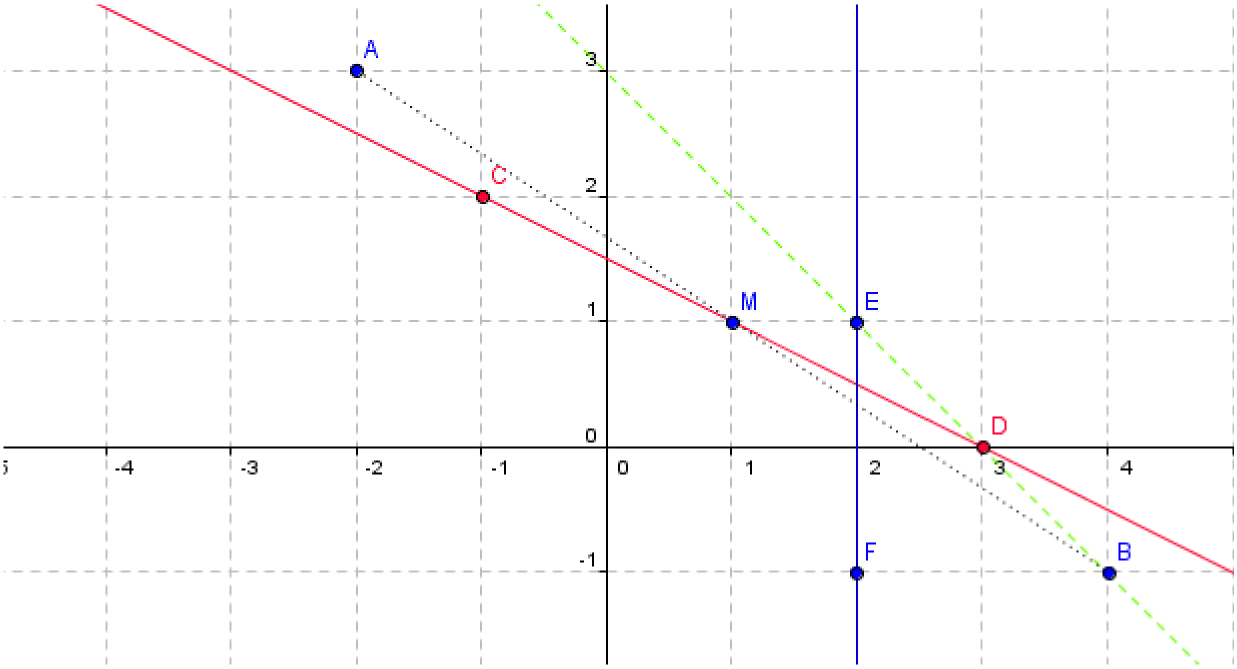
Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Index

1 page 257....2
12 page 274....3
14 page 274....4
15 page 274....4
16 page 274....5
17 page 274....5
22 page 275....5
24 page 275....7
25 page 275....8
27 page 275....9
28 page 275....10
29 page 275....11
32 page 276....11
33 page 276....12
34 page 276....12
38 page 276....13
41 page 276....14
42 page 276 (Configuration du trapèze complet)....15
44 page 277. Ajouter une question 6/....18
47 page 277....20
48 page 277....22
49 page 277....22
50 page 277....23
54 page 278....24
55 page 278....25
56 page 278....25
57 page 278....27
62 page 278....29
63 page 278....30
64- 65 page 278....31
88 page 282....31
89 page 282....34
90 page 282....35
93 page 283 Orthocentre et droite d'Euler....37
94 page 282....38
96 page 284....39
99 page 284....43

1 page 257



1) $A(-2\ ;\ 3)$ $B(4\ ;\ -1)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-2)\\-1-3\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$.

M est le milieu de $[AB]$: $\begin{cases}x_M=\dfrac{-2+4}{2}\\ y_M=\dfrac{3-1}{2}\end{cases}$, $M(1\ ;\ 1)$

2) a) Lecture graphique : $C(-1;2)$, $D(3\ ;\ 0)$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

$E(2\ ;\ 1)$, $F(2\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$.

b) coefficient directeur de (CD) : $-\dfrac{1}{2}$

coefficient directeur de (EF) : n'existe pas.

c) équation réduite de (CD) : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

équation réduite de (EF) $x=2$

d) $M(1\ ;\ 1)$ appartient à (CD) car ses coordonnées sont solutions de l'équation : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

En effet : $1=-\dfrac{1}{2}\times 1+\dfrac{3}{2}$.

e) Soit $B(4\ ;\ -1)$.

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3-4\\0-(-1)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-4\\1-(-1)\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

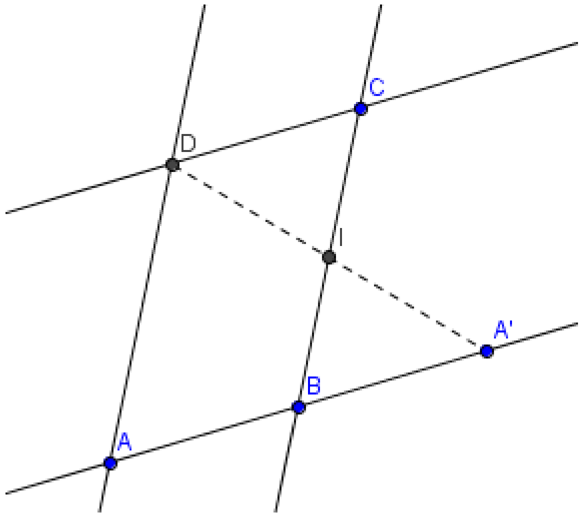
Comme $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}$, les vecteurs sont colinéaires, d'où, les points B, D, E sont alignés .

---

12 page 274

1- ***Traduction de l'énoncé en utilisant les vecteurs***

(**Une seule** des égalités vectorielles proposées **suffit** pour l'équivalence avec la phrase de l'énoncé)



Énoncé	équivaut à	Vecteurs
ABCD est un parallélogramme	⇔	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (1)
		ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (2)
		ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (3)
I est le milieu de [*BC*]	⇔	$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ (4)
		ou $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (5)
		ou $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (6)
A' symétrique de A par rapport à B	⇔	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$ (7)
		ou $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$ (8)
		ou $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA'} = \vec{0}$ (9)

2- Démonstration : I est le milieu de [$A'D$]

Une démonstration :

Par comparaison des égalités (1) et (7), on obtient l'égalité $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA'}$ qui prouve que le quadrilatère $DCA'B$ est un parallélogramme.

Les diagonales [DA'] et [BC] se coupent en leur milieu I.

Une autre démonstration :

Montrons que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IA'}$

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI}$

Or, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IB}$.

On a donc : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA'}$ (Relation de Chasles)

l'égalité $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IA'}$ prouve que I est le milieu de $[DA']$

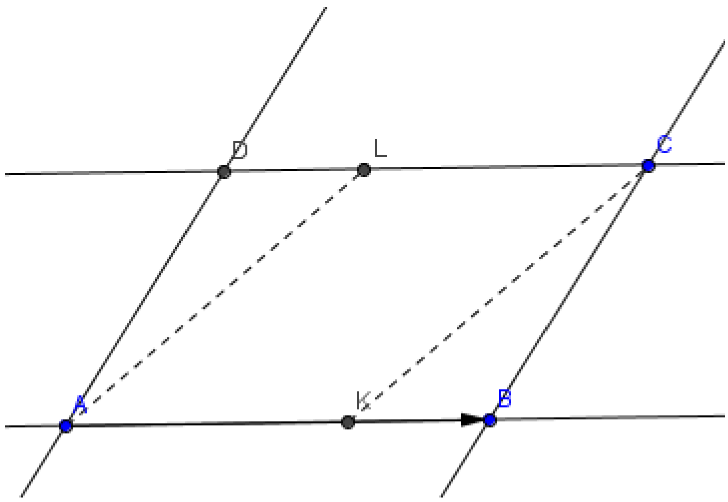
---

14 page 274

a- Construction :

ABCD est un parallélogramme

$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ Le point *K* est donc sur le segment [*AB*] aux deux tiers du segment à partir de *A*.



$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ Le point *L* est donc sur le segment [*CD*] aux deux tiers du segment à partir de *C*.

b- Démonstration : *AKCL* est un parallélogramme

Comme *ABCD* est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD}$

Comme $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, on obtient : $\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{LC}$

L'égalité : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{LC}$ prouve que le quadrilatère *AKCL* est un parallélogramme.

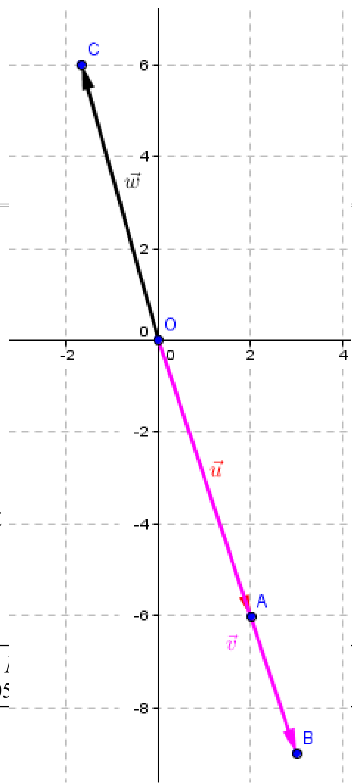
---

15 page 274

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\6\end{pmatrix}$

1) Un représentant d'origine *O* dans le repère (*O*; *I*, *J*).

On place *A*(2 ; –6), *B*(3 ; –9) et *C*($-\frac{5}{3}$; 6), ainsi : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.



2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car : $2\times(-9) = 3\times(-6)$

ou encore : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car, $\frac{3}{2}\ \vec{u} = \vec{v}$

ou encore : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car, $\vec{u} = \frac{2}{3}\ \vec{v}$

ou encore : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car, $3.\vec{u} = 2.\vec{v}$

3) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, car $3\times6 = 18$ et $-9\times\left(-\frac{5}{3}\right) = 15$

---

16 page 274

$\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

1) Comme $\frac{1}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{4}{15}$ et $\frac{1}{6}\times\frac{8}{5} = \frac{2\times4}{2\times3\times5} = \frac{4}{15}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Le coefficient de colinéarité entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\frac{4}{5}\times6 = \frac{24}{5}$: $\vec{v} = \frac{24}{5}\ \vec{u}$.

2) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, en effet : $\frac{4}{5}\times\frac{5}{2} = 2$ et $\frac{8}{5}\times\frac{3}{4} = \frac{6}{5}$, et $2 \neq \frac{6}{5}$.

---

17 page 274

$A(-6 ; -1)$, B$(3 ; 1)$, $C(15 ; 4)$, $D\left(\frac{15}{2} ; 2\right)$

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-6)\\1-(-1)\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}21\\5\end{pmatrix}$.

Comme $9\times5 \neq 2\times21$, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\frac{27}{2}\\3\end{pmatrix}$.

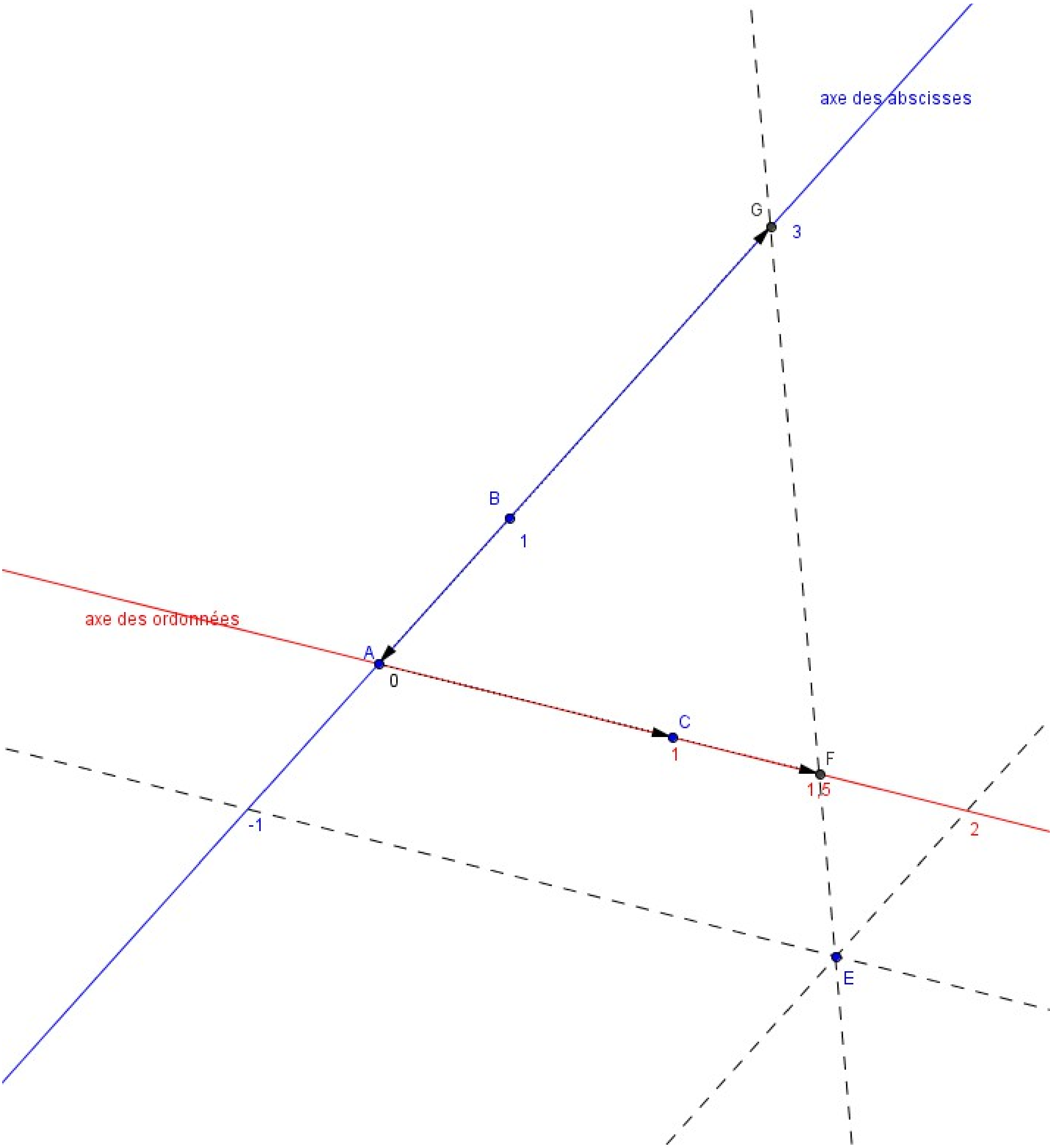
Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$ et, comme $9\times3 = 2\times\frac{27}{2}$, les points A, B et D sont alignés.

