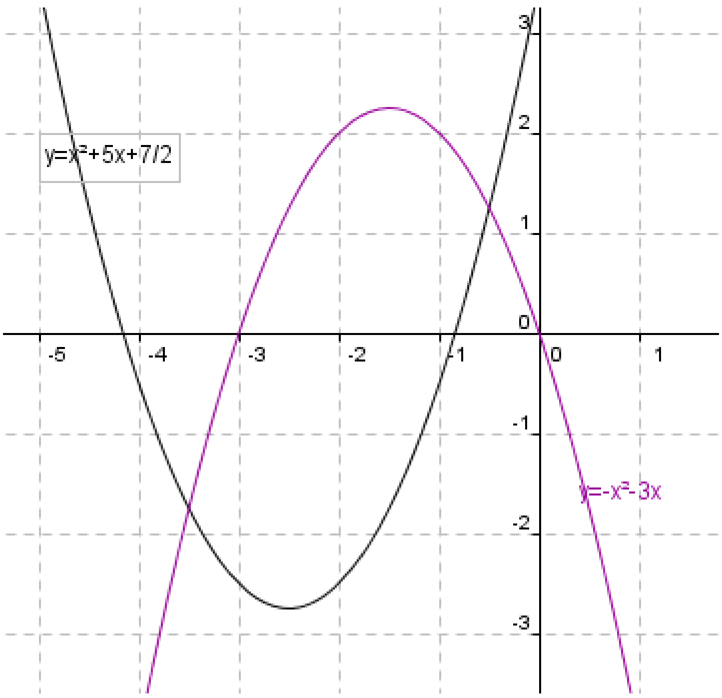
Les racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = ... = -\dfrac{7}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{1}{2}$.

L'expression $2x^2 + 8x + \dfrac{7}{2}$ est donc du signe de 2, coefficient de x^2, pour $x \in \left]-\infty\ ; -\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}\ ; +\infty\right[$.

Conclusion : $f(x) > g(x)$ si et seulement si $x \in \left]-\infty\ ; -\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}\ ; +\infty\right[$.

2) $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-\infty\ ; -\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}\ ; +\infty\right[$.

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en deux points d'abscisses respectives : $-\dfrac{7}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$.



54 page 37 fonction bornée

f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1}$

1) Étude de l'**ensemble de définition de *f*.**

(***Autrement dit*** : on cherche l'ensemble des réels x pour lesquels le calcul de $f(x)$ est possible.
la seule opération impossible ici est la division par 0).

Résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = -3$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution.

Conclusion : La fonction *f* est définie sur ℝ.

2) Résolution des inéquations : $f(x) < 5$ et $f(x) > -6$

$\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1} < 5$

Méthode la plus prudente ….

On ramène à une comparaison à 0 et on fait une étude de signes après avoir factorisé si cela est nécessaire.

Pour tout x réel,

$\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1} - 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4x^2-5-5(x^2+x+1)}{x^2+x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-x^2-5x-10}{x^2+x+1} < 0$

Signe de $-x^2 - 5x - 10$:

$\Delta = (-5)^2 - 4\times(-1)\times(-10) = -15$

Comme $\Delta < 0$ et le coefficient -1 de x^2 est négatif, l'expression $-x^2 - 5x - 10$ est strictement négative.

Signe de $x^2 + x + 1$

On vient de voir $\Delta < 0$ (au 1/) et le coefficient 1 de x^2 est positif, d'où, l'expression $x^2 + x + 1$ est strictement positive.

Conclusion : Pour tout réel x, $\dfrac{-x^2-5x-10}{x^2+x+1} < 0$, soit : $\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1} < 5$

$\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1} > -6$

Pour tout x réel,

$\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1} + 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4x^2-5+6(x^2+x+1)}{x^2+x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{10x^2+6x+1}{x^2+x+1} < 0$

Signe de $10x^2 + 6x + 1$:

$\Delta = 6^2 - 4\times10\times1 = -4$

Comme $\Delta < 0$ et le coefficient 1 de x^2 est st positif, d'où, l'expression $10x^2 + 6x + 1$ est strictement positive.

