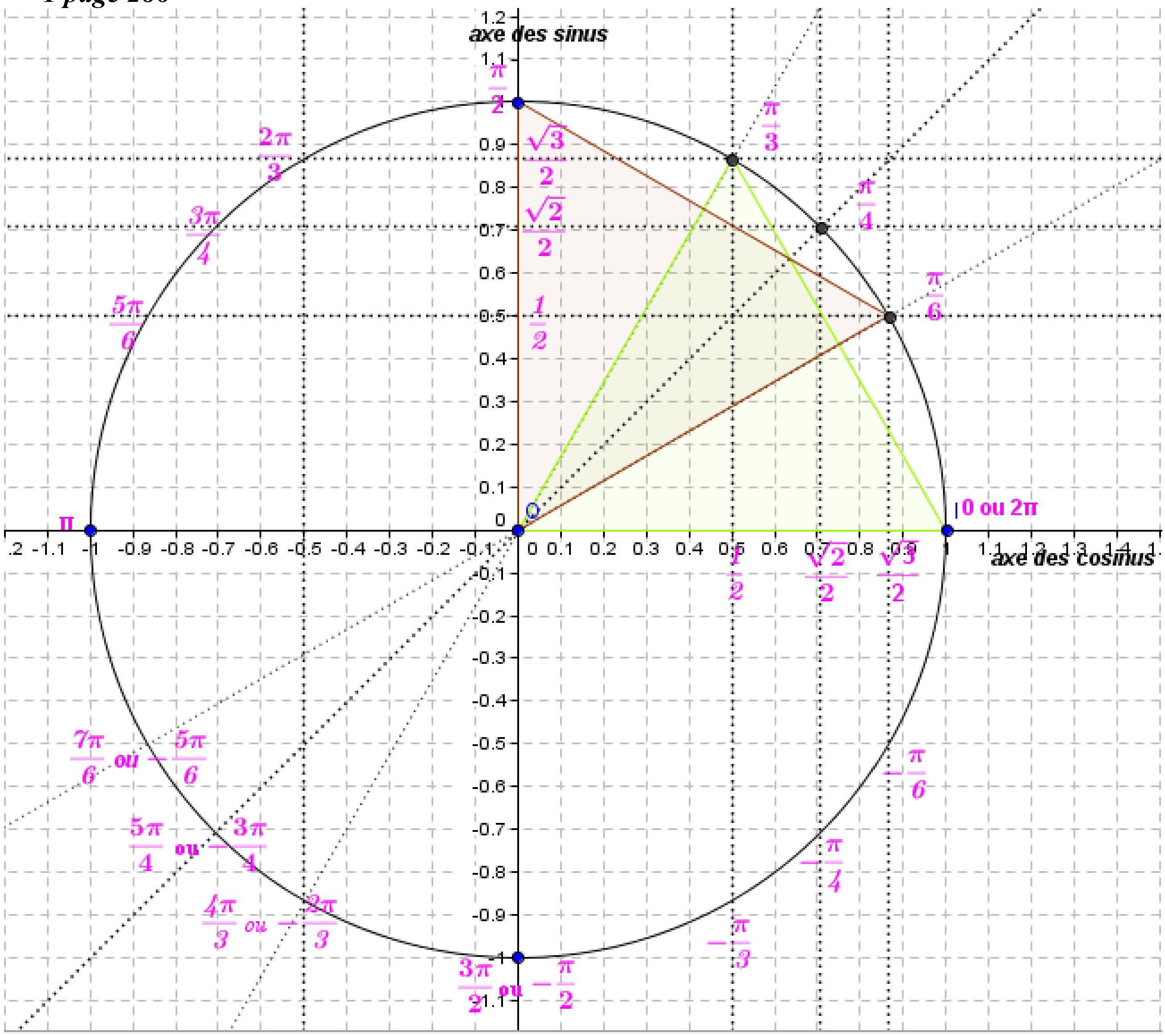
Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

Index

1 page 286



2 page 286

Points	I	J	I'	A	B	C	M
réels	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	x
Longueur de l'arc (la plus courte)	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	x
mesure de l'angle en °	0	90	180	30	45	60	$\frac{180\,x}{\pi}$
mesure de	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	x

l'angle en radians							

3 page 287

1- $M_0(x\,;y)$ image du réel t (graduation sur le cercle trigonométrique)

$M_1(-x;-y)$ image du réel $\pi + t$

$M_2(x\,;-y)$ image du réel $-t$

$M_3(-x;y)$ image du réel $\pi - t$

Or, $\cos(t) = x$ et $\sin(t) = y$.

$\begin{cases}\cos(-t)=\cos(t)\\ \sin(-t)=-\sin(t)\end{cases}$ point M_2 par rapport à M_0 .

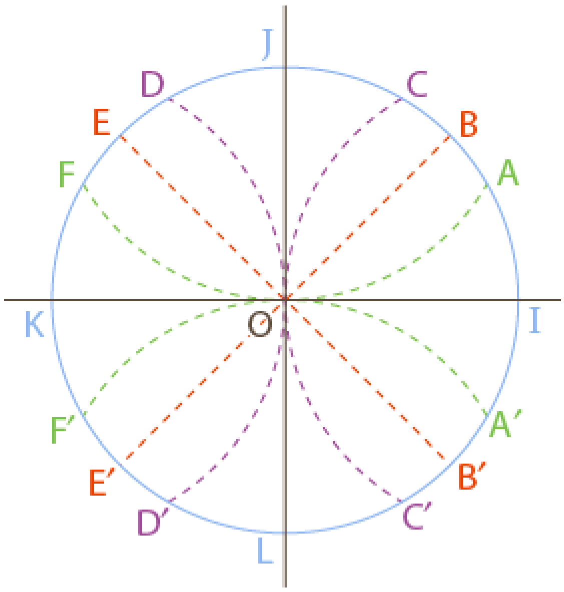
$\begin{cases}\cos(t+\pi)=-\cos(t)\\ \sin(t+\pi)=-\sin(t)\end{cases}$ point M_1 par rapport à M_0 .

$\begin{cases}\cos(\pi-t)=-\cos(t)\\ \sin(\pi-t)=\sin(t)\end{cases}$ point M_3 par rapport à M_0 .

2- $M_4\,(y\,;x)$ image du réel $\frac{\pi}{2}-t$

$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin(t)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos(t)\end{cases}$ On retrouve les propriétés des angles complémentaires.