---

22 page 275

A, B et C ne sont pas alignés.

Par conséquent, on peut définir le repère (A, B, C).



2) $(A\ ;\ B, C)$ repère Par définition : $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Recherche des coordonnées d'un point M :

Cela revient à écrire $\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$.

a) E est le symétrique de B par rapport à C, donc, C est le milieu de $[BE]$.

On a donc : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$, soit : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$

On a donc : $\overrightarrow{AE} = - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Les coordonnées de E dans le repère (A, B, C) sont : $(-1 ; 2)$

Autre méthode : $\begin{cases} x_C = \dfrac{x_B + x_E}{2} \\ y_C = \dfrac{Y_B + y_E}{2} \end{cases}$, soit $\begin{cases} 0 = \dfrac{1 + x_E}{2} \\ 1 = \dfrac{0 + y_E}{2} \end{cases}$, on en tire : $\begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = 2 \end{cases}$

Comme $\overrightarrow{AF} = 0.\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}.\overrightarrow{AC}$, les coordonnées de F dans le repère (A, B, C) sont $(0 ; \dfrac{3}{2})$.

Comme $\overrightarrow{BG} = -2\overrightarrow{BA}$, on a : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB}$

On obtient : $\overrightarrow{AG} = 3.\overrightarrow{AB}$, les coordonnées de G dans le repère (A, B, C) sont $(3 ; 0)$.

b) Dans le repère (A, B, C), on a :

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ On a donc : $\begin{cases} x_{\overrightarrow{EG}} = 4 \times x_{\overrightarrow{EF}} \\ y_{\overrightarrow{EG}} = 4 \times y_{\overrightarrow{EF}} \end{cases}$

Comme $\overrightarrow{EG} = 4\overrightarrow{EF}$, les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

Les points E, F et G sont alignés.

(On peut aussi faire : $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$ ...)

---

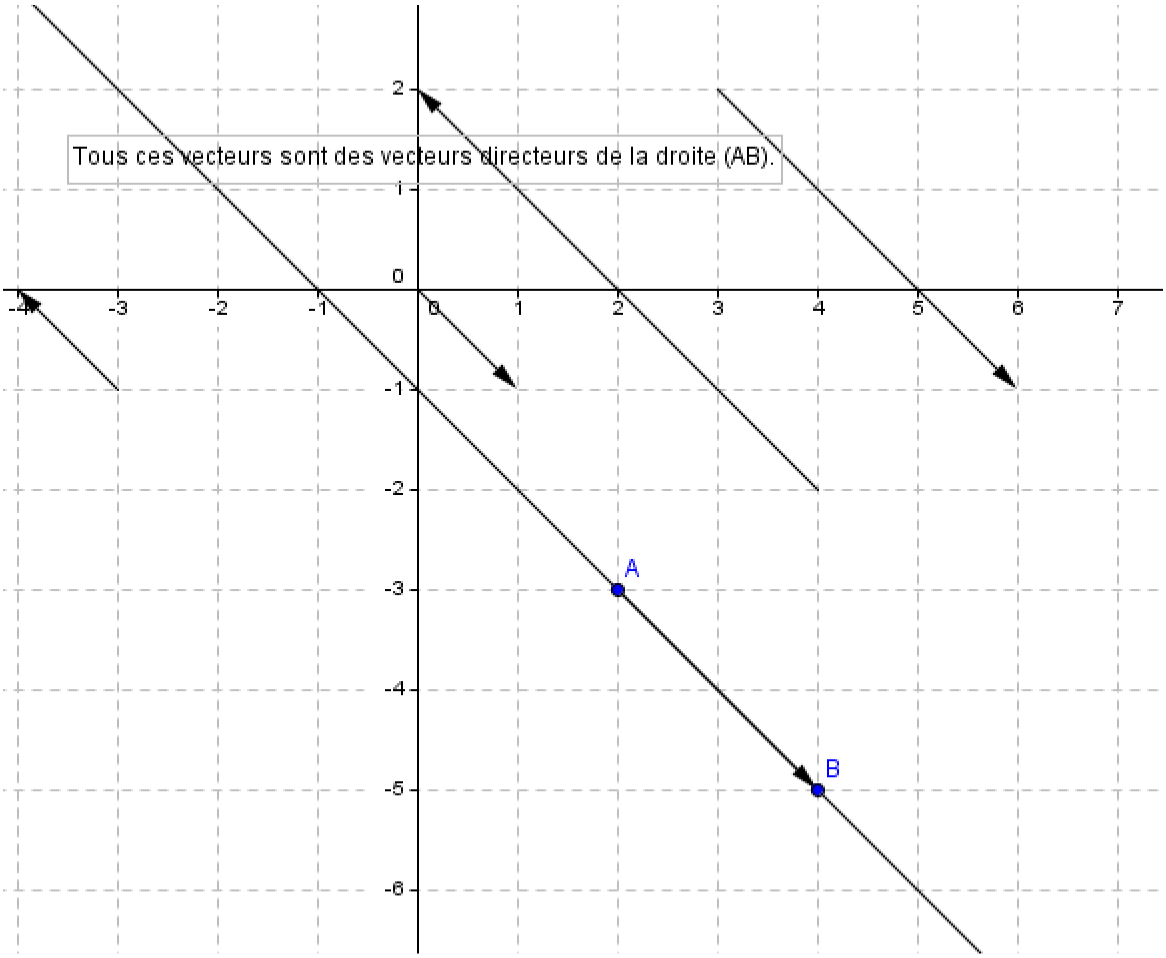
24 page 275

1) Droite (AB) avec $A(2 ; -3)$ et $B(4 ; -5)$

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-2 \\ -5-(-3) \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Par exemple : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

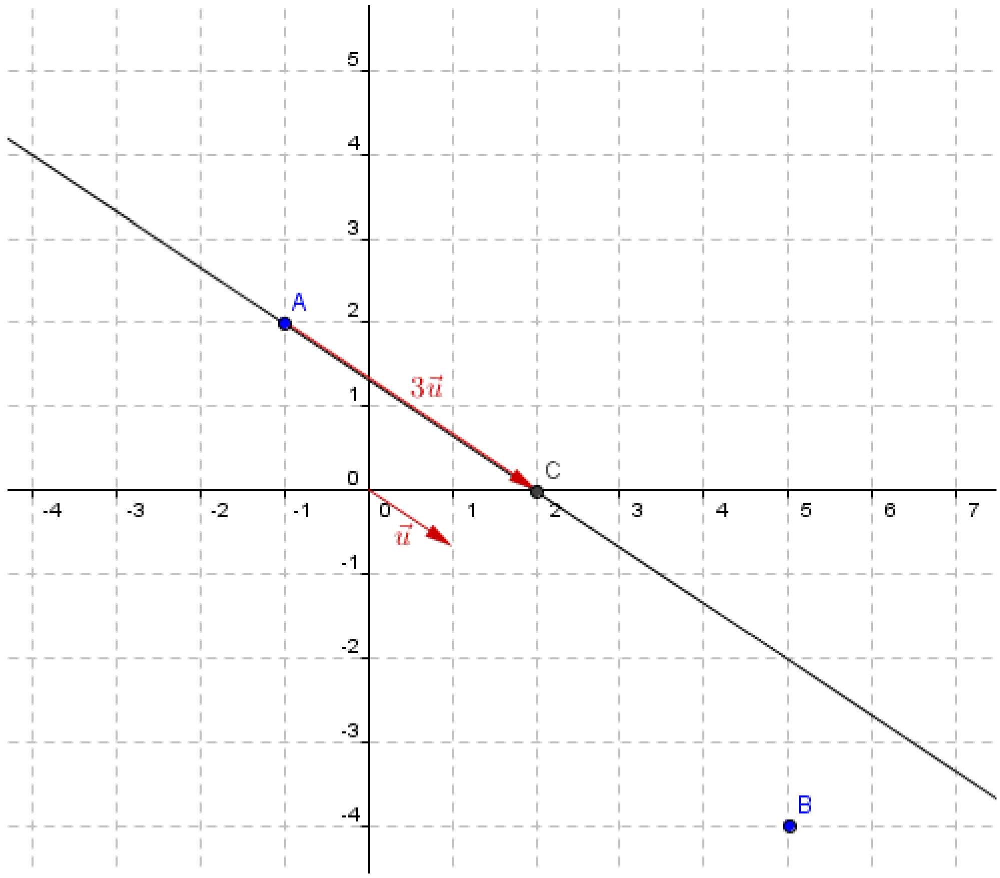


Dans tous les cas : $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{y_{\vec{v}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{w}}}{x_{\vec{w}}} = -1$ (coefficient directeur de la droite (AB))

---

25 page 275

1) Pour tracer la droite d passant par $A(-1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, on peut placer le point A et construire le point C tel que $\overrightarrow{AC} = 3\,\vec{u}$, soit : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$



2) $B(5\ ;-4)$

Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-(-1)\\-4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Le point B n'appartient pas à d.

---

27 page 275

1) a) b) Tracé …

Une méthode :

Soit $M(x\ ;y)\in d$. On a donc : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

D'où : $-2x=1\times(y-4)$ est une équation de d. On en tire l'équation réduite : $y=-2x+4$

Une autre méthode :

Puisque $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, le coefficient directeur m de d est $m=\dfrac{-2}{1}=-2$.

Puisque $A(0\ ;4)\in d$, l'ordonnée à l'origine p est $p=4$.

Conclusion : $y=-2x+4$ est l'équation réduite de d.

Une autre méthode :

La droite d passant par $A(0\ ;\ 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme :

$2x+y+c=0$

Comme le point $A(0\ ;\ 4) \in d$, on a : $2\times0 + 4 + c = 0$, soit : $c = -4$.

Une équation de d est : $2x + y - 4 = 0$, d'où, l'équation réduite : $y = -2x + 4$

2) Avec $A(1\ ;\ -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Une méthode :

Soit $M(x\ ;\ y) \in d$. On a donc : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

D'où : $4(x-1) = 3\times(y+3)$ est une équation de d. On en tire l'équation réduite : $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$.

Une autre méthode :

Puisque $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, le coefficient directeur m de d est $m = \frac{4}{3}$.

Puisque $A(1\ ;\ -3) \in d$, on a : $-3 = \frac{4}{3}\times1 + p$. On en tire : $p = -3 - \frac{4}{3} = -\frac{13}{3}$

Conclusion : $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$ est l'équation réduite de d.

Une autre méthode :

La droite d passant par $A(1\ ;\ -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme :

$4x-3y+c=0$

Comme le point $A(1\ ;\ -3) \in d$, on a : $4\times1 - 3\times(-3) + c = 0$, soit : $c = -13$

Une équation de d est : $4x - 3y - 13 = 0$, d'où, l'équation réduite : $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$.

---

28 page 275

Une droite ayant pour

a) vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, a pour coefficient directeur : $m = -3$

b) vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, a pour coefficient directeur : $m = -2$.

Remarque : $-\frac{1}{2}\vec{u} = \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de

c) vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$, a pour coefficient directeur : $m = -\dfrac{2}{5}$.

Remarque : $\dfrac{1}{5}\vec{u} = \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-\dfrac{2}{5}\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur.

d) vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4}\\2\end{pmatrix}$, a pour coefficient directeur : $m = 8$

Remarque : $4\vec{u} = \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur.

---

29 page 275

d d'équation : $2x - 3y + 7 = 0$

Propriété :

Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à d si et seulement si les coordonnées x et y de M vérifient une équation de d.

a) Comme $2\times(-2) - 3\times1 + 7 = 0$, le point $A(-2\,;\,1)$ appartient à d.

b) Comme $2\times\dfrac{1}{3} - 3\times\dfrac{5}{2} + 7 \neq 0$, le point $B(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{2})$ n'appartient pas à d.

Comme $2\times 3 - 3\times\dfrac{13}{3} + 7 = 0$, le point $C(3\,;\,\dfrac{13}{3})$ appartient à d.

c) l'ordonnée du point E de d d'abscisse $-\dfrac{2}{7}$ est : $y = \left(2\times\left(\dfrac{-2}{7}\right)+7\right)\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{15}{7}$ $\quad E(-\dfrac{2}{7}\,;\,\dfrac{15}{7})$

d) l'abscisse du point F de d d'ordonnée $\dfrac{1}{5}$ est : $x = \left(\dfrac{3\times1}{5}-7\right)\times\dfrac{1}{2} = -\dfrac{16}{5}$ $\quad F(-\dfrac{16}{5}\,;\,\dfrac{1}{5})$

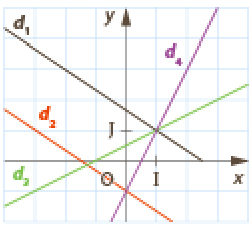
---

32 page 276

32 Associer à chaque droite d_1, d_2, d_3, d_4 une équation cartésienne parmi les équations suivantes :

(1) : $x - 2y + 1 = 0$ (2) : $2x + 3y - 5 = 0$

(3) : $2x - y - 1 = 0$ (4) : $2x + 3y + 3 = 0$



Cours :

$(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$

$ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

(1) : si $x = 0$ alors $y = \frac{1}{2}$ (Suffisant pour conclure) droite d_3

(2) si $x = 0$, $y = \frac{5}{3}$ (Suffisant pour conclure) droite d_1

(3) si $x = 0$, $y = -1$ (Insuffisant pour conclure)

un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ droite d_4

(4) Les droites d'équation (2) et d'équation (4) sont parallèles.

Un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

Si $x = 0$ alors $y = -1$ droite d_2

---

33 page 276

Un vecteur directeur de la droite d d'équation $x + 5y - 7 = 0$ est $\vec{d}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

$\vec{u} = 2\,\vec{d}$ et $\vec{r} = -\frac{1}{2}\,\vec{d}$

$\vec{u}$ et $\vec{r}$ sont des vecteurs directeurs de d.

Les autres vecteurs ayant des coordonnées de m^me signe ne peuvent être colinéaires à $\vec{d}$ dont les coordonnées sont de signes opposés.