Conclusion : Pour tout réel x, $\dfrac{10x^2+6x+1}{x^2+x+1} > 0$, soit : $\dfrac{4x^2-5}{x^2+x+1} > -6$

3) On peut choisir : $y_{min} = -6$ et $y_{max} = 5$ d'après les résultats du 2/

Remarque : Vocabulaire

-6 et 5 ne sont pas des extremums (minimum et maximum de *f*) puisqu'ils ne sont pas atteints.

On dit que -6 est un minorant de *f* et que 5 est un majorant de *f*.

Pour tout réel x, $-6 < f(x) < 5$

La fonction *f* est dite bornée sur ℝ (minorée ET majorée)

55 page 37

Soit $g(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$ sur ℝ.

La fonction g est une fonction polynôme du troisième degré.

1) Lecture graphique : (*graphique réalisé avec Sine Qua Non*)

2 a) $g(1) = 1^3 + 5\times 1^2 - 12\times 1 + 6 = 12 - 12 = 0$.

1 est donc une solution de l'équation $g(x) = 0$

b) Puisque $g(1) = 0$, on peut factoriser $g(x)$ par $x - 1$.

$g(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

En développant : $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$.

$= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Par **identification des coefficients** avec l'expression donnée de $g(x)$ dans l'énoncé :

$(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

$\begin{cases} a=1 \\ b-a=5 \\ c-b=-12 \\ -c=6 \end{cases}$, soit : $a = 1$, $b = 5 + 1 = 6$, $c = -6$ (Vérifier que $c - b = -12$)

Conclusion : pour tout réel x, $g(x) = (x - 1)(x^2 + 6x - 6)$

c) Signe de $g(x)$

On cherche le signe de $x^2 + 6x - 6$

$\Delta = 6^2 - 4\times 1\times(-6) = 60 = 4\times 15$.

Le polynôme a deux racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-2\sqrt{15}}{2\times 1} = -3 - \sqrt{15}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+2\sqrt{15}}{2\times 1} = -3 + \sqrt{15}$

L'expression $x^2 + 6x - 6$ du second degré est du signe de 1 coefficient de x^2 à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

On peut résumer dans un tableau de signes après avoir classé les trois racines de g.

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	**0**	$+$	
x^2+6x-6		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

61 page 38

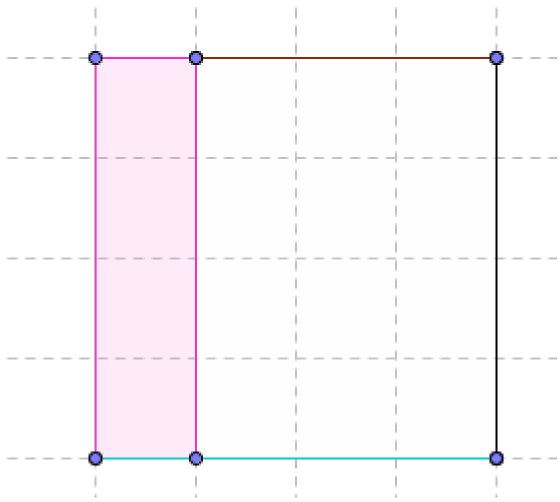
Analyse de la construction :

On doit avoir $3x < 10$ pour que la construction soit possible, soit : $0 < x < \dfrac{10}{3}$

L'aire du grand carré : $10\times10 = 100$ cm²

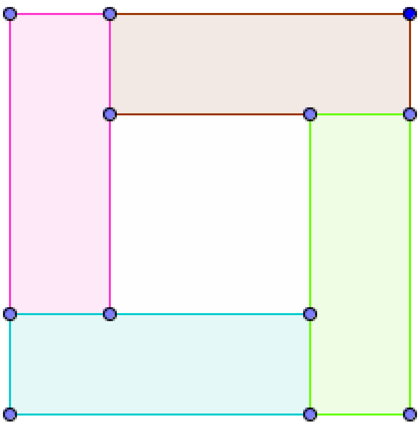
L'aire du carré délimitant la bande : $(10-2x)^2$
L'aire du carré au centre de côté x : x^2
L'aire de la bande : $100-(10-2x)^2$ (ce qui donne : $40x-4x^2$)
L'aire colorée : $100-(10-2x)^2+x^2$ (ce qui donne : $40x-3x^2$)
L'aire de la partie blanche : $(10-2x)^2-x^2$ (ce qui donne : $100-40x+3x^2$)