24 page 300



a) $\left(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$,   b) $\left(\overrightarrow{OL}\,,\overrightarrow{OK}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

c) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, d) $(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OL}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

e) $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, f) $(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OD'}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$,

Quelques calculs,

les points sont repérés par

I	A	B	C	J	D	E	F	K	F'	E'	D'	L	C'	B'	A'
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$

Une mesure de …..

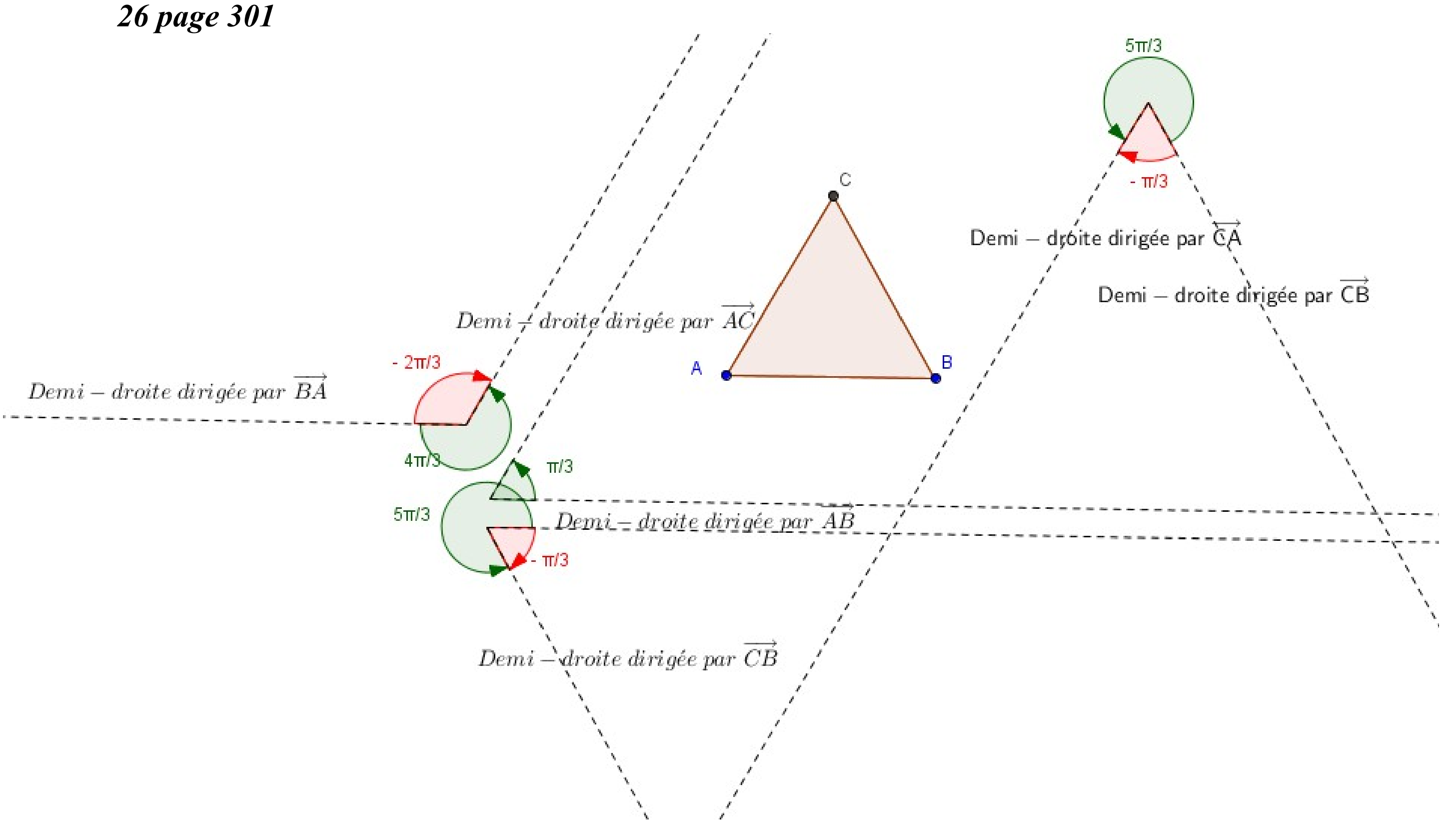
Les autres mesures sont obtenus à partir d'une mesure en faisant $+ 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

a) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2} - 0 = \ldots$ b) $(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}) = -\frac{\pi}{2} - \pi = \ldots$ c) $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}) = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \ldots$

d) $(\overrightarrow{OE'}, \overrightarrow{OL}) = -\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{2}) = \ldots$ e) $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OI}) = 0 - \frac{\pi}{3} = \ldots$ f) $(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OD'}) = -\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = \ldots$

---

26 page 301



Les autres mesures sont obtenus à partir d'une mesure en faisant $+ 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ (modulo 2π)

b) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π) ou $\frac{5\pi}{3}$ (modulo 2π)

c) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ (modulo 2π) ou $\dfrac{5\pi}{3}$ (modulo 2π)

d) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$ (modulo 2π) ou $\dfrac{4\pi}{3}$ (modulo 2π)

Compléments :

On dit que *ABC* est un triangle équilatéral direct (on lit *ABC* en tournant dans le sens direct).

En écrivant *ABCAB* … toujours dans le même ordre, on a l'écriture des angles orientés dans le sens positif

D'où, ici : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ (modulo 2π)

$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = -\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \pi$ (puisque $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$)

$= \dfrac{\pi}{3} + \left(\dfrac{\pi}{3} + \pi\right) = \dfrac{2\pi}{3} + \pi = \dots$

$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = (-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \pi = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dots.$

---

27 page 301

a) $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ (modulo 2π)