---

34 page 276

Une méthode : colinéarité de ...

a) Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite d passant par $A(-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, d'où,

Un point $M(x\,;y)$ appartient à la droite d passant par $A(-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ si et seulement si $-1(x + 3) = 2(y - 2)$

Conclusion : $-x - 2y + 1 = 0$ est une équation de d. (Ou encore : $x + 2y - 1 = 0$ ...)

Vérifier à l'aide des coordonnées de A

Une autre méthode : reconnaissance des coefficients ....

b) Une équation cartésienne de droite est de la forme $ax + b\,y + c = 0$ où les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, on a : $b = -3$ et $a = 2$

On a alors : $2x - 3y + c = 0$

Comme $A(2\,;-1) \in d$, on a : $2\times2 - 3\times(-1) + c = 0$. On trouve $c = -7$.

Conclusion : $2x - 3y - 7 = 0$ est une équation de d : droite passant par $A(2\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Et encore une autre ... : équation réduite ...

c) Une équation réduite d'une droite est de la forme $y = m\,x + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine de la droite.

Comme $\vec{u}\begin{pmatrix}28\\35\end{pmatrix}$, on a : $m = \frac{35}{28} = \frac{5}{4}$

Comme $A(0\,;-4)$, on a : $p = 4$

L'équation réduite de d est : $y = \frac{5}{4}x + 4$, soit : $5x - 4y + 16 = 0$ est une équation cartésienne de d ....

d) Comme le vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\ \frac{-1}{5}\end{pmatrix}$, la droite d est parallèle à l'axe des ordonnées et une équation de d est : $x = -4$ (abscisse du point A, peu importe son ordonnée)

---

38 page 276

$A(-3\,;4)$, $B(3\,;8)$, $C(-5\,;2)$ et $D(3\,;-2)$

1) Équation réduite des droites (AB), (CD) et (BD).

Le coefficient directeur m d'une droite est : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque $\Delta x \neq 0$.

droite (AB) : $m = \frac{8-4}{3-(-3)} = \frac{2}{3}$ $\qquad y = \frac{2}{3}x + p$

Comme $A \in (AB)$: $p = 4 - \frac{2}{3}\times(-3) = 6$ $\qquad y = \frac{2}{3}x + 6$

droite (CD) : $y = \frac{-4}{8}x + p$, $y = -\frac{1}{2}x + p$ avec $p = 2 + \frac{1}{2}\times(-5) = -\frac{1}{2}$ $\qquad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

droite (BD) : $x = 3$ (abscisses communes de B et D)

2) $M(x\,;y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On obtient : $4x - 6y + 36 = 0$, soit après réduction : $2x - 3y + 18 = 0$

$M(x\,;y) \in (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+5\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On obtient : $-4x - 8y - 4 = 0$, soit après réduction : $x + 2y + 1 = 0$

$M(x\,;\,y) \in (BD)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
On obtient : $-10x + 30 = 0$, soit après réduction : $x - 3 = 0$

3) **Équivalences.**

Pour montrer que les équations sont équivalentes, ,on doit s'assurer " l'aller-retour " des transformations algébriques

Droites	Équations réduites	Équations62 page cartésiennes	Preuve de l'équivalence	
(AB)	$y = \frac{2}{3}x + 6$	$2x - 3y + 18 = 0$	$2x - 3y + 18 = 0$ $\Leftrightarrow 3y = 2x + 18$ $\Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + 6$	on ajoute $3y$ aux deux membres on multiplie par $\frac{1}{3}$ chacun des membres
(CD)	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	$x + 2y + 1 = 0$	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 2y = -x - 1$ $\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$	on multiplie chacun des membres par 2 On ajoute $x + 1$ aux deux membres

41 page 276

a) $\sqrt{2}\,x + y + 5 = 0$ est une équation de droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

b) $\sqrt{2x} + y + 5 = 0$ n'est pas une équation de droite.

Complément : La courbe d'équation $\sqrt{2x} + y + 5 = 0$ (soit : $y = -\sqrt{2}\sqrt{x} - 5$) se déduit de celle de la fonction $\sqrt{\ }$. C'est une demi-parabole définie sur $\mathbb{R}^+$ …

c) $2x + \frac{3}{2y} + 4 = 0$ n'est pas une équation de droite.

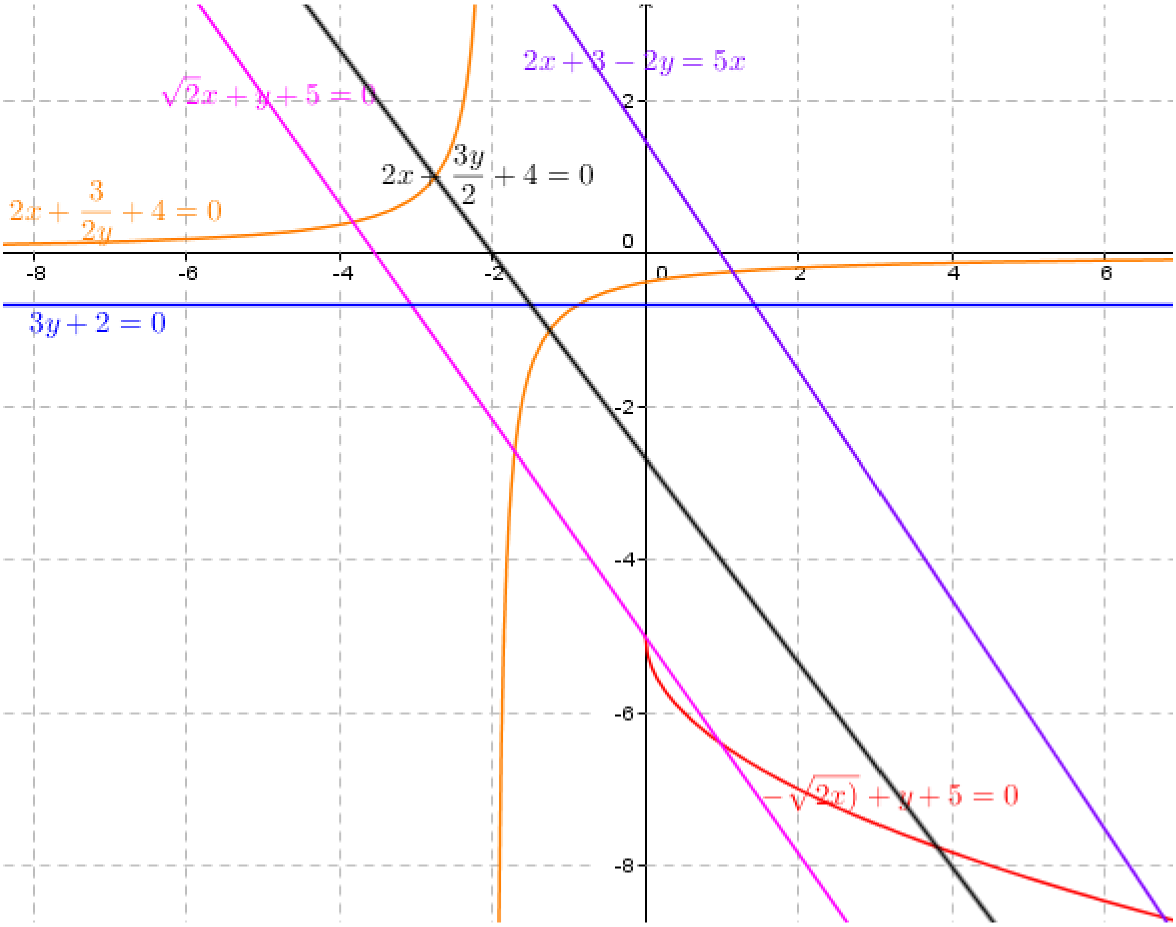
Complément : La courbe d'équation $2x + \frac{3}{2y} + 4 = 0$ (soit : $\frac{3}{2y} = -2x - 4$, puis : $y = \frac{3}{2(-2x-4)}$) est une hyperbole.

d) $2x + \frac{3y}{2} + 4 = 0$ est une équation de droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ (ou encore : $2\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$)

e) $2x + 3 - 2y = 5x \Leftrightarrow 3x + 2y - 3 = 0$ est une équation de droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $3y + 2 = 0$ est une équation de droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

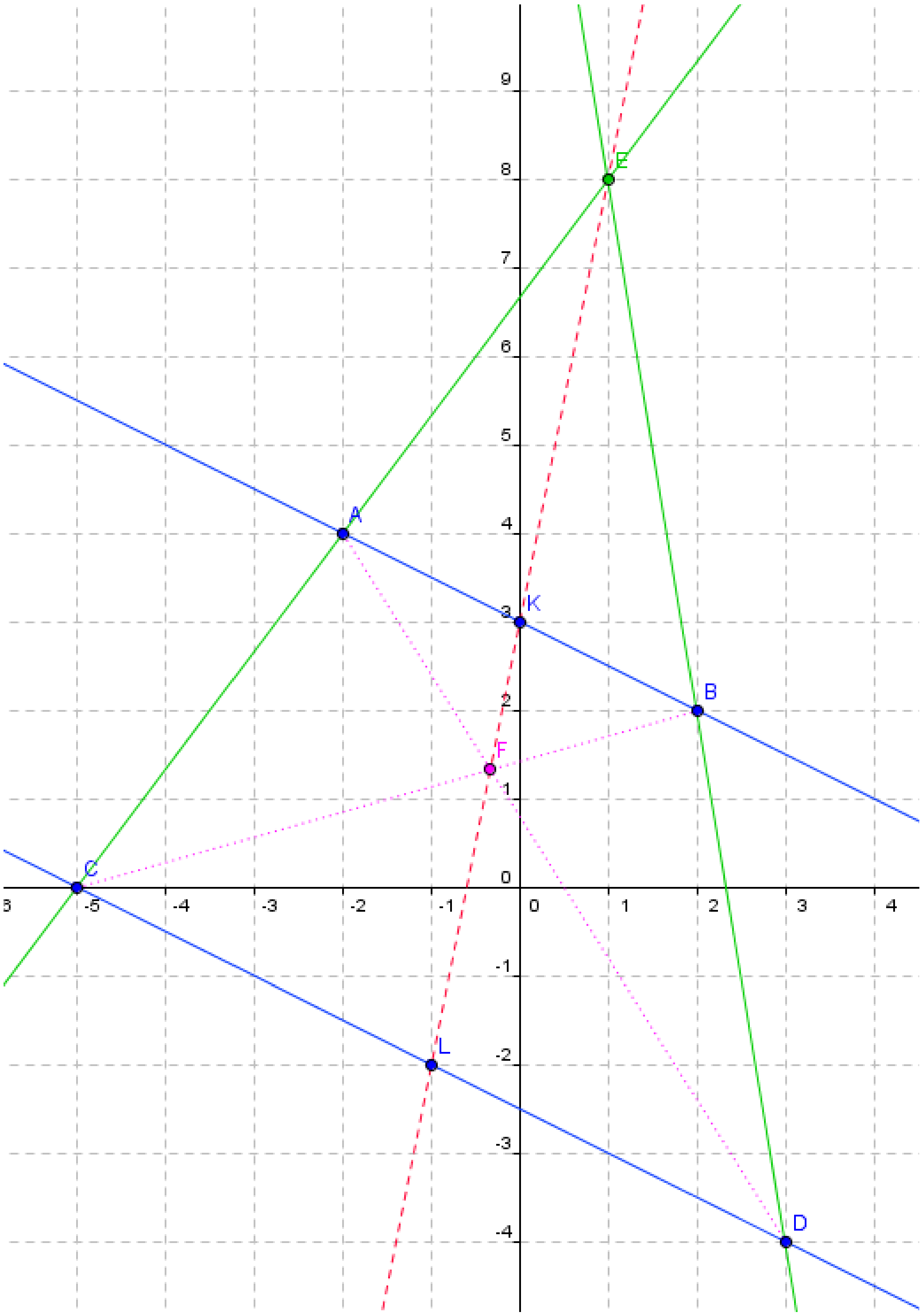
Illustration :



42 page 276 (Configuration du trapèze complet).

(On considère un trapèze et ses diagonales, et, l'intersection des côtés non parallèles : on peut extraire de cette configuration , deux configurations de Thalès)

Construction



1 a) $\overrightarrow{CD} = 2\ \overrightarrow{AB}$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles.

ABCD est un trapèze de bases (*AB*) et (*CD*), .

b) Comme $\overrightarrow{CD} = 2\ \overrightarrow{AB}$, on a : $\begin{cases} x_D-(-5)=2(2-(-2)) \\ y_D-0=2(2-4) \end{cases}$, d'où, $D(3\ ;-4)$

2 a) $d : 6x + y - 14 = 0$

Comme $6\times2 + 2 - 14 = 0$, le point $B(2 ; 2) \in d$.

Comme $6\times3 - 4 - 14 = 0$, le point $D(3 ; -4) \in d$.

b) Une équation de la droite (AC) :

$M(x ; y) \in (AC)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

On obtient : $-4(x + 2) + 3(y - 4) = 0$

Une équation cartésienne de (AC) est : $-4x + 3y - 20 = 0$

c) d) Comme $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, les droites (AC) et (BD) sont sécantes.

Un point commun à (AC) et (BD) a ses coordonnées solutions du système : $\begin{cases}-4x+3y-20=0\\ 6x+y-14=0\end{cases}$

En tirant y de la deuxième équation et en remplaçant dans la première, il vient :

$-4x + 3(14 - 6x) - 20 = 0$, soit : $22x = 22$, d'où, $x = 1$, puis $y = 8$
Le système ayant une et une seule solution, les droites (AC) et (BD) sont sécantes en $E(1 ; 8)$

4)

Le milieu K de $[AB]$ a pour coordonnées : $\begin{cases}x_K=\dfrac{x_A+x_B}{2}=0\\ y_K=\dfrac{y_A+y_B}{2}=3\end{cases}$

Le milieu L de $[CD]$ a pour coordonnées : $\begin{cases}x_L=\dfrac{x_C+x_D}{2}=-1\\ y_L=\dfrac{y_C+y_D}{2}=-2\end{cases}$

b) $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}0-1\\3-8\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$, et, $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}-1-1\\-2-8\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{EL}\begin{pmatrix}-2\\-10\end{pmatrix}$.
On a donc : $2\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EL}$.
Les points E, K, L sont alignés.