Remarque : On prend un rectangle de dimensions 10 sur x



les quatre rectangles accolés font que les " coins " (carrés de x sur x sont comptées deux fois).
On a alors : $4\times10\times x-4\times x^2 = 40\,x-4x^2$

ou encore



on prend quatre rectangles de dimension $10-x$ sur x, d'où, l'aire est : $4\times(10-x)\times x = 40x-4x^2$

Mise en inéquation :

Le problème est ramené à la résolution de $100 - (10 - 2x)^2 + x^2 < (10 - 2x)^2 - x^2$ avec $0 < x < \frac{10}{3}$

Les calculs :

$100 - (10 - 2x)^2 + x^2 < (10 - 2x)^2 - x^2$ équivaut à $2(10 - 2x)^2 - 2x^2 - 100 > 0$

équivaut à $(10 - 2x)^2 - x^2 - 50 > 0$

équivaut à $100 - 40x + 4x^2 - x^2 - 50 > 0$

équivaut à $3x^2 - 40x + 50 > 0$

On reconnaît un trinôme du second degré : $a = 3$, $b = -40$ et $c = 50$
et on cherche quand le trinôme est strictement positif.

Recherche de la forme canonique :

$$3x^2 - 40x + 50 = 3(x^2 - \frac{40}{3}x + \frac{50}{3}) = 3[(x - \frac{20}{3})^2 - \frac{400}{9} + \frac{50}{3}] = 3[(x - \frac{20}{3})^2 - \frac{250}{9}]$$

puis factorisation :

$$3[(x - \frac{20}{3})^2 - \frac{250}{9}] = 3[(x - \frac{20}{3} - \frac{5\sqrt{10}}{3})(x - \frac{20}{3} + \frac{5\sqrt{10}}{3})]$$

puis tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{20-5\sqrt{10}}{3}$		$\frac{20+5\sqrt{10}}{3}$		$+\infty$
$x - \frac{20}{3} - \frac{5\sqrt{10}}{3}$		$-$		$-$	**0**	$+$	
$x - \frac{20}{3} + \frac{5\sqrt{10}}{3}$		$-$	**0**	$+$		$+$	
Produit		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

Solution :

Comme $0 < x < \frac{10}{3}$, les solutions sont les réels de l'intervalle $]0\,;\, \frac{20-5\sqrt{10}}{3}[$

En appliquant les formules :

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = ... = 1\,000$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles :

Les racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, d'où,

$$x_1 = \frac{40-10\sqrt{10}}{2\times 3} = \frac{20-5\sqrt{10}}{3} \text{ et } x_2 = \frac{40+10\sqrt{10}}{2\times 3} = \frac{20+5\sqrt{10}}{3}$$

Seule la racine x_1 est acceptable, car, $0 < x_1 < \frac{10}{3} < x_2$

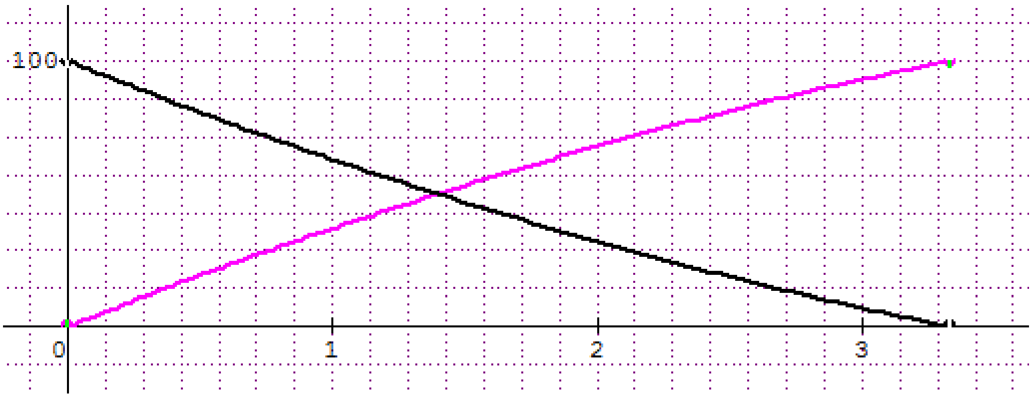
Solution :

Le trinôme du second degré est du signe du coefficient 3, donc positif, lorsque x est à l'extérieur des racines.