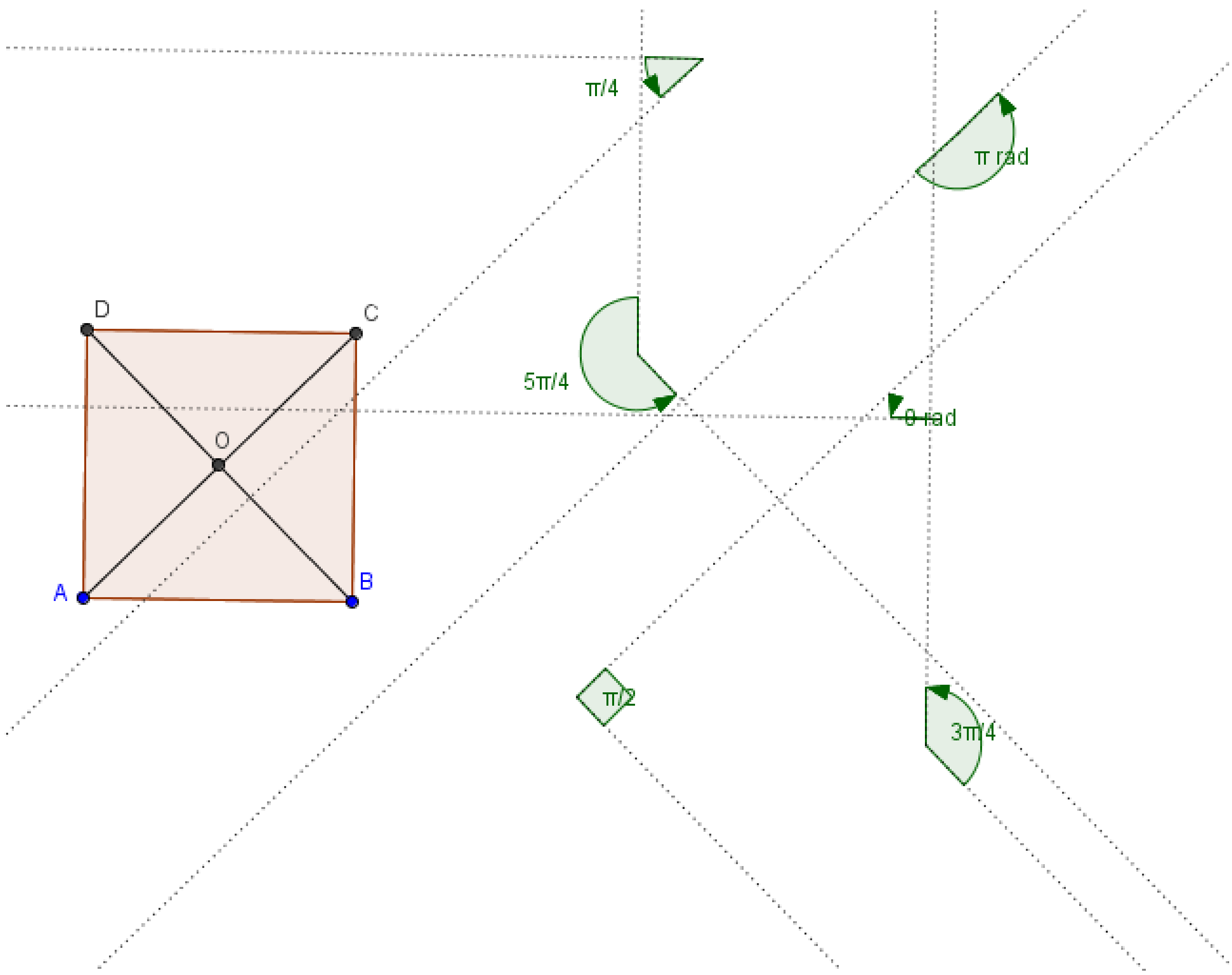
b) $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}$ (modulo 2π) ou $\dfrac{5\pi}{4}$ (modulo 2π)

c) $\left(\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π)

d) $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi$ (modulo 2π)

e) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}\right) = 0$ (modulo 2π)

f) $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ (modulo 2π)



29 page 301

ABCD est un carré direct (on tourne en lisant les sommets ABCD dans le sens direct, on a donc :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}.$

ABF est un triangle équilatéral direct, on a donc :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right) = \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}.$

CBE est un triangle équilatéral direct, on a donc :

$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}.$

1) **Comme indiqué dans l'énoncé du livre s'appuyer sur la lecture graphique pour l'orientation.**

Par construction ADF est un triangle isocèle de sommet principal A puisque AD = AF (= AB).

Notons α une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FA}\right)$ (= $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}\right)$)

D'après la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right) + \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$

D'où, une mesure de $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)$ est : $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

D'autre part, dans tout triangle, on sait :

la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat.

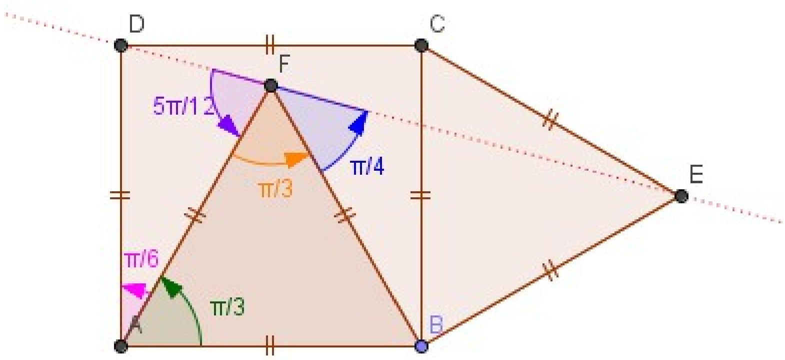
Dans le cas des angles orientés, on obtient :
$(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}) = \pi$. (Attention à toujours tourner dans le même sens ...)
Comme $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}) = (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF}) = \alpha$, il vient :
$2\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

En divisant par 2, on a deux mesures $\alpha = \dfrac{5\pi}{12}$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{12} + \pi$

Seule la mesure $\alpha = \dfrac{5\pi}{12}$ est acceptable dans cet exercice.

2) Les mêmes observations faites dans le triangle BFE donnent :
BFE est isocèle de sommet principal B.
L'angle $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})$ a pour mesure principale $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF}) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$.
Les angles de base ont par conséquent pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ (BFE est un triangle rectangle et isocèle).
$(\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE}) = \dfrac{\pi}{4}$.

3) $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}) = (\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FA}) + (\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}) + (\overrightarrow{FB},\overrightarrow{FE})$ (Relation de Chasles)
$(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE}) = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \pi$.
Comme l'angle $(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FE})$ vaut π, les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires de sens opposés.
Les points D, F, E sont donc alignés dans cet ordre.



32 page 301

a) $t \in \left]-\pi;\pi\right]$, $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$.

On lit sur le cercle trigonométrique : $t = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ (bien remarquer que ces deux réels sont dans l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$.

b) Dans $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$ sont les réels $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

33 page 301

Résolution dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Solutions : $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos(t) = -1$ Solutions : $\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos(t) = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ aucune solution

d) $\sin(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Solutions : $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

e) $\sin(t) = -\dfrac{1}{2}$ Solutions : $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

f) $\sin(t) = 0$ Solutions : $0 + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

---

36 page 302

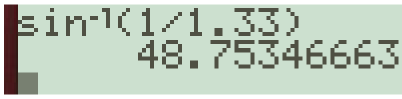
1) La loi de Descartes appliquée à cette expérience :

Le rayon incident se propage dans l'eau : $n_1 = 1{,}33$ et $i_1 = 25°$, le rayon réfracté se propage dans l'air : $n_2 = 1$, d'où, $\sin i_2 = 1{,}33 \times \sin 25°$.