Pour aller plus loin :
a) Les cordonnées du point d'intersection F des diagonales (AD) et (BC) du trapèze $ABCD$ sont les solutions du système obtenu avec les équations des droites (AD) et (BC).
Comme $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$,
une équation de (AD) : $8x + 5y + c = 0$ et $c = -8\times(-2) - 5\times 4 = -4$, soit : $8x + 5y - 4 = 0$
une équation de (BC) : $2x - 7y + c = 0$ et $c = -2\times2 + 7\times 2 = 10$, soit : $2x - 7y + 10 = 0$

$\begin{cases}8x+5y-4=0\\ 2x-7y+10=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+5y=4\\ 8x-28y=-40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8x+5y=4\\ 33y=44\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$ $F(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{4}{3})$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{-4}{3}\\ \frac{-20}{3}\end{pmatrix}$. On a donc : $\frac{4}{3}\ \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EF}$

Les points E, K, F sont alignés.

Conclusion : Les points *E*, *K*, *F*, *L* sont alignés.

---

44 page 277. Ajouter une question 6/.

6/ Reprendre l'exercice afin de généraliser les résultats obtenus avec A d'abscisse a et B d'abscisse b où a et b sont deux réels distincts strictement positifs.

Soit ($\mathscr{H}$) l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Un cas particulier avec deux points fixés :

1) Le point A d'abscisse 1 sur ($\mathscr{H}$) a pour ordonnée $\frac{1}{1} = 1$. $A(1 ; 1)$

Le point B d'abscisse 3 sur ($\mathscr{H}$) a pour ordonnée $\frac{1}{3}$. $B(3 ; \frac{1}{3})$

2) Les coordonnées du milieu K de $[AB]$ sont : $\begin{cases} x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$ $K(2 ; \frac{2}{3})$

3) **Équation cartésienne de (*AB*).**

Une méthode :

Un point $M(x ; y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

On a donc : Un point $M(x ; y) \in (AB)$ si et seulement si $-\frac{2}{3}(x-1) = 2(y-1)$

En réorganisant (on peut multiplier par 3 et diviser par 2 les deux membres de l'égalité) :

Une équation cartésienne de (AB) est : $x + 3y - 4 = 0$

Conseil : vérifier avec les coordonnées de A et de B.

Une autre méthode :

On sait qu'une équation de droite peut se mettre sous la forme $ax + by + c = 0$.

Comme $A \in (AB)$, on a : $a\times 1 + b\times 1 + c = 0$, soit : $a + b + c = 0$ (i)

Comme $B \in (AB)$, on a : $a\times 3 + b\times \frac{1}{3} + c = 0$, soit : $3a + \frac{1}{3}b + c = 0$ (ii)

Par différence : (ii) – (i) mène à : $2a - \frac{2}{3}b = 0$

On choisit par exemple $b = 3$ (tout multiple non nul de 3 est satisfaisant).

Si $b = 3$, $a = 1$, puis, $c = -1 - 3 = -4$.

Une équation cartésienne de (AB) est : $x + 3y - 4 = 0$

Une autre méthode :

Puisque la droite (AB) n'est pas parallèle aux axes, on peut mettre l'équation sous la forme $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{3 - 1} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

Comme $A \in (AB)$, on a : $1 = -\frac{1}{3} \times 1 + p$, soit : $p = \frac{4}{3}$

Une équation de (AB) est : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ qui est équivalente à : $x + 3y - 4 = 0$

Remarque :

Toute relation équivalente à la précédente permet de caractériser la droite (AB), en particulier, l'équation réduite de (AB) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

4) Intersection avec les axes

Le point P de (AB) sur l'axe des abscisses a pour ordonnée 0, donc, $x_P = 4$ $\quad P(4\,;\,0)$

Le point Q de (AB) sur l'axe des ordonnées a pour abscisse 0, donc, $y_P = \frac{4}{3}$ $\quad Q\left(0\,;\,\frac{4}{3}\right)$

5) Les coordonnées du milieu de $[PQ]$ sont : $\begin{cases} \dfrac{4+0}{2} = 2 \\ \dfrac{0 + \frac{4}{3}}{2} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

On retrouve les coordonnées de K.

K est donc le milieu de $[PQ]$.

Généralisation :

On peut (on doit!) se poser la question : ce résultat est-il lié à l'hyperbole ou seulement à ces deux points particuliers ?

1) On choisit deux points distincts A et B d'abscisses respectives a et b. ($a > 0$, $b > 0$ et $a \neq b$)

Le point A d'abscisse a sur $(\mathscr{H})$ a pour ordonnée $\frac{1}{a}$

Le point B d'abscisse b sur $(\mathscr{H})$ a pour ordonnée $\frac{1}{b}$

2) Les coordonnées du milieu K de $[AB]$ sont : $\begin{cases} x_K = \dfrac{a+b}{2} \\ y_K = \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = \dfrac{a+b}{2ab} \end{cases}$

3) Équation cartésienne de (AB).

Un point $M(x\ ;y) \in (AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-a \\ y-\dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b-a \\ \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} b-a \\ \dfrac{a-b}{ab} \end{pmatrix}$

On a donc : Un point $M(x\ ;y) \in (AB)$ si et seulement si $\dfrac{a-b}{ab}(x-a) = (b-a)(y-\dfrac{1}{a})$

En réorganisant (on peut diviser par $a-b$ et multiplier par ab les deux membres de l'égalité) :

Une équation cartésienne de (AB) est : $x + aby - a - b = 0$

Conseil : vérifier avec les coordonnées de A et de B.

Le point P de (AB) sur l'axe des abscisses a pour ordonnée 0, donc, $x_P = a + b$

Le point Q de (AB) sur l'axe des ordonnées a pour abscisse 0, donc, $y_P = \dfrac{a+b}{ab}$

5) Les coordonnées du milieu de $[PQ]$ sont : $\begin{cases} \dfrac{a+b+0}{2} = \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{0+\frac{a+b}{ab}}{2} = \dfrac{a+b}{2ab} \end{cases}$

On retrouve les coordonnées de K.

K est donc le milieu de $[PQ]$.

Animation GeoGebra

---

47 page 277

1) Avec GeoGebra, il semble que les droites (EF), (GH) et (AC) sont parallèles si et seulement si M appartient au segment $[BD]$.

Sinon, les trois droites sont concourantes.

2 a) Repère (A, B, D) et $M(x\ ;y)$ dans ce repère.

Par construction : $A(0\ ;0)$, $B(1\ ;0)$ et $D(0\ ;1)$

Tous les points de la droite (EG) ont la même ordonnée y (puisque $M \in (EG)$)

Tous les points de la droite (HF) ont la même abscisse (puisque $M \in (HF)$)

$E(0\ ;y)$ E est sur l'axe des ordonnées (AD)

$F(x\,;1)$ F est sur la parallèle à l'axe des abscisses passant par D d'ordonnée 1.

$G(1\,;y)$ G est sur la parallèle à l'axe des ordonnées passant par B d'abscisse 1.

$H(x\,;0)$ H est sur l'axe des abscisses.

b) (EF) et (GH) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} x-1 \\ -y \end{pmatrix}$

(EF) et (GH) sont parallèles si et seulement si $x(-y) - (1-y)(x-1) = 0$

Après développement et réduction, il vient :

(EF) et (GH) sont parallèles si et seulement si $x + y - 1 = 0$.

c) Si $x = 0$ alors $y = 1$. le point $D(0\,;1)$ vérifie l'équation trouvée au b/

Si $y = 0$ alors $x = 1$. le point $B(1\,;0)$ vérifie l'équation trouvée au b/

Comme $x + y - 1 = 0$ est une équation de droite, la droite (BD) est cette droite.

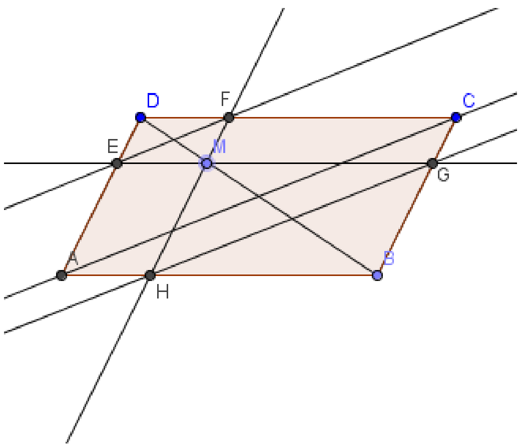
Comme M est à l'intérieur du parallélogramme, l'ensemble des points cherchés est le segment $[BD]$.

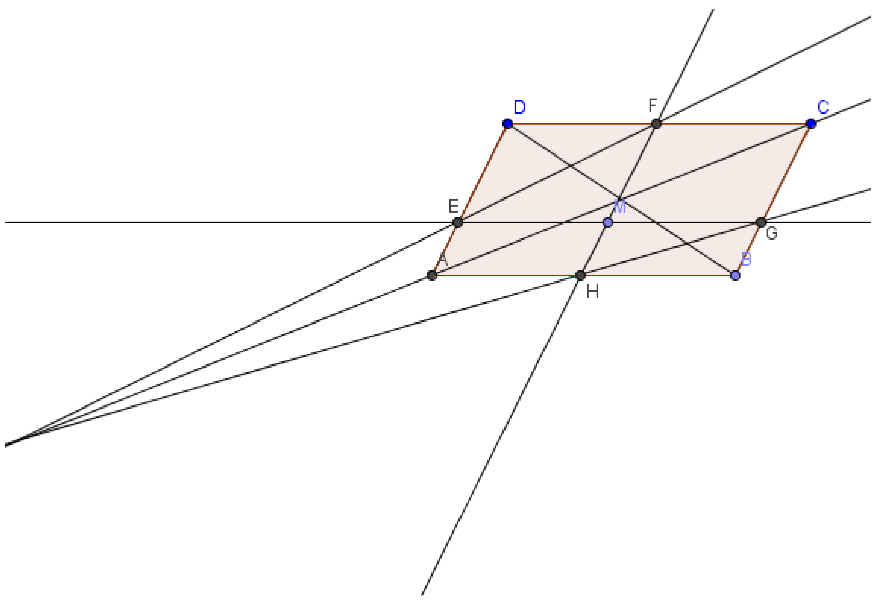
3) Le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

lorsque $x + y - 1 = 0$, on a : $1 - y = x$,

d'où, dans ce cas, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\,\overrightarrow{AC}$ *(ou* $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} -y \\ -y \end{pmatrix} = -y\,\overrightarrow{AC}$ *)*

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les droites (EF), (GH) et (AC) sont parallèles si et seulement si $M \in [BD]$.

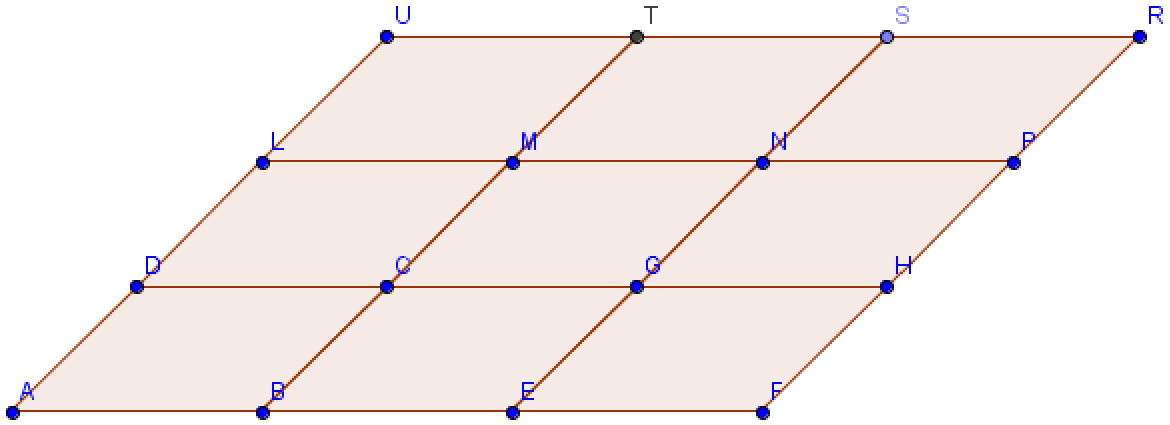




48 page 277

a) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}$, b) $2\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NS}=\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{NS}=\overrightarrow{NU}$ c) $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}$

d) $\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PE}$ e) $-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$ f) $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NH}=\overrightarrow{NG}$



49 page 277

On reprend la figure du numéro 48.

1) Objectif : écrire les vecteurs $\vec{u}$ demandés sous la forme $\vec{u}=x\ \overrightarrow{AB}+y\ \overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ Le quadrilatère *AFPL* est un parallélogramme de diagonale [*AP*].

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AL}$ $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$ Le quadrilatère *CGST* est un parallélogramme de diagonale [*CS*].

$\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CT}$ $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CT}=2\overrightarrow{AD}$

ou encore : $\overrightarrow{CS}=\overrightarrow{AM}$ et *ABML* est un parallélogramme, d'où : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AL}$

$\overrightarrow{GT}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PE}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}$

Compléments :

Cela revient à dire que les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ sont :

$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CS}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GT}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PE}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

2) **Objectif** : écrire les vecteurs $\vec{u}$ demandés sous la forme $\vec{u}=x\ \overrightarrow{CH}+y\ \overrightarrow{TM}$.

En remarquant que $\overrightarrow{CH}=2\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{TM}=-\ \overrightarrow{AD}$, il suffit dans les égalités précédentes de remplacer,

$\overrightarrow{AB}$ par $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AD}$ par $-\ \overrightarrow{TM}$.

$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\ \overrightarrow{CH}-2\ \overrightarrow{TM}$.