On a donc : $x \in \,]0\,;\, \frac{20-5\sqrt{10}}{3}[$

Graphiquement :

En représentant l'aire colorée (en magenta) et l'aire de la partie blanche (en noir), on observe (valeur approchée) que l'aire colorée est inférieure à l'aire de la partie blanche sur l'intervalle .....



100 page 42

1) Les deux définitions suivantes sont équivalentes :

définition 1 :

la distance d'un point A à une droite d est la longueur du segment issu de ce point A et perpendiculaire à cette droite d.

définition 2 :

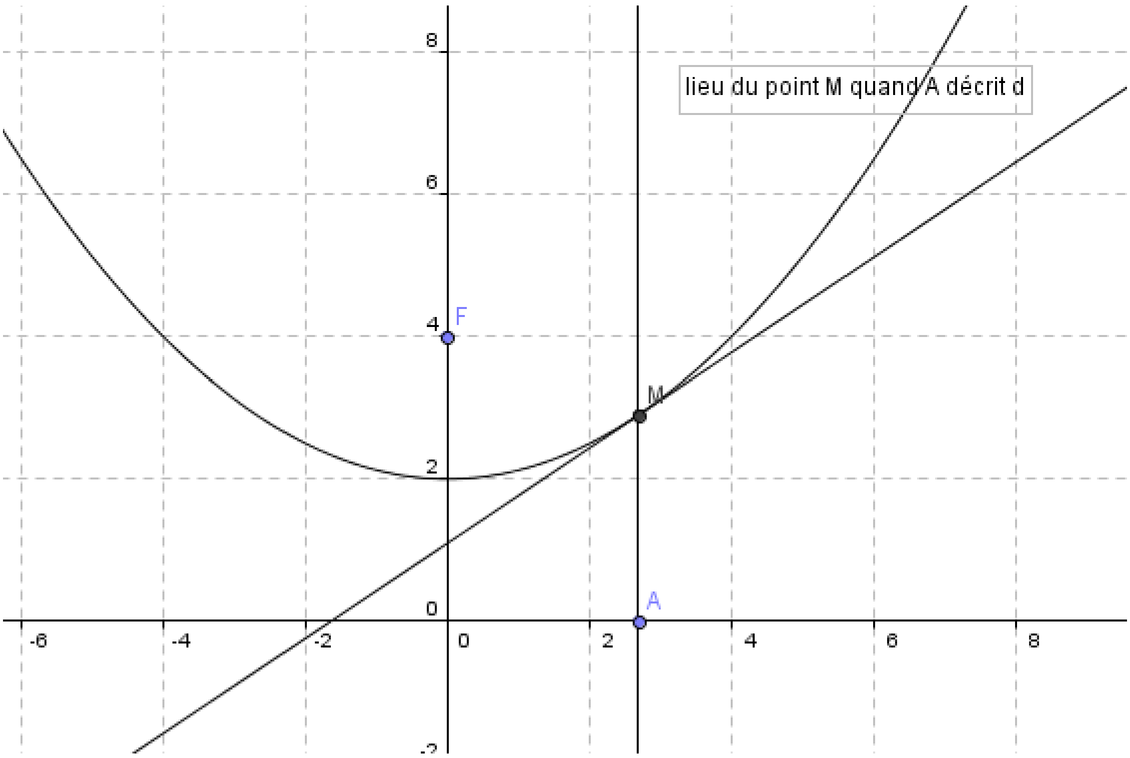
la distance d'un point A à une droite d est la longueur minimale de tous les segments $[AM]$ où M décrit d.

2) Expérimentation :

D'après la définition 1/, M est sur une droite perpendiculaire à d.

Le point M étant équidistant de A et F est sur la médiatrice de $[AF]$.