$i_2 \approx 34{,}20°$ à 0,01° par excès.

2) L'angle de réfraction vaut 90°, lorsque $i_2 = 90°$ et $\sin i_2 = 1$ et le sinus vaut au maximum 1

D'où, $\sin i_L = \dfrac{1}{1{,}33}$ $i_L \approx 48{,}75°$



Si $i_1 > i_L$, le rayon est réfléchi.

---

38 page 302

a) Résoudre $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos 2t$

Cette équation est équivalente au système $\begin{cases} t + \dfrac{\pi}{4} = 2t + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ t + \dfrac{\pi}{4} = -2t + k \times 2\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

chacune des équations du système est une équation du premier degré d'inconnue t.

Après réduction, on obtient le système $\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ t = \dfrac{-\pi}{12} + k \times \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

En donnant trois valeurs consécutives à k, on a :

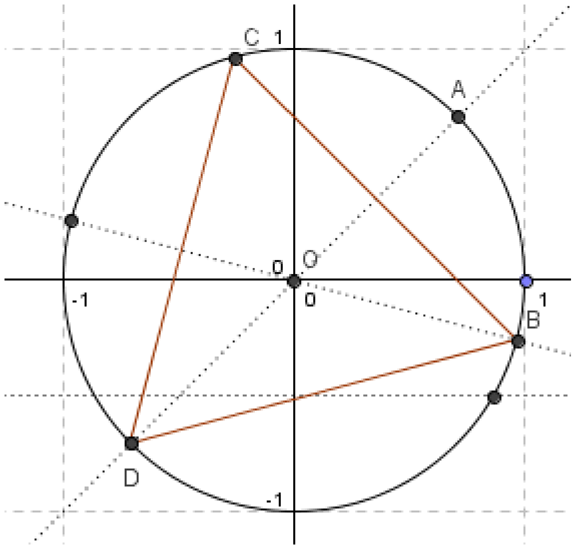
si $k = 0$, $t = -\dfrac{\pi}{12}$,

si $k = 1$, $t = \dfrac{7\pi}{12}$

si $k = 2$, $t = \dfrac{15\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{4}$

Représentation des images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Les points A, B, C , D représentent les solutions.



Les mesures principales des solutions sont : $-\dfrac{3\pi}{4}$; $-\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{7\pi}{12}$

b) Résoudre $\cos t = \sin 2t$

Comme pour tout α réel, on a: $\sin \alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$,

cette équation est équivalente à: $\cos t = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2t\right)$,

Cette équation est équivalente au système $\left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{2} - 2t + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ t = -\left(\dfrac{\pi}{2} - 2t\right) + k \times 2\pi \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

chacune des équations du système est une équation du premier degré d'inconnue t.

Après réduction, on obtient le système $\left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{6} + k \times \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ t = \dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

En donnant trois valeurs consécutives à k, on a :

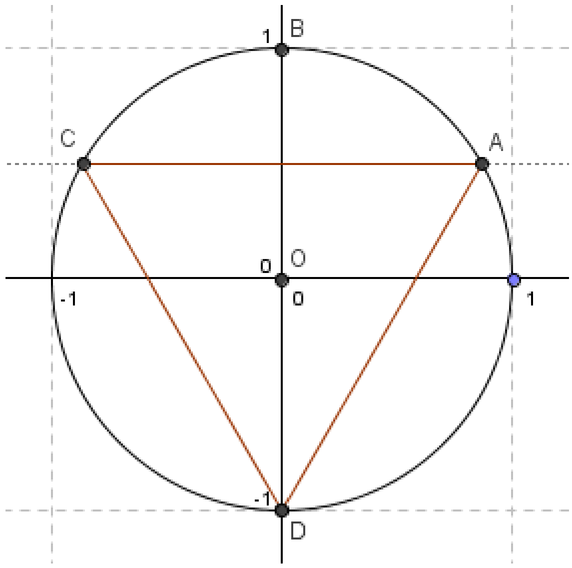
si $k = 0$, $t = \dfrac{\pi}{6}$

si $k = 1$, $t = \frac{5\pi}{6}$

si $k = 2$, $t = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

Représentation des images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Les points A, B, C , D représentent les solutions.



Les mesures principales des solutions sont : $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$

c) Résoudre $\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$

Cette équation est équivalente au système $\begin{cases} 2t - \frac{\pi}{4} = t + \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ 2t - \frac{\pi}{4} = -\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + k \times 2\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

chacune des équations du système est une équation du premier degré d'inconnue t.

Après réduction, on obtient le système $\begin{cases} t = \frac{5\pi}{12} + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ t = \frac{\pi}{36} + k \times \frac{2\pi}{3} \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

En donnant trois valeurs consécutives à k, on a :

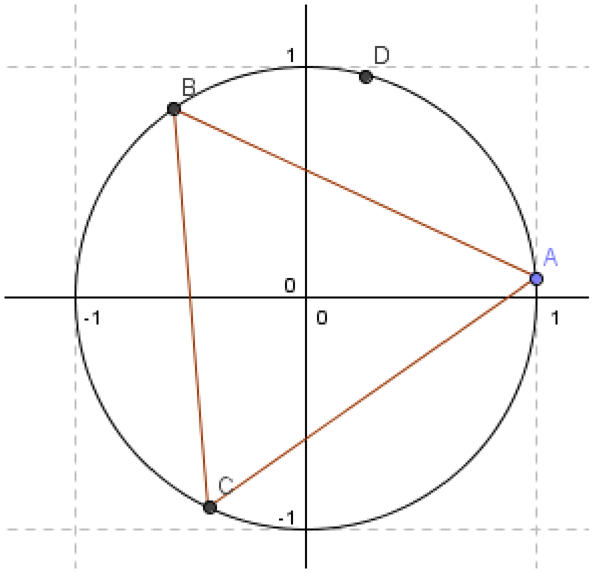
si $k = 0$, $t = \frac{\pi}{36}$

si $k = 1$, $t = \frac{25\pi}{36}$

si $k = 2$, $t = \dfrac{49\pi}{36}$

Représentation des images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Les points A, B, C , D représentent les solutions.



d) $\cos t = \sin t$

On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$,

l'équation $\cos t = \sin t$ est équivalente à: $\cos t = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$,

Cette équation est équivalente au système $\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{2} - t + k \times 2\pi \\ \text{ou} \\ t = -\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) + k \times 2\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

chacune des équations du système est une équation du premier degré d'inconnue t.