$\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{CH} - 2\ \overrightarrow{TM}$

$\overrightarrow{GT} = -\ \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CH} - 2\ \overrightarrow{TM}$

$\overrightarrow{PE} = -\ \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} = = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{CH} + 2\ \overrightarrow{TM}$

Compléments :

Cela revient à dire que les coordonnées de ces vecteurs dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{CH}},\overrightarrow{\mathrm{TM}})$ sont :

$\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CS}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GT}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PE}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\end{pmatrix}$

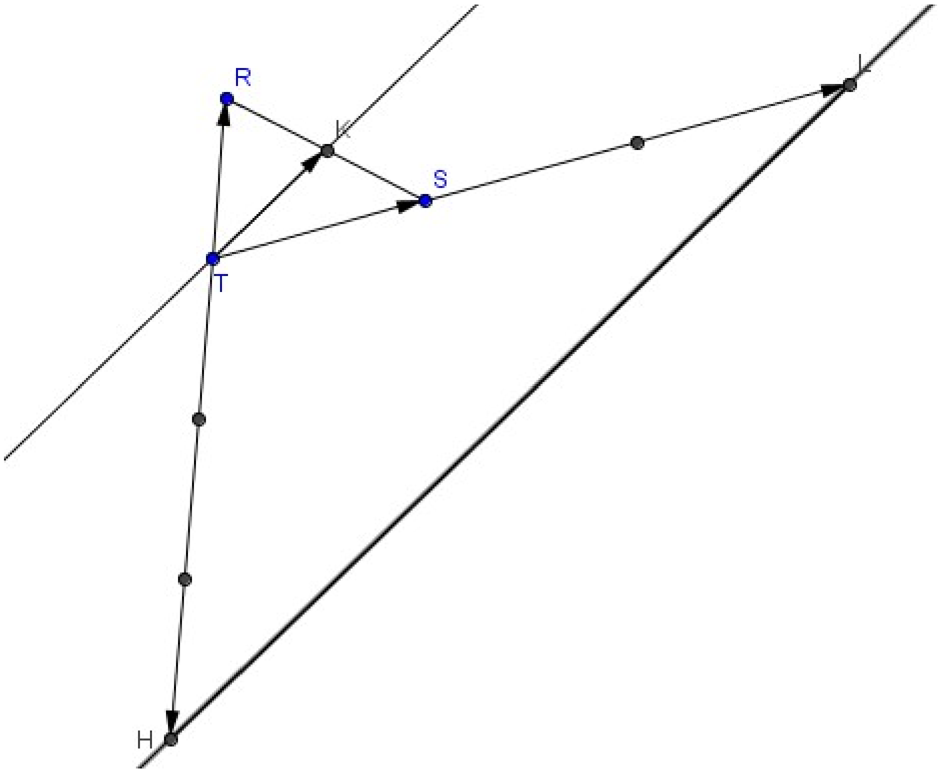
50 page 277

la figure est celle du n° 48

Coordonnées de …	dans le repère $(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$	dans le repère $(\mathrm{D};\overrightarrow{\mathrm{DG}},\overrightarrow{\mathrm{DL}})$	dans le repère $(\mathrm{M};\overrightarrow{\mathrm{ML}},\overrightarrow{\mathrm{MC}})$
L	(0 ; 2) Preuve : $\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AD}$	(0 ; 1) $\overrightarrow{DL} = 0.\ \overrightarrow{DG} + 1.\ \overrightarrow{DL}$	(1 ; 0) $\overrightarrow{ML} = 1.\ \overrightarrow{ML} + 0.\ \overrightarrow{MC}$
P	(3 ; 2) Preuve : $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$	$\left(\frac{3}{2};1\right)$ $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{DG} + 1.\ \overrightarrow{DL}$	(–2 ; 0) $\overrightarrow{MP} = -2\ \overrightarrow{ML} + 0.\ \overrightarrow{MC}$
H	(3 ; 1) Preuve : $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	$\left(\frac{3}{2};0\right)$ $\overrightarrow{DH} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{DG}$	(–2 ; 1) $\overrightarrow{MH} = -2.\ \overrightarrow{ML} + 1.\ \overrightarrow{MC}$
$\overrightarrow{CU}$	(–1 ; 2) Preuve : $\overrightarrow{CU} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$	$(\frac{-1}{2};2)$ $\overrightarrow{CU} = \frac{-1}{2}\ \overrightarrow{DG} + 2\ \overrightarrow{DL}$	(1 ; –2) $\overrightarrow{CU} = 1.\ \overrightarrow{ML} - 2.\ \overrightarrow{MC}$
$\overrightarrow{EP}$	(1 ; 2) Preuve : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$	$\left(\frac{1}{2};2\right)$ $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{DG} + 2\ \overrightarrow{DL}$	(–1 ; –2) $\overrightarrow{EP} = -1.\ \overrightarrow{ML} - 2.\ \overrightarrow{MC}$
$\overrightarrow{DF}$	(3 ; –1) (–1 ; 2) Preuve : $\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$	$\left(\frac{3}{2};-1\right)$ $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DL}$	(–3 ; 1) $\overrightarrow{DF} = -3.\ \overrightarrow{ML} + 1.\ \overrightarrow{MC}$

54 page 278

RST est un triangle et *K* est le milieu de [*RS*].



1) *H* tel que $\overrightarrow{TH} = -3\ \overrightarrow{TR}$ (*H*, *T*, *R* sont alignés **dans cet ordre**, la longueur *TH* = 3*TR*)

L tel que $\overrightarrow{SL} = -2\ \overrightarrow{ST}$ (*L*, *S*, *T* sont alignés **dans cet ordre**, la longueur *SL* = 2*ST*)

2) Évaluation de $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS}$

$\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = (\overrightarrow{TK} + \overrightarrow{KR}) + (\overrightarrow{TK} + \overrightarrow{KS}) = 2\overrightarrow{TK} + \overrightarrow{KR} + \overrightarrow{KS}$

Or, *K* est le milieu de [*RS*], d'où $\overrightarrow{KR}$ et $\overrightarrow{KS}$ sont opposés, soit : $\overrightarrow{KR} + \overrightarrow{KS} = \vec{0}$

Conclusion : $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\ \overrightarrow{TK}$.

3) Décomposition de $\overrightarrow{HL}$ sur $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$. *(Objectif : décomposer en somme de deux vecteurs non colinéaires)*

Analyse des données : le point *H* est défini par la donnée de $\overrightarrow{TH}$ et *L* par celle de $\overrightarrow{SL}$, d'où, l'introduction de ces vecteurs par la relation de Chasles.

Analyse de ce qu'on veut en conclusion : en fonction de $\overrightarrow{TR}$ et de $\overrightarrow{TS}$ (ou encore leurs opposés : $\overrightarrow{RT} = -\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{ST} = -\overrightarrow{TS}$)

$\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SL}$ On connaît : $\overrightarrow{TH}$ en fonction de $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{SL}$ en fonction de $\overrightarrow{ST}$

$\overrightarrow{HT} = -\overrightarrow{TH} = 3\overrightarrow{TR}$ $\overrightarrow{SL} = -2\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{TS}$

Il suffit donc de remplacer par les données et réduire ....

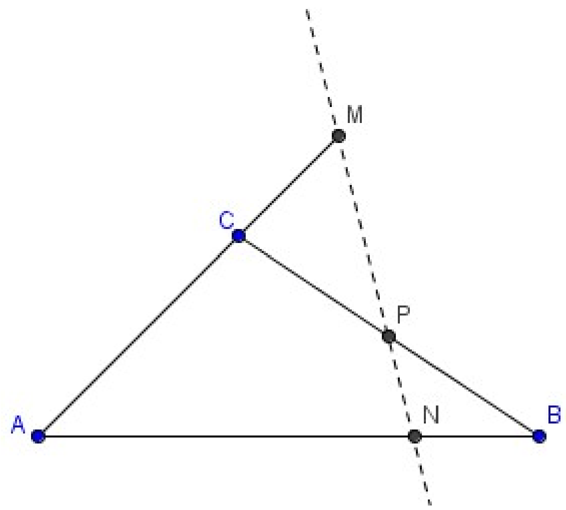
$\overrightarrow{HL} = 3\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} + 2\overrightarrow{TS} = 3\overrightarrow{TR} + 3\overrightarrow{TS} = 3(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS})$

4) Comme $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\ \overrightarrow{TK}$, on obtient : $\overrightarrow{HL} = 3 \times 2\overrightarrow{TK} = 6\overrightarrow{TK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HL}$ et $\overrightarrow{TK}$ sont colinéaires.

les droites (*HL*) et (*TK*) sont donc parallèles.

55 page 278



Commencer par relever les données qui ont permis de construire les points et par analyser ces données.

Ne pas perdre de vue qu'il s'agit d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NP}$ en fonction de deux vecteurs non colinéaires (voir cours)

1) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, d'où, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, d'où, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$.

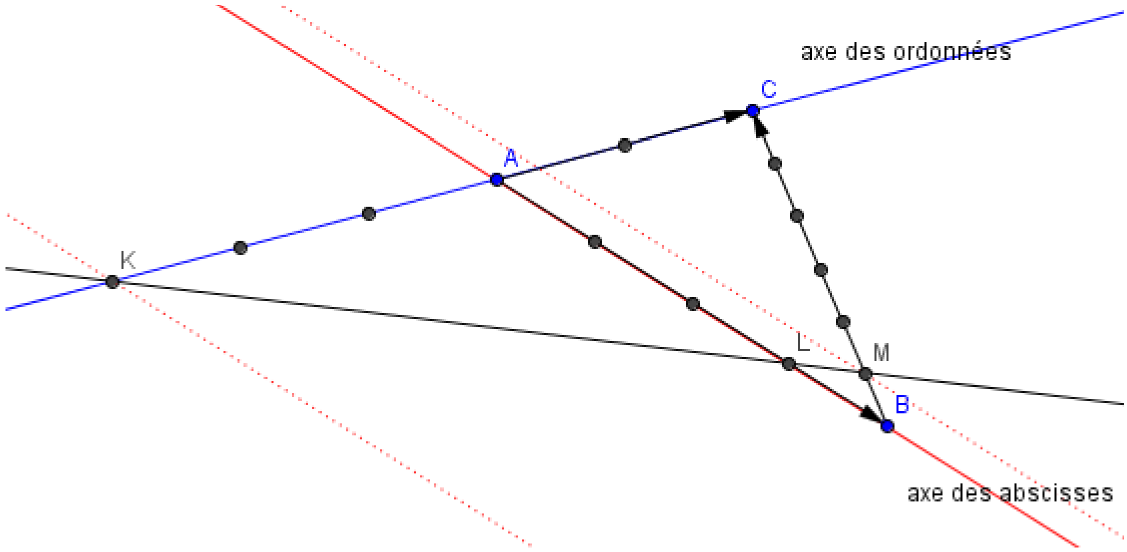
$$\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

2) On a donc : $-3\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$.

Les points M, N et P sont alignés.

56 page 278

ABC est un triangle, K, L, M sont définis par : $\overrightarrow{AK} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.



1) Première méthode : Géométrie analytique (c'est-à-dire : dans un repère)

Soit le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

a) On a donc : $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 1)$

$\overrightarrow{AK} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}$, donc : $K(0 ; \frac{-3}{2})$

$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, donc $L(\frac{3}{4} ; 0)$

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$, d'où : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$, soit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

$M(\frac{5}{6} ; \frac{1}{6})$

Autre méthode : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$, $M(x ; y)$, d'où : $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$, soit : $\begin{cases} x-1 = \frac{-1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$. $M(\frac{5}{6} ; \frac{1}{6})$

b) On obtient : $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{10}{6} \end{pmatrix}$.

Comme : $\frac{3}{4}\times\frac{10}{6} = \frac{5}{4}$ et $\frac{3}{2}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{4}$, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires, donc, les points K, L, M sont alignés.

Ou encore : comme $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}\times\frac{4}{3} = \frac{10}{9}$ *et* $\frac{10}{9}\times\frac{3}{2} = \frac{10}{6}$, *on a :* $\overrightarrow{KM} = \frac{10}{9}\overrightarrow{KL}$

2) Deuxième méthode : Géométrie vectorielle (sans utiliser un repère)

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{10}{6}\overrightarrow{AC}$

On retrouve les calculs de la première partie.

Par exemple : Quel est le coefficient t tel que $\overrightarrow{KL} = t\ \overrightarrow{KM}$?

On cherche donc t tel que $\frac{5}{6} \times t = \frac{3}{4}$ **et** (en même temps) $\frac{10}{6} \times t = \frac{3}{2}$.

Puisque $\frac{3/4}{5/6} = \frac{3/2}{10/6} = \frac{9}{10}$, lr nombre t existe.

$\overrightarrow{KL} = \frac{9}{10}\overrightarrow{KM}$

---

57 page 278

Données :

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = 2\ \overrightarrow{BC}$

1) **Dans le repère** $(\mathbf{A}; \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}})$ (On a donc : $A(0 ; 0)$, $B(1 ; 0)$ et $C(0 ; 1)$)

a) Puisque $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$, on a : $D(0 ; \frac{1}{2})$

Puisque $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$, on a : $E(\frac{1}{3} ; 0)$

Comme $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où : $\begin{cases} x_F - 1 = -2 \\ y_F - 0 = 2 \end{cases}$, soit : $F(-1 ; 2)$

b) $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, on a donc : $\overrightarrow{DF} = -3\ \overrightarrow{DE}$.

les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ étant colinéaires, les points D, E, F sont alignés.

2- Solution vectorielle

a) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ (Relation de Chasles), $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$ (Relation de Chasles et F est déterminé à partir de $\overrightarrow{BF}$ dans l'énoncé)

$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles et *D* est déterminé à partir de $\overrightarrow{AD}$ dans l'énoncé, et, on remplace $\overrightarrow{BF}$ par $2\overrightarrow{BC}$)

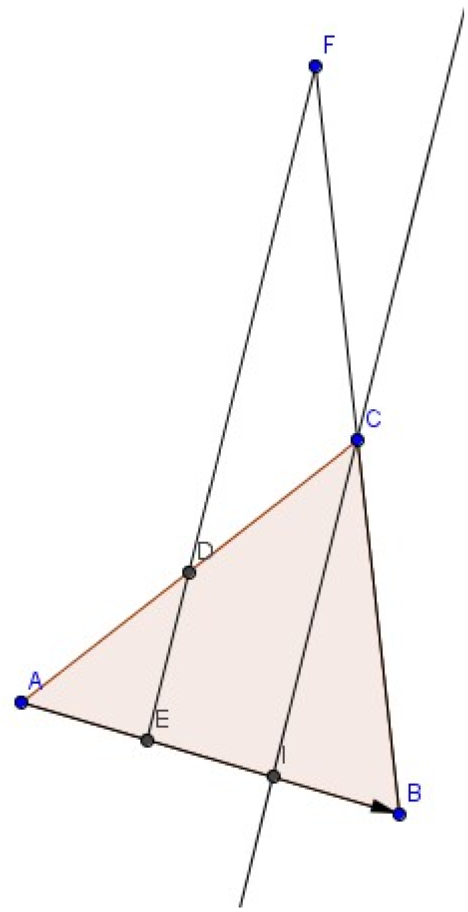
$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Comme $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, il vient : $\overrightarrow{DF} = -3\overrightarrow{DE}$.

les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ étant colinéaires, les points *D*, *E*, *F* sont alignés.