Le point M est donc à l'intersection de la perpendiculaire à d passant par A et de la médiatrice de $[AF]$.



Il semble que M décrit une parabole quand A décrit d.

a) b) dans le repère (O; I, J), une équation de d est $y = 0$ et le point $F(0 ; a)$

$MF^2 = (x - 0)^2 + (y - a)^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2$

La distance de M à d est AM, or, $A(x ; 0)$ (L'abscisse de A est celle de M par construction du point M)

$AM^2 = (x - x)^2 + (y - 0)^2 = y^2$

c) Or, M est tel que $MF = MA$.

Comme les distances positives, il suffit de comparer les carrés.

Soit : $x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2$ qui se réduit en : $2ay = x^2 + a^2$

Comme $a \neq 0$, il vient : $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$.

Une équation de P est : $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$.

On obtient bien une équation de parabole.

d) Cette parabole passe par le milieu S de $[OF]$: $S(0 ; \frac{a}{2})$ qui est le sommet.

Elle passe aussi par le point $B(a ; a)$. (Il est évident que ce point B est équidistant de F et de d puisqu'on obtient un carré).

F s 'appelle le foyer de la parabole.

d est la directrice de la parabole.

Géométriquement : une parabole est l'ensemble des points équidistants d'un point fixe (foyer) et d'une droite fixe (directrice).