Après réduction, on obtient le système $\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{4} + k \times \pi \\ \text{ou} \\ \text{aucune solution} \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

---

39 page 302

Résoudre

a) $2 \sin^2 t - 3 \sin t + 1 = 0$

cette équation est équivalente au système : $\begin{cases} X = \sin t \\ 2X^2 - 3X + 1 = 0 \end{cases}$

L'équation du second degré $2X^2 - 3X + 1 = 0$ a pour solutions : $\dfrac{1}{2}$ et 1. ($\Delta = 9 - 8 = 1$, ...)

On a donc : $2 \sin^2 t - 3 \sin t + 1 = 0$ équivaut à $\begin{cases} X = \sin t \\ X = \dfrac{1}{2} \text{ ou } X = 1 \end{cases}$

Il reste à résoudre $\sin t = \dfrac{1}{2}$ ou $\sin t = 1$

$\sin t = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $t = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\sin t = 1$ équivaut à $t = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions appartenant à $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont : $\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{6}$.

b) a) $2 \cos^2 t - 3\sqrt{3} \cos t + 3 = 0$

cette équation est équivalente au système : $\begin{cases} X = \cos t \\ 2X^2 - 3\sqrt{3}X + 3 = 0 \end{cases}$

L'équation du second degré $2X^2 - 3\sqrt{3}\ X + 3 = 0$ a pour solutions : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sqrt{3}$. ($\Delta = 27 - 24 = 3, ...$)

On a donc : $2 \cos^2 t - 3\sqrt{3} \cos t + 3 = 0$ équivaut à $\begin{cases} X = \cos t \\ X = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = \sqrt{3} \end{cases}$

Il reste à résoudre $\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos t = \sqrt{3}$

$\cos t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $t = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

$\cos t = \sqrt{3}$ n'a aucune solution puisque $\sqrt{3} > 1$

Les solutions appartenant à $]-\pi\ ;\ \pi]$ sont : $\dfrac{\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6}$

---

40 page 302

1) $\alpha \in [0\ ;\ \pi]$ et $\cos \alpha = 0{,}8$

a) Construction (Le point d'abscisse 0,8 sur le cercle trigonométrique dans le premier quadrant est associé à α)

b) b) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

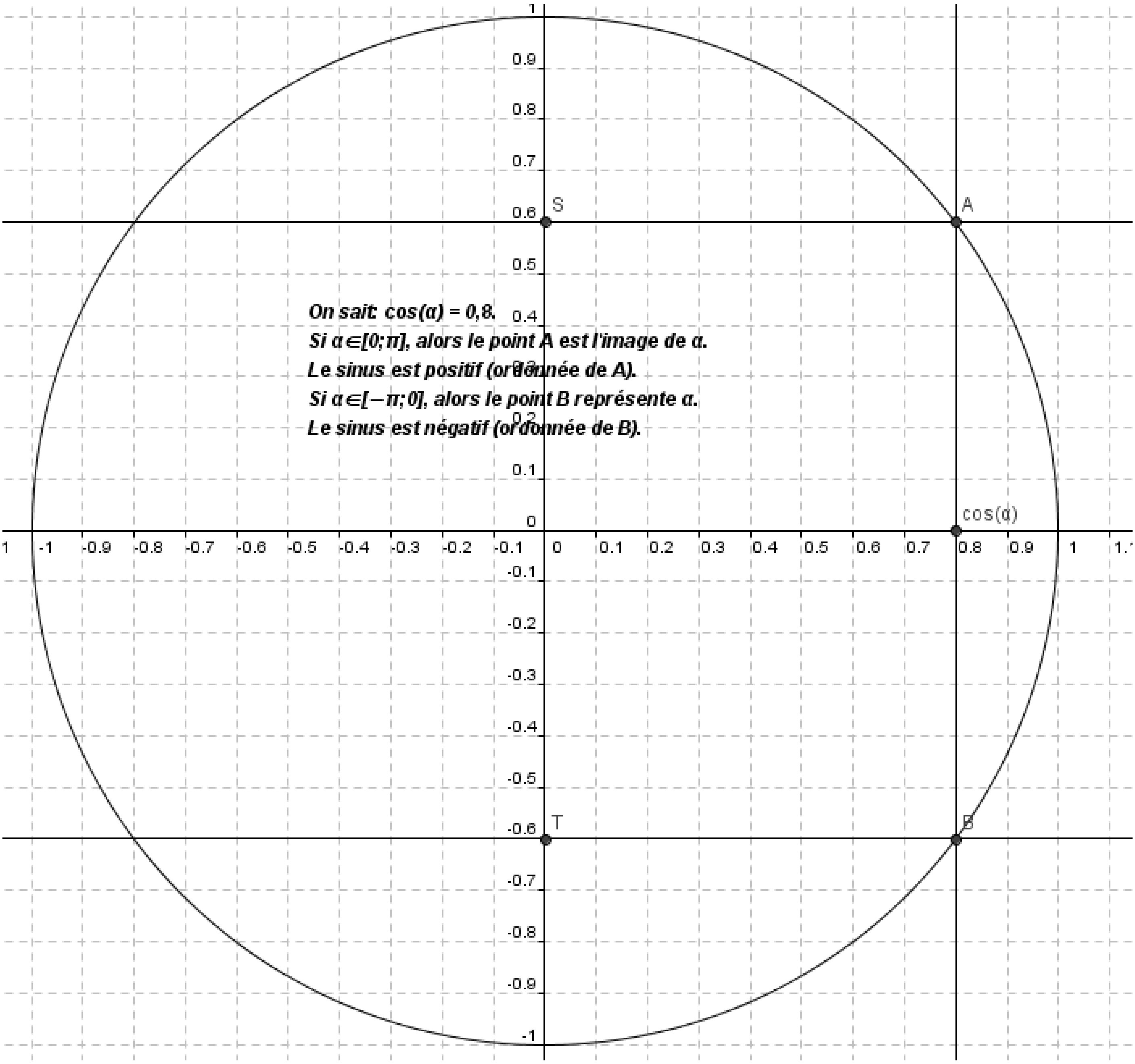
Comme $\alpha \in [0\ ;\ \pi]$, $\sin \alpha > 0$, d'où, $\sin \alpha = 0{,}6$

c) $\alpha \approx 0{,}64$ rad à 10^{-2} près par défaut

2) Si $\alpha \in]-\pi\ ;\ 0]$, le point associé à α est dans le quatrième quadrant.