3) Solution géométrique :

a)



I est le point d'intersection de (*AB*) et de la parallèle à (*DE*).

Dans le triangle *ACI*, on peut appliquer la propriété de Thalès, d'où,

D étant le milieu de [*AC*], on a : *E* est celui de [*AI*].

On en déduit : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, donc : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{IB}$, donc, *I* milieu de [*EB*]

$\overrightarrow{BF} = 2\ \overrightarrow{BC}$, donc, C est le milieu de $[BF]$.

On peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès dans le triangle BFE.

La droite (IC) joignant les milieux de deux côtés $[EB]$ et $[FB]$ est parallèle au troisième côté (FD).

(DE) et (FD) étant parallèles à (IC), les points F, E, D sont alignés.

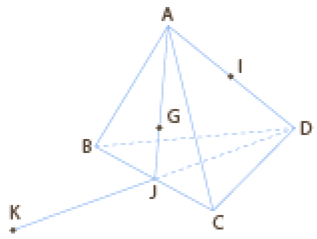
---

62 page 278

62 ABCD est un tétraèdre. On note I le milieu de [AD] et J celui de [BC]. Le point G est le point de [AJ] tel que $AG = \frac{2}{3}AJ$.

On s'intéresse à la position relative de la droite (IG) et du plan (BCD).

On note K le symétrique de D par rapport à J.



1. Justifier que les points A, G, J, K, D, I sont coplanaires.

2. a. Faire une figure dans le plan (AJD) avec les éléments de la figure qu'il contient.

b. Dans le plan (AJD), décomposer les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IK}$ sur les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

c. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

3. Déterminer la position relative dans l'espace de la droite (IG) et du plan (BCD).

1) Les points A, J, D ne sont pas alignés par construction du tétraèdre.

On peut donc nommer le plan (AJD).

I milieu de $[AD]$ donc I appartient à la droite (AD), par conséquent I appartient à tout plan contenant la droite (AD). En particulier : I appartient au plan (AJD).

De même, puisque $G \in [AJ]$, $G \in (AJD)$.

Comme K, J, D alignés, $K \in (AJD)$.

Les points A, J, D, I, G, K sont coplanaires.

2 a) b) Dans le plan (AJD), on a :

$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG}$ (Relation de Chasles)

Or, I milieu de $[AD]$ donc $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AD}$ (On a aussi : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AD}$)

et $G \in [AJ]$ (Segment) et $AG = \frac{2}{3}\ AJ$, donc, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ}$

Conclusion : $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ}$.

K symétrique de D par rapport à J, d'où, $\overrightarrow{DK} = 2\ \overrightarrow{DJ}$

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ}) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AJ}$

c) $3\overrightarrow{IG} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IK}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

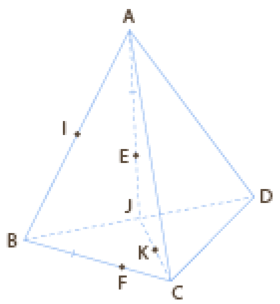
3) Le point K appartient au plan (BCD).

La droite (IG) coupe le plan (BCD) en K.

---

63 page 278

63 ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB], J celui de [BD] et K celui de [JC].
E est le point du segment [AE] tel que $AE = \frac{2}{3}AJ$ et F le point du segment [BC] tel que $BF = \frac{2}{3}BC$.



1. On se place dans le plan (ABD). Faire une figure puis démontrer que I, E et D sont alignés.

2. On se place dans le plan (BCD). Démontrer que F, K et D sont alignés.

3. a. Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?
b. En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

I milieu de $[AB]$, donc, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

J milieu de $[BD]$, donc, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ et aussi : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

E sur $[AJ]$ et $AE = \frac{2}{3}AJ$, donc, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$

F sur $[BC]$ et $BF = \frac{2}{3}BC$ donc $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

K milieu de $[JC]$, d'où, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BC})$

1) Dans le plan (ABD), on a :

$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,

On a alors : $3\overrightarrow{IE} = ... = \overrightarrow{ID}$, etc.

2) $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BK} = -\dfrac{2}{3}\ \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}(\ \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BC}\ ) = -\dfrac{1}{6}\ \overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{4}\ \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} = -\dfrac{2}{3}\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

On a alors : 4 $\overrightarrow{FK}$ = ... = $\overrightarrow{FD}$, donc, ...

3 a)b) Le point D est donc un point commun aux deux droites (IE) et (FK).

Les droites (IE) et (FK) étant sécantes en D sont coplanaires.

64- 65 page 278

Énoncé de la propriété (P) : (***équivalence***)
Le point $M(x_M\ ;\ y_M) \in d$ si et seulement si $2x_M - 3y_M + 7 = 0$
Implication (P_1) :
Si le point $M(x_M\ ;\ y_M) \in d$ alors $2x_M - 3y_M + 7 = 0$
Implication (P_2) :
Si $2x_M - 3y_M + 7 = 0$ alors le point $M(x_M\ ;\ y_M) \in d$
(P_1) et (P_2) sont réciproques l'une de l'autre.
(Voir page 354 du livre)

Pour (P_1) : la condition suffisante est : le point $M(x_M\ ;\ y_M) \in d$
la condition nécessaire est : $2x_M - 3y_M + 7 = 0$

La contraposée de (P_2) s'énonce :
Si le point $M(x_M\ ;\ y_M) \notin d$ alors $2x_M - 3y_M + 7 \neq 0$

Le point $A(3\ ;\ -1)$.
On calcule : $2\times3 - 3\times(-1) + 7 = 16$
Comme $16 \neq 0$ alors $A \notin d$.
La propriété utilisée est la contraposée de (P_1).

---

88 page 282

Soit m un réel.

On nomme d_m la droite d'équation : $(2m-1)x - my + 3m + 1 = 0$

1 a) La droite d_0 a pour équation : $-x + 1 = 0$ ou encore $x = 1$.

d_0 est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par le point A_0 (1 ; 0)

b) d_1 est la droite d'équation : $x - y + 4 = 0$ ou encore $y = x + 4$.

d_1 est la droite de vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et passant par le point A_1 (0 ; 4)

(ou de coefficient directeur $a_1 = 1$ et d'ordonnée à l'origine $b_1 = 4$)

d_2 est la droite d'équation : $3x - 2y + 7 = 0$ ou encore $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

d_2 est la droite de vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et passant par le point A_2 (1 ; 5) (ou de coefficient directeur $a_2 = \dfrac{3}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $b_2 = \dfrac{7}{2}$).

d_{-1} est la droite d'équation : $-3x + y + 2 = 0$ ou encore $y = 3x - 2$.

d_{-1} est la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u_{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par le point $A_{-1}\,(0 ; -2)$

(ou de coefficient directeur $a_{-1} = 3$ et d'ordonnée à l'origine $b_{-1} = -2$)

2) **Une méthode :**

En prenant deux des droites précédentes, on trouve les coordonnées d'un point I susceptible d'appartenir à toutes les droites, puis on vérifie que, **quelque soit *m*,** les coordonnées de ce point I sont solutions de l'équation de d_m.

On choisit les droites les " plus simples " par exemple d_0 et d_1.

D'après l'équation de d_0 : $x_I = 1$

puis d'après celle de d_1 : $y_I = 1 + 4 = 5$

Soit $I(1 ; 5)$.

Comme $(2m - 1)\times 1 - m\times 5 + 3m + 1 = 2m - 5m + 3m - 1 + 1 = 0$, le point I appartient à d_m quelque soit m.

Une autre méthode :

La variable est m, on forme donc un polynôme en m qui doit s'annuler pour tout m (ici, il sera du premier degré) et on cherche, **pour tout *m*,** les coefficients qui annulent ce polynôme. La seule possibilité est d'avoir t**ous les coefficients du polynôme nuls.**

$(2m - 1)x - my + 3m + 1 = 0$ équivaut à $(2x - y + 3)m - x + 1 = 0$.

On a donc le système $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 1 = 0 \end{cases}$

Ce système a une et une seule solution : $x = 1$, puis : $2\times 1 - y + 3 = 0$, soit : $y = 5$

3) a) On cherche l'existence de m pour avoir d_m passant par $A(-1 ; 4)$

Pour cela, on a la condition nécessaire et suffisante : $(2m - 1)\times(-1) - m\times 4 + 3m + 1 = 0$

qui mène à : $-3m + 2 = 0$

Lorsque $m = \dfrac{2}{3}$, la droite passe par $A(-1 ; 4)$

b) On cherche l'existence de m pour avoir d_m de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

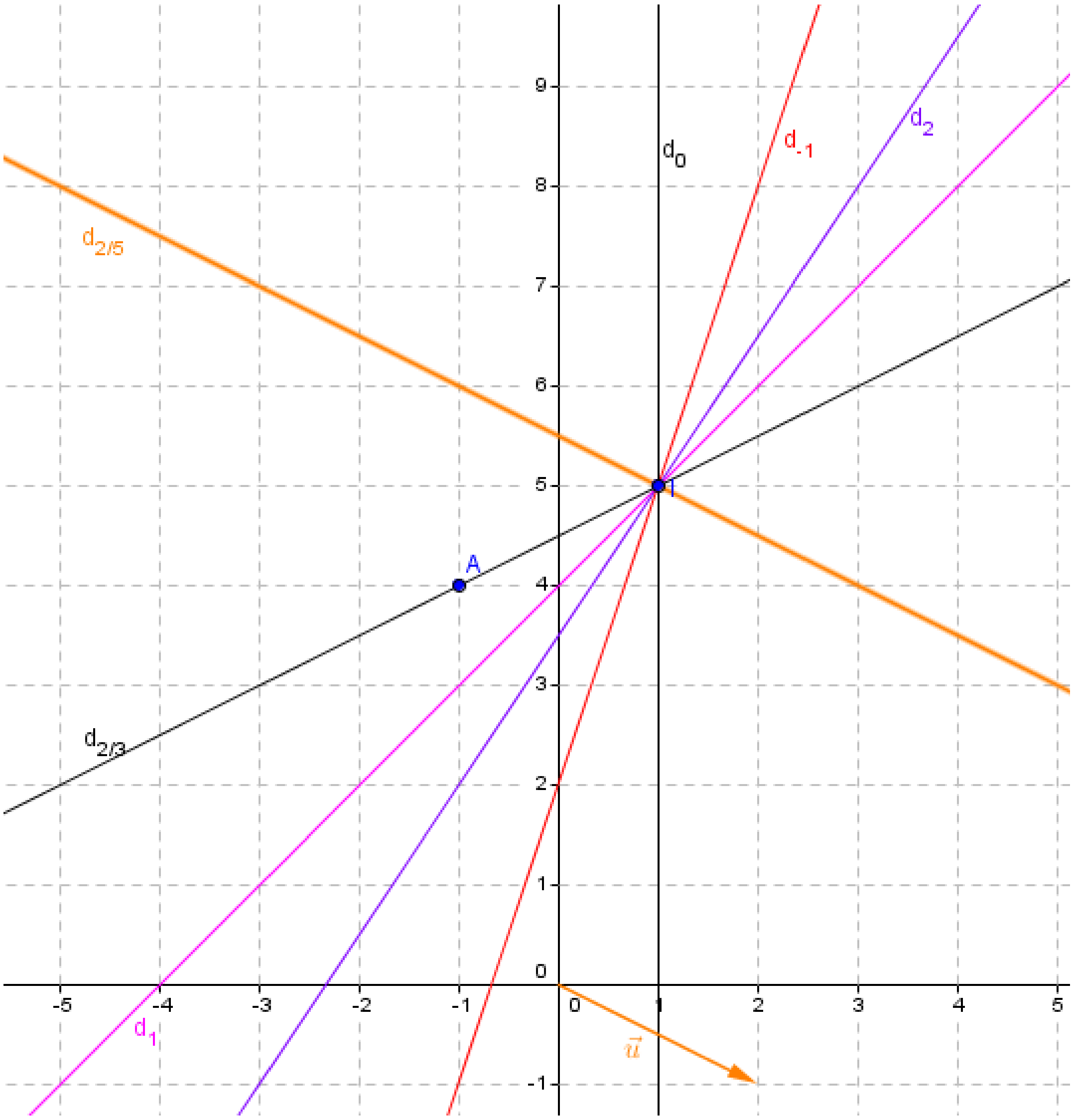
Or un vecteur directeur de d_m est : $\overrightarrow{u_m} \begin{pmatrix} m \\ 2m-1 \end{pmatrix}$.

On a donc la condition nécessaire et suffisante : $\overrightarrow{u_m}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

La condition analytique de colinéarité mène à : $2(2m - 1) - (-1)\times m = 0$, soit : $5m = 1$

Lorsque $m = \dfrac{1}{5}$, la droite est de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Résumé sur un graphique :

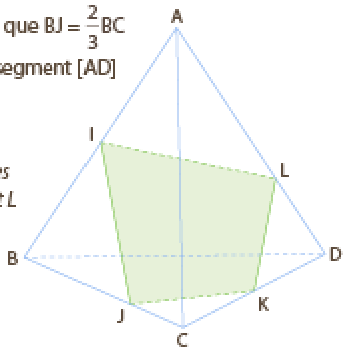


89 page 282

89 ABCD est un tétraèdre. Les points I et K sont les milieux des arêtes [AB] et [CD]. Le point J est le point du segment [BC] tel que $BJ = \frac{2}{3}BC$ et L est le point du segment [AD] tel que $AL = \frac{2}{3}AD$.

Le but du problème est de montrer que les quatre points I, J, K et L sont situés dans un même plan.

On nomme Q le symétrique de B par rapport à D.



1. Dans le plan (ABD)

a. Faire une figure dans le plan (ABD) en plaçant tous les points connus de ce plan.

b. Déterminer les coordonnées de I, L et Q dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$ du plan (ABD) et démontrer que Q appartient à la droite (IL).

2. Dans le plan (BCD)

Démontrer que Q appartient à la droite (JK).

3. Dans l'espace

En déduire que les droites (IL) et (JK) sont sécantes et conclure.