---

101 page 42

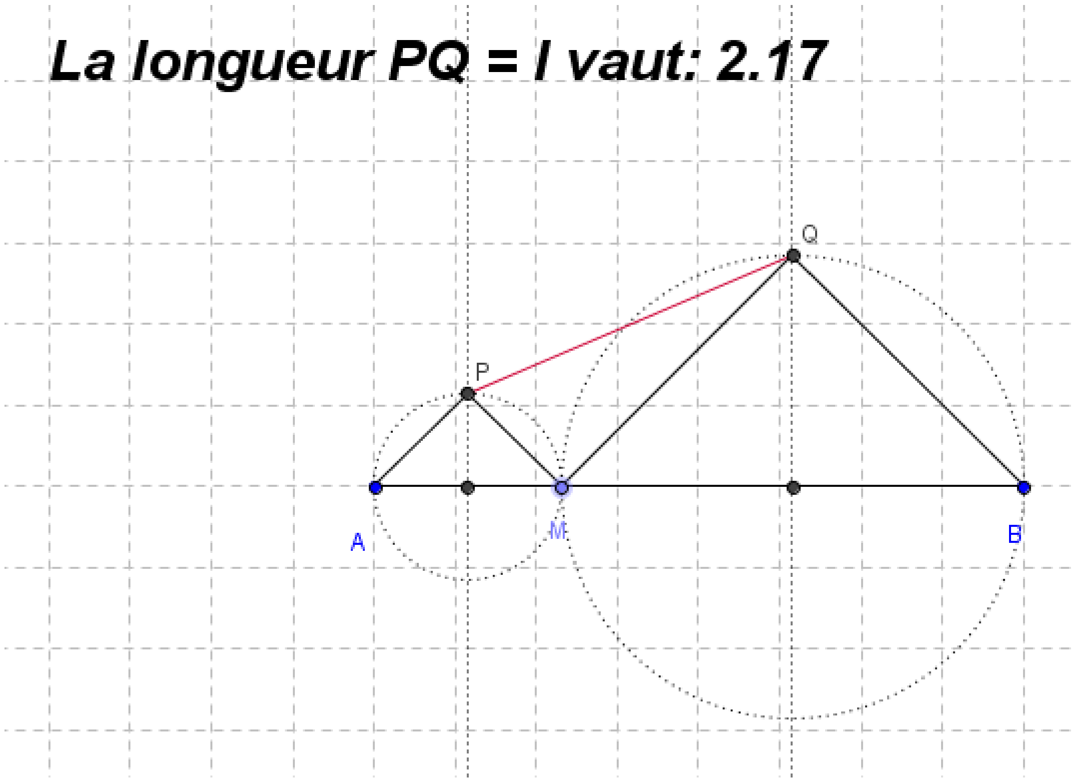
1- Figure

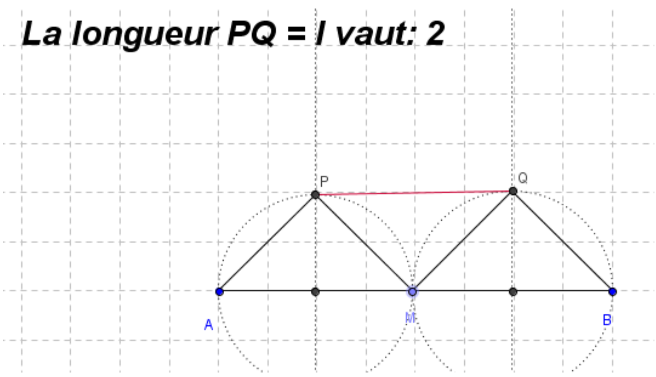
Retenir :

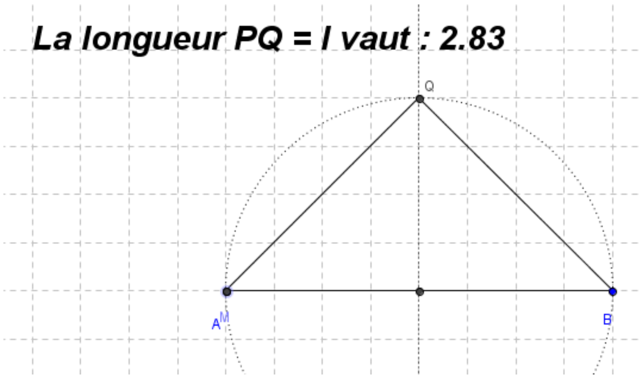
Une méthode pour construire un triangle rectangle est de construire un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse.

Puisque les triangles sont isocèles, les points P et Q sont à l'intersection des médiatrices des diamètres $[AM]$ et $[BM]$ et des demi-cercles respectifs.

Voir : http://dossierslmm.chez-alice.fr/1S/DM6_101page42.html







Conjecture:

Le minimum est 2

le maximum est : 2,83 (valeur approchée)

La longueur semble comprise entre 2 et 2,83 (valeurs approchées)

2- a) A, M, B sont alignés dans cet ordre, d'où $\widehat{AMB} = 180°$

AMP et MQB triangles isocèles et rectangle en P et en Q, d'où, $\widehat{AMB} = \widehat{BMQ} = 45°$

On a alors: $\widehat{PMQ} = 180° - 2\times 45° = 90°$

b) On cherche : PQ^2 , et, on a un triangle rectangle, d'où, la propriété de Pythagore

Dans ce triangle PQM rectangle en M, on obtient:

$PQ^2 = PM^2 + MQ^2$

On cherche PM^2 et MQ^2 .... et on a des triangles rectangles , d'où, ...

Dans les triangles APM et BQM rectangles et isocèles en P et en Q

On a : $PM = PA$ et $MQ = QB$, et,

$AM^2 = PM^2 + PA^2 = 2PM^2$ et $MB^2 = MQ^2 + QB^2 = 2MQ^2$

$PM^2 = \frac{1}{2} AM^2$ et $MQ^2 = \frac{1}{2} MB^2$

Comme $AM = x$ et $BM = 4 - x$, il vient :

$PQ^2 = \frac{1}{2} AM^2 + \frac{1}{2} BM^2 = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (4 - x)^2 = x^2 - 4x + 8$

Remarque : On peut aussi utiliser la trigonométrie :

Sachant que $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a : " côté adjacent " cos 45° $\times$ hypoténuse

ou " côté opposé " = sin 45° $\times$ hypoténuse

D'où, $PM = \frac{\sqrt{2}}{2} x$ et $MQ = \frac{\sqrt{2}}{2} (4 - x)$

3- La fonction $x \mapsto PQ^2$ définie sur [0; 4] est une fonction du second degré.

Le coefficient de x^2 étant positif, elle admet un minimum en $\alpha = -\frac{b}{2a} = 2$ qui vaut: $2^2 - 4\times2 + 8 = 4$

x	0	2	4
$f(x)$	8 ↘	4	↗ 8

b) Le maximum de la fonction est 8 atteint en 0 et en 4.