Le sinus est alors négatif.

$\sin \alpha = -0{,}6$ et $\alpha \approx -0{,}64$ rad à 10^{-2} près par excès.



44 page 302

$a = \sin \frac{\pi}{7}$

$\sin\left(\frac{-\pi}{7}\right) = -a$ $\qquad$ $(\sin(-x) = -\sin x)$

$\sin \frac{8\pi}{7} = -a$ car $\frac{8\pi}{7} = \frac{\pi}{7} + \pi$ et $(\sin(x + \pi) = -\sin x)$

$\cos \frac{5\pi}{14} = a$ car $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

45 page 302

1) On sait que $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \end{cases}$, d'où, sin² $\frac{\pi}{5}$ = 1 – $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$ = $\frac{16-5-2\sqrt{5}-1}{16}$ = $\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Comme 0 < $\frac{\pi}{5}$ < $\frac{\pi}{2}$, on sait que sin $\frac{\pi}{5}$ > 0.

sin $\frac{\pi}{5}$ = $\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ = $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ = – $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$;

comme $\frac{4\pi}{5}$ = π – $\frac{\pi}{5}$, sin $\frac{4\pi}{5}$ = $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Comme $\frac{\pi}{2}$ – $\frac{\pi}{5}$ = $\frac{3\pi}{10}$, sin $\frac{3\pi}{10}$ = cos $\frac{\pi}{5}$ = $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

---

46 page 302

a) b) Comme $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ = $\frac{5\pi}{12}$, on a :

cos $\frac{5\pi}{12}$ = $\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

et sin $\frac{5\pi}{12}$ = $\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\times\cos\frac{\pi}{3}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

Comme $\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$ = $\frac{11\pi}{12}$, on a : $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ = cos $\frac{5\pi}{12}$ = $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

et $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ = –sin $\frac{5\pi}{12}$ = – $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

---

48 page 302

a)b) $2\times\frac{\pi}{8}$ = $\frac{\pi}{4}$ et cos $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

or, $\cos\frac{\pi}{4}$ = $2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$, d'où, $\cos^2\frac{\pi}{8}$ = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}$ = $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

Comme 0 < $\frac{\pi}{8}$ < $\frac{\pi}{2}$, cos $\frac{\pi}{8}$ > 0, cos $\frac{\pi}{8}$ = $\frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)}}{2}$

et, $\cos\frac{\pi}{4}$ = 1 – $\frac{2\sin^2\pi}{8}$, d'où, $\sin^2\frac{\pi}{8}$ = $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{2})}}{2}$

51 page 302

1) $\cos (t - \frac{\pi}{4}) = \cos t \times \cos \frac{\pi}{4} + \sin t \times \sin \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t + \sin t)$

$\sin (t - \frac{\pi}{4}) = \sin t \times \cos \frac{\pi}{4} - \cos t \times \sin \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin t - \cos t)$

2) soit (1) l'équation : $\cos t + \sin t = \sqrt{2}$

$\cos t + \sin t = \sqrt{2}$ équivaut à $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t + \sin t) = 1$ (En effet : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$\cos t + \sin t = \sqrt{2}$ équivaut à $\cos (t - \frac{\pi}{4}) = 1$

Comme $\cos 0 = 1$

On en déduit : $\cos t + \sin t = \sqrt{2}$ équivaut à $t - \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, soit : $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions de (1) est :

$\mathcal{S}_{(1)} = \{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ; } k \in \mathbb{Z}\}$

soit (2) l'équation : $\cos t - \sin t = \sqrt{2}$

$\cos t - \sin t = \sqrt{2}$ équivaut à $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t - \sin t) = 1$ (En effet : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$\cos t - \sin t = \sqrt{2}$ équivaut à $\sin (t - \frac{\pi}{4}) = -1$

Comme $\sin \left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$

On en déduit : $\cos t - \sin t = \sqrt{2}$ équivaut à $t - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$, soit : $t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

L'ensemble des solutions de (2) est :

$\mathcal{S}_{(2)} = \{- \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ; } k \in \mathbb{Z}\}$

90 page 306

ABC triangle équilatéral direct. *I* est le milieu de [*BC*].

On cherche l'ensemble $\mathcal{E}$ des points *M* du plan tels que $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Les vecteurs sont nécessairement non nuls, d'où, $M \neq I$.

A. Expérimentation

$\mathscr{E}$ semble être la demi-droite $]IC)$ (issue de I exclu et passant par C.)

B. Démonstration

1) Évaluons l'angle $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB})$

I étant le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de même sens.

ABC étant équilatéral direct, l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ par construction.

$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB})$ (2π) vecteurs colinéaires et de même sens

$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BC}, -\overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \pi$ (2π) (propriété des angles orientés)

$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$ (2π) Or, $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$

Puisqu'une mesure de $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}$, le point C est un point de $\mathscr{E}$.

2) $M \in \mathscr{E}$ si et seulement si $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. (définition de $\mathscr{E}$)

$M \in \mathscr{E}$ si et seulement si $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3} - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. (on ne change pas une égalité en ajoutant un m^me nombre aux deux membres).

Or, $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ (Relation de Chasles)

et comme $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}$, on a : $-\frac{2\pi}{3} - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = 0$

Finalement :

$M \in \mathscr{E}$ si et seulement si $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) = 0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion :

Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont non nuls, colinéaires et de même sens.

$M \in]IC)$

$M \in \mathscr{E}$ si et seulement si $M \in]IC)$

Comprendre le n° 90 :

Vous avez appris à résoudre des équations dans l'ensemble des réels ..., nous allons donc faire un parallèle entre deux énoncés qui utilisent la même démarche ...