Dans le repère $(A ; \vec{AB}, \vec{AD})$,

$A(0 ; 0)$; $B(1 ; 0)$, $D(0 ; 1)$

$I(\frac{1}{2} ; 0)$ car I milieu ....

$L(0 ; \frac{2}{3})$ car L est le ....

Q est tel que $\vec{BQ} = 2\ \vec{BD}$, d'où, $\begin{pmatrix} x_Q - 1 \\ y_Q - 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q(-1 ; 2)$

$\vec{IL} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{IQ} \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a lors : $3\ \vec{IL} = \vec{IQ}$, donc, ...

2) Dans le plan (BCD)

Choix du repère : $(B ; \vec{BC}, \vec{BD})$

$B(0 ; 0)$, $C(1 ; 0)$, $D(0 ; 1)$

$J(\frac{2}{3} ; 0)$ car J est le ....

K milieu de $[CD]$, donc : $\vec{CK} = \frac{1}{2}\ \vec{CD}$, soit : $\begin{pmatrix} x_K - 1 \\ y_K - 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $K(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$

Q est tel que $\overrightarrow{BQ} = 2\ \overrightarrow{BD}$, d'où, $\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = 2\times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q(0\ ;\ 2)$

$\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JQ}\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$, d'où, $4\ \overrightarrow{JK} = \ldots = \overrightarrow{JQ}$ Conclusion : ....

3) Les droites (IL) et (JK) sont sécantes en Q.

Les points I, J, K, L et Q sont coplanaires.

---

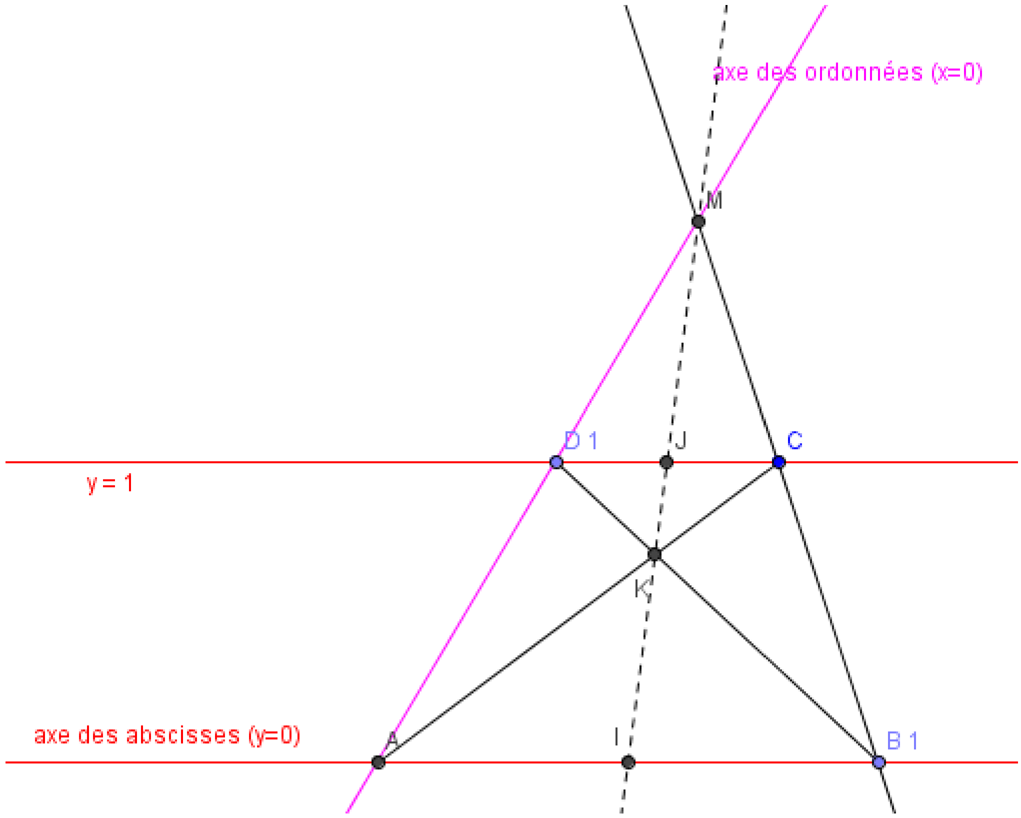
90 page 282

ABCD trapèze tel que (AB) ∥ (CD).

M est le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

I est le milieu de [AB] et J celui de [CD].

K est le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].



a)b) Étant donné que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires par construction du trapèze, on peut définir le repère $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$, ainsi

A(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1) et I $\begin{cases} x_I = \dfrac{0+1}{2} \\ y_I = \dfrac{0+0}{2} \end{cases}$, $I\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

c) Puisque C est sur la droite parallèle à (AB) (axe des abscisses) passant par D, on a : $y_C = y_D = 1$.

On pose a son abscisse, on a donc : C(a ; 1) et J $\begin{cases} x_J = \dfrac{a+0}{2} \\ y_J = \dfrac{1+1}{2} \end{cases}$, $J\left(\dfrac{a}{2};1\right)$.

Remarquer : $a \neq 1$ pour avoir (AD) et (BC) sécantes.

d) Un point N(x ; y) de (BC) est caractérisé par $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

On a donc : $\overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} a-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $1\times(x-1) = (a-1)\times y$

Une équation cartésienne de (BC) est : $x-(a-1)y-1=0$

Le point M étant sur (BC) et sur l'axe des ordonnées (AD), on obtient : M(0 ; $\dfrac{1}{1-a}$) à condition que $a \neq 1$.

(Si $a = 1$, ABCD est un parallélogramme. La définition d'un trapèze n'exclut pas a priori les parallélogrammes lorsque ce n'est pas précisé. Le texte ici est sans ambiguïté car dans l'énoncé, on nous dit que M existe).

e) $\overrightarrow{MI} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}-0 \\ 0-\dfrac{1}{1-a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{a-1} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme $\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{a-1}\times\dfrac{a-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

Les points M, I, J sont alignés.

f) Un point N(x ; y) de (BD) est caractérisé par $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.

On a donc : $\overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ colinéaires si et seulement si $1\times(x-1) = -1\times y$

Une équation cartésienne de (BD) est : $x+y-1=0$

Un point N(x ; y) de (AC) est caractérisé par $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

A, étant l'origine du repère, $\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de (AC) est : $x-ay=0$

les coordonnées de K sont les solutions du système : $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-ay=0 \end{cases}$

Par différence, il vient : $y = \dfrac{1}{a+1}$, puis, $x = 1-y = \dfrac{a}{a+1}$. $K\left(\dfrac{a}{a+1};\dfrac{1}{a+1}\right)$

g) $\vec{KI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{a}{a+1}\\-\frac{1}{a+1}\end{pmatrix}$ et $\vec{IJ}\begin{pmatrix}\frac{a-1}{2}\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires puisque $\frac{1}{2}-\frac{a}{a+1}=\frac{a+1-2a}{2(a+1)}=\frac{1-a}{2(a+1)}$

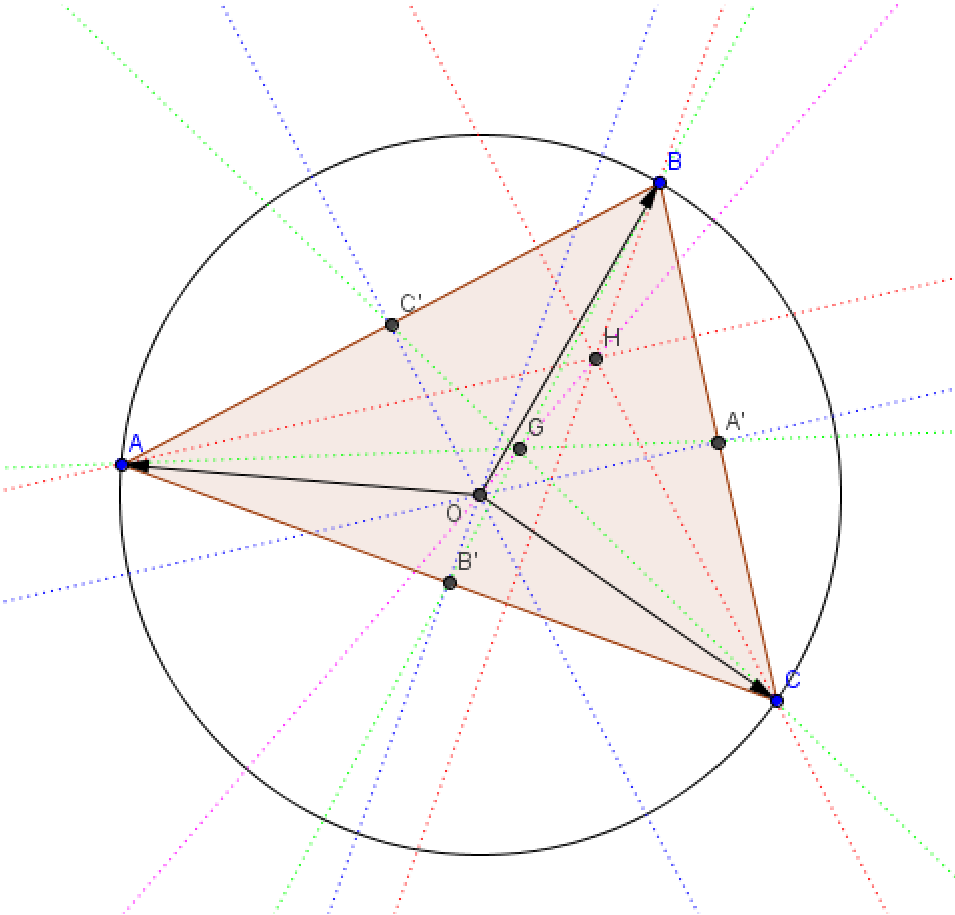
et $-\frac{1}{a+1}\times\frac{a-1}{2}=\frac{1-a}{2(a+1)}$

Conclusion : Les points M, I, J, K sont alignés.

---

93 page 283 Orthocentre et droite d'Euler

Figure



H est défini par $\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$

En ajoutant $\vec{AO}$ aux deux membres de l'égalité, il vient :

$\vec{AH}=\vec{OB}+\vec{OC}=2\vec{OA'}$, car, A' est le milieu de $[BC]$.

O étant le centre du cercle circonscrit et A' le milieu de $[BC]$, (OA') est la médiatrice de (BC).

$(AH) \parallel (OA')$ et $(OA') \perp (BC)$, d'où, $(AH) \perp (BC)$.

La droite issue de A et perpendiculaire au côté opposé (BC) est une hauteur du triangle ABC.

On a de même (permutation circulaire des points A, B, C)

$\vec{BH}=2\vec{OB'}$ et $\vec{CH}=2\vec{OC'}$

H est le point d'intersection des trois hauteurs de *ABC*.

H est l'orthocentre du triangle *ABC*.

2- *G* centre de gravité est le point de concours des médianes.

On sait : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

d'où $(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}) = \vec{0}$.

On obtient : $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{OH} = 3\ \overrightarrow{OG}$.

Les points *O*, *H*, *G* sont alignés (droite d'Euler)

Animation GeoGebra

---

94 page 282

Conjecture :

Il semble que les points *M*, *I*, *J* sont alignés, et, sur une droite parallèle à (*AC*).

Repère (A, B, D).

Coordonnées des points : *A*(0 ; 0) ; *B*(1 ; 0), *D*(0 ; 1) d'où : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Une équation de (*BD*) est : $x + y - 1 = 0$

(Méthode : colinéarité des vecteurs

ou bien

une équation est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 1$ et $-b = -1$, puis, un des points ....

ou bien

une équation réduite est de la forme $y = ax + b$ et les deux points *B* et *D* ....)

Comme $M \in (BD)$ et que l'abscisse de *M* est *m*, son ordonnée vaut : $y = 1 - m$.

$M(m\ ;\ 1 - m)$ dans le repère (*A*, *B*, *D*).

b) *K* est le symétrique de *C* par rapport à *M*, d'où : *M* est le milieu de [*KC*].

On a donc : $x_K = 2x_M - x_C$ et $y_K = 2y_M - y_C$

Or, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (car, *ABCD* est un parallélogramme)

d'où, *C*(1 ; 1).

$K(2m - 1\ ;\ -2m + 1)$

I est un point de la parallèle à (*AB*) (axe des abscisses) passant par *K* donc son ordonnée est celle de *K*.

I est un point de (*AD*) (axe des ordonnées), donc, son abscisse est 0.

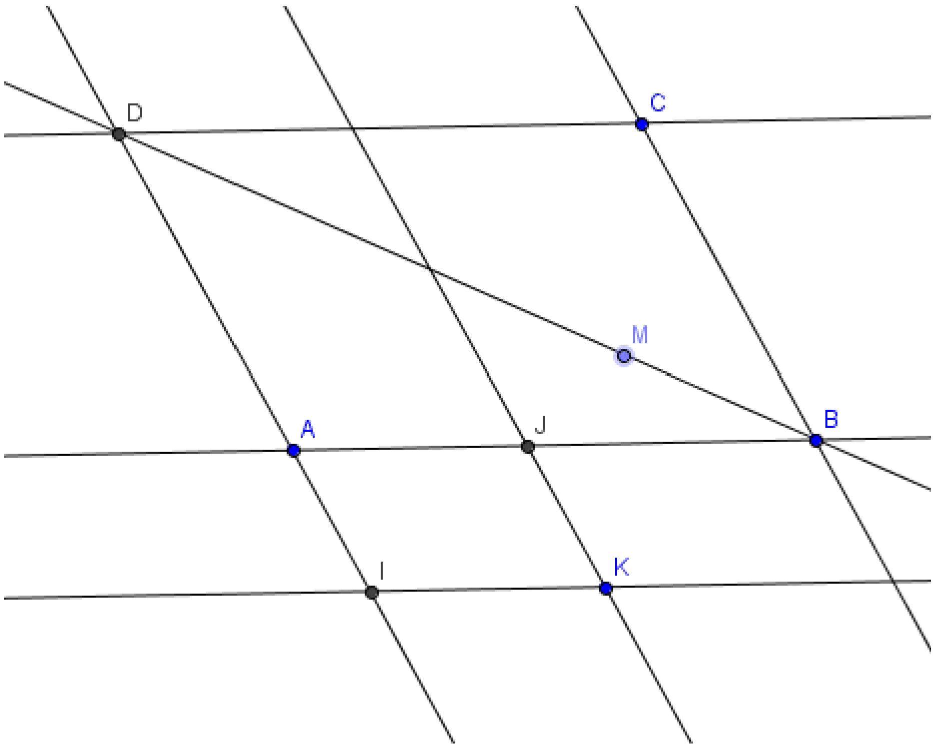
$I(0\ ;\ -2m + 1)$

De même : $J(2m - 1 ; 0)$

$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 2m-1 \\ 2m-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a : $\overrightarrow{IJ} = (2m - 1)\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IM} = m\ \overrightarrow{AC}$

Ce qui prouve la conjecture.