On obtient: $4 \leqslant PQ^2 \leqslant 8$, puis, $2 \leqslant PQ \leqslant 2\sqrt{2}$, car, la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

c) Donnée : $l \notin [2 ; 2\sqrt{2}]$, c'est-à-dire $0 \leqslant l < 2$ ou $l > 2\sqrt{2}$

Si $0 \leqslant l < 2$ alors $0 \leqslant l^2 < 4$,

et,

si $l > 2\sqrt{2}$ alors $l^2 > 8$

Ce qui est impossible dans les deux cas d'après l'étude précédente puisque $PQ = l$.

4) a) I est le point d'intersection

de la demi-droite $[AP)$ qui est définie par le point fixe A et l'angle constant $\widehat{MAP} = 45°$ et

de la demi-droite $[BQ)$ qui est définie par le point fixe B et l'angle constant $\widehat{MBQ} = 45°$.

Ces deux demi-droites sont indépendantes du point M.

D'autre part, AIB est un triangle rectangle isocèle en I.

b) Comme $PIQM$ est un rectangle (quatre angles droits) , les diagonales sont de même longueur, d'où, $IM = PQ = l$.

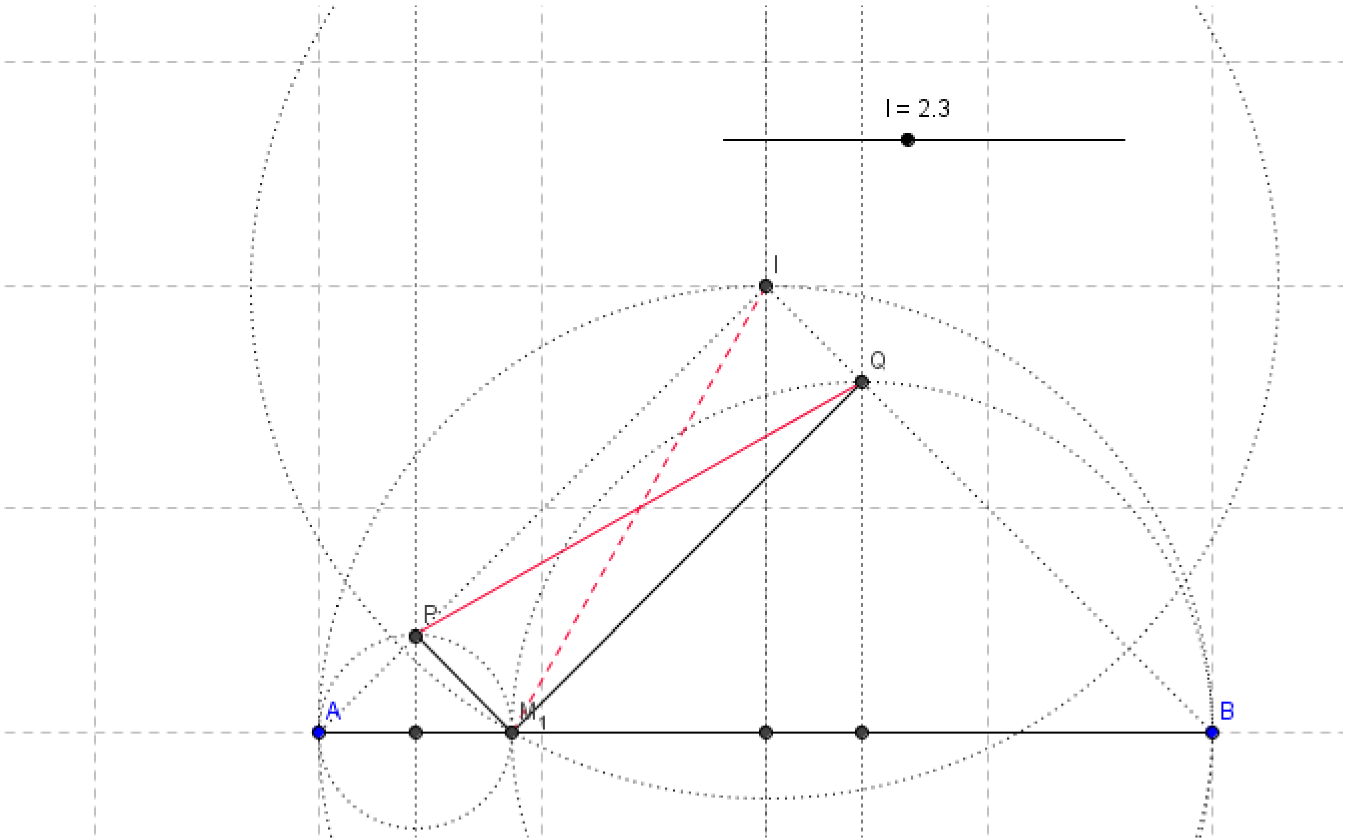
5) a) On construit le triangle isocèle et rectangle en I en construisant le demi-cercle de diamètre $[AB]$
Le point I est le point d'intersection du demi-cercle et de la médiatrice de $[AB]$.