	Avec des nombres	**Avec des points**
Énoncé :	Soit un réel $x > 0$. Chercher l'ensemble $\mathscr{E}$ de nombres x vérifiant la propriété : $x^3 - x^2 + 4 = 4x$	ABC est un triangle équilatéral direct et I le milieu de $[BC]$ Chercher l'ensemble $\mathscr{E}$ de points M vérifiant la propriété : $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
Résolution	On cherche un ensemble de nombres réels	On cherche un ensemble de points ne

	Avec des nombres	**Avec des points**
	strictement positifs	contenant pas I.
1) une solution particulière	***Montrer que le réel 1 appartient à $\mathscr{E}$***	***Montrer que le point C appartient à $\mathscr{E}$***
	Comme $1^3 - 1^2 + 4 = 4\times 1$, 1 vérifie la propriété : $x^3 - x^2 + 4 = 4x$	Voir la démonstration du 1/B/ du n° 90
2) Les autres solutions (on remplace la propriété donnée en énoncé par une autre propriété qui lui est équivalente mais que l'on sait résoudre)	***Montrer l'équivalence :*** ***$x \in \mathscr{E}$ équivaut à $(x^3 - x^2 + 4) - (1^3 - 1^2 + 4) = 4x - 4$***	***Montrer l'équivalence :*** ***$M \in \mathscr{E}$ équivaut à $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = 0\ [2\pi]$***
	Sens direct : $x \in \mathscr{E}$ donc $(x^3 - x^2 + 4) = 4x$ or, $(1^3 - 1^2 + 4) = 4\times 1$ On en déduit par différence : $(x^3 - x^2 + 4) - (1^3 - 1^2 + 4) = 4x - 4$ ***Sens réciproque*** : $(x^3 - x^2 + 4) - (1^3 - 1^2 + 4) = 4x - 4$ donc $(x^3 - x^2 + 4) - (4) = 4x - 4$ soit : $(x^3 - x^2 + 4) = 4x$ on en déduit : $x \in \mathscr{E}$ **Conclusion :** $x \in \mathscr{E}$ équivaut à $(x^3 - x^2 + 4) - (1^3 - 1^2 + 4) = 4x - 4$	***Sens direct :*** $M \in \mathscr{E}$ donc $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ or, $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ On en déduit par différence : $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = 0\ [2\pi]$ ***Sens réciproque*** : $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = 0\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$ Comme $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ on en déduit : $M \in \mathscr{E}$ **Conclusion :** $M \in \mathscr{E}$ équivaut à $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = 0\ [2\pi]$
3) Détermination de $\mathscr{E}$	***Conclure***	***Conclure***
	$(x^3 - x^2 + 4) - (1^3 - 1^2 + 4) = 4x - 4$ équivaut à $(x^3 - 1^3) - (x^2 - 1^2) - 4(x - 1) = 0$ Or, $(x^3 - 1^3) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ $(x^2 - 1^2) = (x - 1)(x + 1)$ d'où : $(x^3 - 1^3) - (x^2 - 1^2) - 4(x - 1) = 0$ équivaut à $(x - 1)(x^2 + x + 1 - x - 1 + 4) = 0$, soit : $(x - 1)(x^2 - 4) = 0$ $(x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$ $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = -2$ (exclu)	$(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{AB}) = 0\ [2\pi]$ équivaut à $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) = 0\ [2\pi]$ équivaut à $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) = 0\ [2\pi]$ équivaut à $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont non nuls, et, colinéaires de même sens.
Conclusion	$\mathscr{E} = \{1 ; 2\}$	$\mathscr{E} =]IC)$

93 page 306

ABCD est un carré .(On pose son côté de longueur *a*).

$M \in [AB]$ et $N \in [AD]$ avec $AM = AN$. (Il n'y a pas d'autres données)

1) CMN est un triangle équilatéral si et seulement si $CM = CN = MN$.

On pose $AM = x$ ($x \geqslant 0$) la longueur à déterminer.

D'après le théorème de Pythagore :

$MN^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

$CN^2 = CM^2 = (a - x)^2 + a^2 = x^2 - 2ax + 2a^2$

On résout : $2x^2 = x^2 - 2ax + 2a^2$ avec $a \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$.

Cette équation se ramène à : $x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$ (Second degré ... voir les méthodes de résolution)

Une méthode : soit : $(x + a^2) - 3a^2 = 0$

$x + a = -\sqrt{3}\,a$ ou $x + a = \sqrt{3}\,a$

Comme $x + a \geqslant 0$, seule la deuxième équation est valide :

Conclusion : $x = -a + \sqrt{3}\,a = a(\sqrt{3} - 1)$

En ce cas : $MN^2 = CN^2 = CM^2 = 2a^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

$MN = CN = CM = a\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)$

2) On a donc : $AN = a(\sqrt{3} - 1)$, $DN = a - a(\sqrt{3} - 1) = a(2 - \sqrt{3})$, $DC = a$ et $CN = a\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1) = a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

AMN est un triangle rectangle isocèle de sommet A, d'où, $\widehat{ANM} = \frac{\pi}{4}$

CMN est un triangle équilatéral d'où : $\widehat{MNC} = \frac{\pi}{3}$

A, N, D sont alignés dans cet ordre, d'où, $\widehat{CND} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

$\widehat{NCD}$ et $\widehat{CND}$ sont complémentaires, d'où : $\widehat{NCD} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$

$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{ND}{CD} = 2 - \sqrt{3}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{CD}{CN} = \frac{a}{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6-2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (C'est aussi $\sin\frac{5\pi}{12}$)

$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{DN}{CN} = \frac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{a\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (C'est aussi $\sin\frac{\pi}{12}$)