96 page 284

Lecture (réfléchie) de l'énoncé :

C'est un exercice sur les vecteurs …. je pense " vecteurs " en lisant et en écrivant.

énoncé	" je pense à "
ABCD est un parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ou … (*les autres relations équivalentes selon le sommet que l'on veut privilégier*)
$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BA}$ colinéaires …. les points A, B, K sont alignés … $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont de sens opposés (*K n'est pas sur le segment [BA]*) Longueurs : BK = $\frac{1}{2}$ BA
$\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AD}$ colinéaires …. les points A, L, D sont alignés … $\overrightarrow{AL}$ $\overrightarrow{AD}$ et sont de même sens. Longueurs : AL = 3AD
La question : Les points K, C, L sont-ils alignés ?	

Recherche :

Pour répondre à cette question, on cherche à exprimer deux de ces trois vecteurs : $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{CL}$ en décomposant en somme sur deux vecteurs de base non colinéaires afin de pouvoir comparer les coefficients …

Choix des vecteurs de base : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ semblent de bons candidats puisque $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont exprimés en fonction de ces vecteurs.

Le point A semble aussi être un point " intéressant " pour décomposer en somme de vecteurs par la relation de Chasles.

Rédaction :

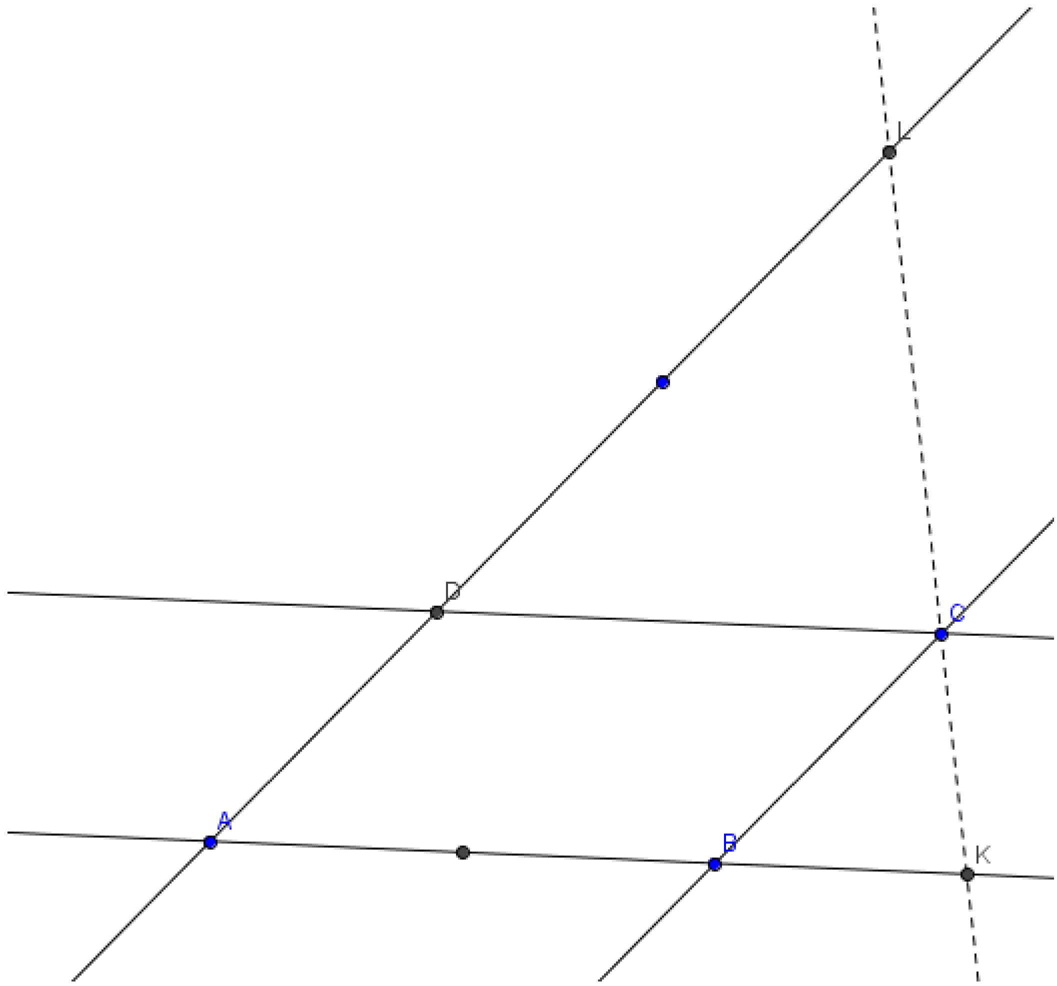
Deux types de rédaction : Calcul vectoriel et calcul analytique

Calcul vectoriel	Calcul analytique
$\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles, et la seule donnée permettant d'étudier K est la donnée : $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$)	**Choix d'un repère :** Soit le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$)

Or, $\overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ (parallélogramme), donc : $\overrightarrow{KC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$	**Coordonnées des points et des vecteurs :** Par définition du repère : B(1 ; 0) et D(0 ; 1) ou encore $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, d'où, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ou encore C(1 ; 1) $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ mène à $\begin{cases} x_K - 1 = -\frac{1}{2}(-1) \\ y_K = -\frac{1}{2}\times 0 \end{cases}$ $K\left(\frac{3}{2};0\right)$ On en déduit : $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}$ (ou encore : $\overrightarrow{KC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$)

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AL}$ (Relation de Chasles, et la donnée permettant d'étudier K est la donnée : $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et la donnée permettant d'étudier L est $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AD}$)	La relation $\overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AD}$ mène à $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, soit : $L(0;3)$
On a donc : $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ soit : $\overrightarrow{KL} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$	On en déduit : $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0-\frac{3}{2}\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\3\end{pmatrix}$ (ou encore : $\overrightarrow{KL} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$)
L'observation des coefficients donne immédiatement : $3\overrightarrow{KC} = 3(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) =$ $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{KL}$	$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\3\end{pmatrix}$ La relation de colinéarité : $3\times\left(\frac{-1}{2}\right)-1\times\left(\frac{-3}{2}\right) = 0$ montre que les coordonnées sont proportionnelles
Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, donc, les points K, C, L sont alignés.	Conclusion : Les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires, donc, les points K, C, L sont alignés.

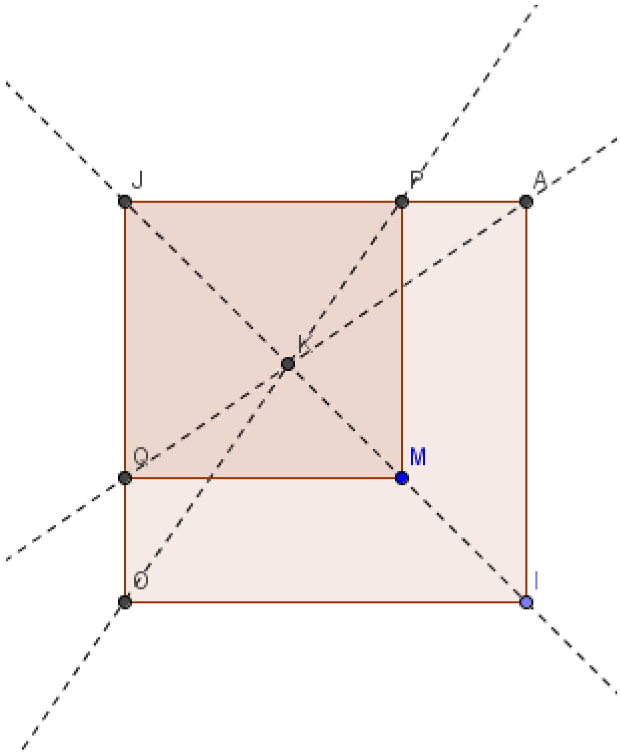


99 page 284

OIAJ est un carré.

M est un point à l'intérieur du carré.

P et Q sont situés respectivement sur [AJ] et [OJ] distincts des sommets tels que PMQJ est un carré.



Choix d'un repère: $(O\,;\,\vec{OI}\,,\vec{OJ})$

Soit a l'abscisse de M. **$a \neq 0$ et $a \neq 1$**, puisque les sommets ne sont pas atteints.

M à l'intérieur du carré.

$0 < a < 1$, donc, $0 < 1 - a < 1$.

JP = JQ = a par construction du carré QMPJ,

M(a, $1 - a$) $\vec{IM}\begin{pmatrix} a-1 \\ 1-a \end{pmatrix} = (a-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(a - 1 \neq 0)$

P(a; 1) $\vec{OP}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$

Q(0; $1 - a$) $\vec{AQ}\begin{pmatrix} -1 \\ -a \end{pmatrix}$

Équations réduites des droites: (IM): $y = -x + 1$

(OP): $y = \dfrac{1}{a}x$ *(Puisque $a \neq 0$)*

(AQ): $y = ax + 1 - a$

Intersection (IM) et (AQ): $\begin{cases} y=-x+1 \\ y=ax+1-a \end{cases}$ soit: $-x+1=ax+1-a$.

on obtient : $x(1+a)=a$. Évidemment, $1+a \neq 0$, donc, on peut diviser par $1+a$.

Conclusion : le point d'intersection K de (IM) et (AQ) a pour abscisse : $x_K = \dfrac{a}{1+a}$ et pour ordonnée :

$$y_K = -\frac{a}{1+a} + 1 = \frac{-a+1+a}{1+a} = \frac{1}{1+a}.$$

$$K\left(\frac{a}{1+a}; \frac{1}{1+a}\right)$$

Montrons que K est sur (OP).

Comme une équation de (OP) est : $y = \dfrac{1}{a}x$ et que $\dfrac{1}{a} \times \dfrac{a}{1+a} = \dfrac{1}{1+a}$, le point K est sur (OP).

Conclusion : les droites (OP), (IM) et (AQ) sont concourantes en un point K.

Remarque : On peut faire aussi intersection de (OP) et (IM) :

$\begin{cases} y=\dfrac{1}{a}x \\ y=-x+1 \end{cases}$, soit : $\dfrac{1}{a}x = -x+1$ qui mène à $x = \dfrac{a}{1+a}$, puis, $y = \dfrac{1}{1+a}$ et,

en remplaçant dans l'équation de (AQ): $a \times \dfrac{a}{1+a} + 1 - a = \dfrac{a^2+(1-a)(1+a)}{1+a} = \dfrac{a^2+1-a^2}{1+a} = \dfrac{1}{1+a}$

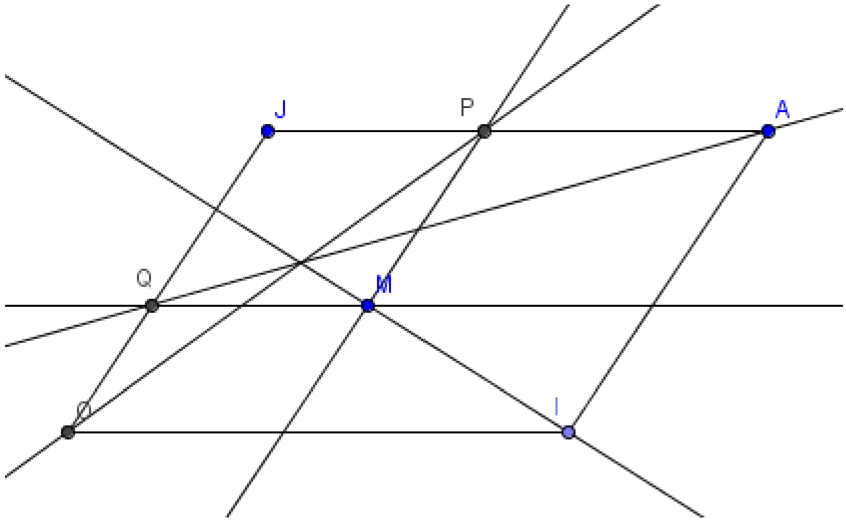
La démonstration est identique avec des parallélogrammes OIAJ et QMPJ.

Choix d'un repère: $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

Soit a l'abscisse de M. $a \neq 0$ et $a \neq 1$, puisque les sommets ne sont pas atteints.

Soit b l'ordonnée de M. $b \neq 0$ et $b \neq 1$, puisque les sommets ne sont pas atteints.

M à l'intérieur du parallélogramme, donc, $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$



M(a, b) $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}a-1\\b\end{pmatrix}$

P(a; 1) $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$

Q(0; b) $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix}-1\\b-1\end{pmatrix}$

Équations réduites des droites: (IM): $y = \dfrac{b}{a-1}x - \dfrac{b}{a-1}$.

(OP): $y = \dfrac{1}{a}x$

(AQ): $y = (1-b)x + b$

Intersection (OP) et (AQ): $\dfrac{1}{a}x = (1-b)x + b$

on obtient : $x\left(\dfrac{1}{a}-(1-b)\right) = b$, soit : $x\left(\dfrac{1-a+ab}{a}\right) = b$.

$x = \dfrac{ab}{ab-a+1}$ et $y = \dfrac{1}{a}\times\dfrac{ab}{ab-a+1} = \dfrac{b}{ab-a+1}$.

Conclusion : le point d'intersection K de (OP) et (AQ) a pour abscisse : $x_K = \dfrac{ab}{ab-a+1}$ et pour ordonnée :

$$y_K = \frac{b}{ab-a+1}$$

Comme $\dfrac{b}{a-1}\times\dfrac{ab}{ab-a+1} - \dfrac{b}{a-1} = \dfrac{ab^2-ab^2+ab-b}{(a-1)(ab-a+1)} = \dfrac{(a-1)b}{(a-1)(ab-a+1)} = \dfrac{b}{ab-a+1}$,

les coordonnées de K vérifient une équation de (IM).

Conclusion : les droites (OP), (IM) et (AQ) sont concourantes en un point K.