On trace un cercle de centre I et de rayon l. Ce cercle coupe la droite (AB) en deux points M_1 et M_2 .

b) *Construction avec* $l = 3$ *(première édition)*

Cette construction est impossible puisque $3 > 2\sqrt{2}$

Construction avec $l = 2,3$



Le point M est l'un des points obtenus en construisant l'arc de centre I et de rayon 2,3.

Voir : http://dossierslmm.chez-alice.fr/1S/DM6_101page42_5.html

104 page 43

1) Le rayon maximal r que l'on peut choisir est $r_{max} = 10$ cm

2) a) Le volume d'eau contenu dans le récipient lors de la première expérience est : $\mathcal{V}_1 = \pi\times10^2\times10 - \frac{4}{3}\pi\times5^3$

Remarquer : $10^2\times10 = 2^2\times5^2\times2\times5 = 2^3\times 5^3$

En factorisant $\frac{4}{3}\pi\times5^3$, on a : $\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi\times5^3(6-1) = \frac{4}{3}\pi\times5^4$ (cm^3) $\mathcal{V}_1 = \frac{2500}{3}\pi$

b) Lors de la seconde expérience, le volume d'eau est : $\mathcal{V}(r) = \pi\times10^2\times2r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r(150 - r^2)$

3 a) Les volumes étant égaux , on a l'égalité : $\frac{2500}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r(150 - r^2)$

On divise par 4π, on multiplie par 3 les deux membres de l'égalité.

D'où l'équation : $625 = r(150 - r^2)$, soit : $r^3 - 150r + 625 = 0$
(Il est évident que 5 est une solution de cette équation d'après le problème donné.
C'est ce qui justifie la factorisation de $r - 5$.)

b) **Méthode :**
Par identification des coefficients :

$(r - 5)(ar^2 + br + c) = ar^3 + br^2 + cr - 5ar^2 - 5br - 5c$
$\qquad = ar^3 + (b - 5a)r^2 + (c - 5b)r - 5c$

Cette expression doit être égale pour tout r à $r^3 - 150r + 625$

$$\begin{cases} \text{Coefficient de degré 3} : & a=1 \\ \text{Coefficient de degré 2} : & b-5a=0 \\ \text{coefficient de degré 1} : & c-5b=-150 \\ \text{coefficient de degré nul:} & -5c=625 \end{cases} \text{, on trouve : } \begin{cases} a=1 \\ b=5 \\ c=-125 \end{cases}$$

l'équation $r^3 - 150r + 625 = 0$ est équivalente à l'équation : $(r - 5)(r^2 + 5r - 125) = 0$
Le produit est nul si et seulement si $r - 5 = 0$ ou $r^2 + 5r - 125 = 0$

Résolution de $r^2 + 5r - 125 = 0$
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4\times1*(-125) = 25\times(1 + 20) = 25\times21$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-5\sqrt{21}}{2\times1}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+5\sqrt{21}}{2\times1} = \frac{5\sqrt{21}-5}{2}$.

c) Conclusion : Puisque $0 < r \leqslant 10$ et $r \neq 5$, la seule solution acceptable est $\frac{5\sqrt{21}-5}{2}$ cm.