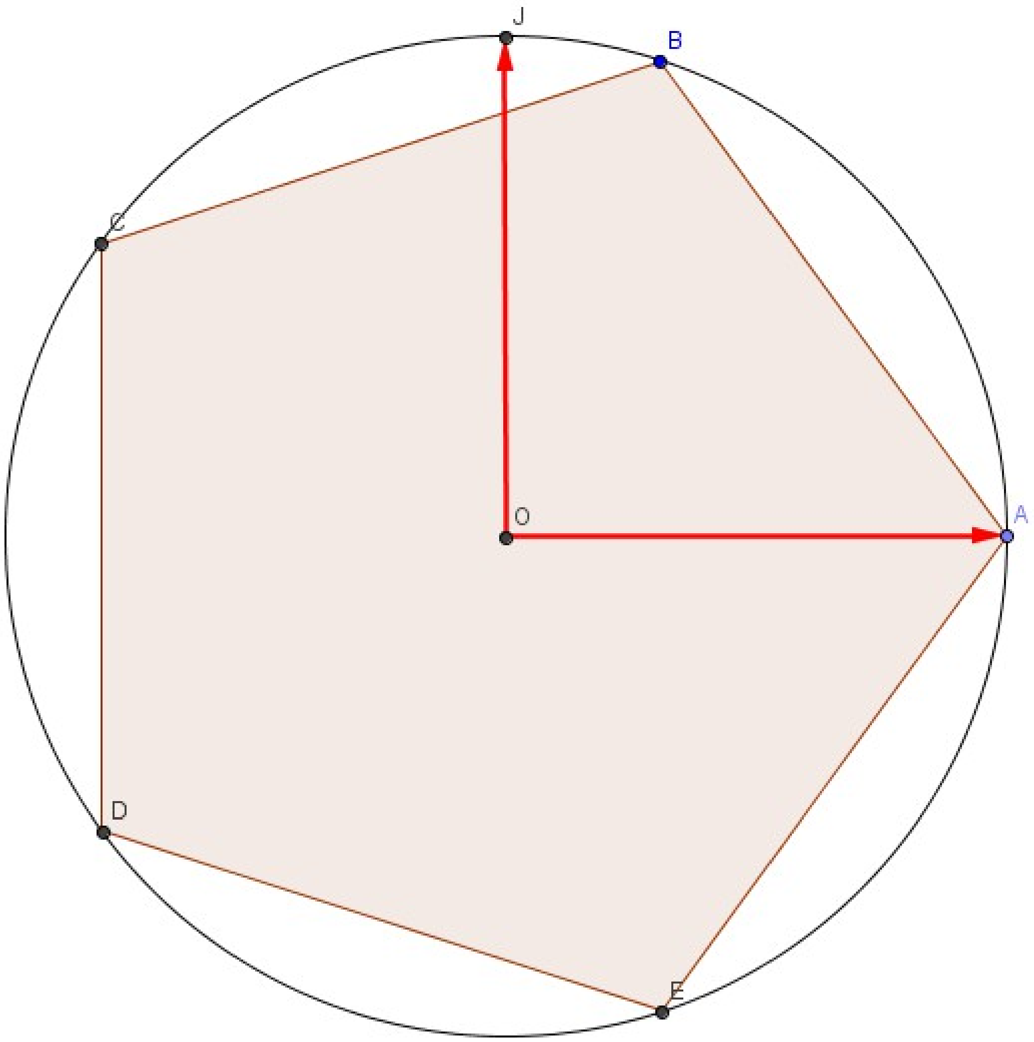
Complément :

$\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{CD}{ND} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

---

98 page 307

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right)$



Les points A, B , C, D, E sont situés dans le sens direct, dans cet ordre et régulièrement sur le cercle trigonométrique de longueur 2π :

on a donc : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA} = \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$

Or, par définition de la mesure de l'angle orienté, on sait qu'une mesure en radians de l'angle au centre orienté est une mesure de l'arc orienté défini sur le cercle trigonométrique.

Conclusion :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{6\pi}{5}\ [2\pi]$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = \dfrac{8\pi}{5}\ [2\pi]$.

2/ Les coordonnées de $A(1\ ;\ 0)$, de $B(\cos\dfrac{2\pi}{5}\ ;\ \sin\dfrac{2\pi}{5})$, de $C(\cos\dfrac{4\pi}{5}\ ;\ \sin\dfrac{4\pi}{5})$, de $D(\cos\dfrac{6\pi}{5}\ ;\ \sin\dfrac{6\pi}{5})$, de $E(\cos\dfrac{8\pi}{5}\ ;\ \sin\dfrac{8\pi}{5})$.

On a donc : $\overrightarrow{OA}\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\ \begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\ \begin{pmatrix}\cos\frac{4\pi}{5}\\ \sin\frac{4\pi}{5}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD}\ \begin{pmatrix}\cos\frac{6\pi}{5}\\ \sin\frac{6\pi}{5}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OE}\ \begin{pmatrix}\cos\frac{8\pi}{5}\\ \sin\frac{8\pi}{5}\end{pmatrix}$

Comme $\vec{V} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, on obtient :

$$\vec{V}\ \begin{pmatrix}1+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}\\ \sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}\end{pmatrix}$$

3/ **Méthode " géométrie classique "**

Soit le vecteur $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$

Le quadrilatère $OBA'E$ est par conséquent un parallélogramme.

Comme deux côtés consécutifs [OB] et [OE] sont de même longueur ce quadrilatère est un losange.

La diagonale [OA'] est donc portée par la médiatrice de la diagonale [BE].

D'autre part, $OB = OE$ et $AB = AE$. La droite (OA) contenant deux points équidistants de B et E est la médiatrice de [BE].

Conclusion : Les droites (OA') et (OA) sont confondues.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont donc colinéaires.

Conséquence, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE} = k\ \overrightarrow{OA}$

Soit $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Pour les mêmes raisons que précédemment, le quadrilatère $OCD'D$ est un losange, d'où, a diagonale [OD'] est donc portée par la médiatrice de la diagonale [CD].

D'autre part, $OC = OD$ et $AC = AD$. La droite (OA) contenant deux points équidistants de C et D est la médiatrice de [CD].

Conclusion : Les droites (OD') et (OA) sont confondues.

Les vecteurs $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont donc colinéaires.

Conséquence, il existe un réel k' tel que $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD} = k'\ \overrightarrow{OA}$

Finalement : $\vec{V} = \overrightarrow{OA} + k\ \overrightarrow{OA} + k'\ \overrightarrow{OA} = (1 + k + k')\ \overrightarrow{OA}$.

$\vec{V}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$.

Méthode : géométrie analytique

Comme $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$

Comme $\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{4\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$

d'où, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}2\times\cos\frac{2\pi}{5}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}2\times\cos\frac{4\pi}{5}\\0\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.

On a donc : $\vec{V}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA}$.

4) On admet, la colinéarité de $\vec{V}$ et de $\overrightarrow{OB}$, ...

Comme $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont deux vecteurs non colinéaires, le seul vecteur colinéaire à tous les vecteurs est le vecteur nul.

d'où, $\vec{V} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE} = \vec{0}$

(On peut écrire $\vec{V} = x\,\overrightarrow{OA} = y\,\overrightarrow{OB}$ par colinéarité avec $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires.

Si on suppose x (ou y) non nul, on obtient : $\overrightarrow{OA} = \frac{y}{x}\ \overrightarrow{OB}$, donc, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires, d'où, la contradiction.

Pour ne pas avoir de contradiction, il faut : $x = y = 0$)

b) Comme d'après le 3/, les coordonnées de $\vec{V}$ sont $\begin{pmatrix}1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}\\0\end{pmatrix}$ et que $\vec{V} = \vec{0}$, on a :

$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$

5a) On sait : $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, d'où, $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$

Dans l'égalité du 4b), il vient alors : $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1) = 0$, soit :

$4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$

Le réel $\cos\frac{2\pi}{5}$ est donc bien **une solution de l'équation** du second degré : $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b) Le solutions de cette équation sont :

$\Delta = 2^2 - 4\times4\times(-1) = 20 = 4\times5$

D'où les solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2\times4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2\times4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Or, $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, d'où, $0 < \cos\frac{2\pi}{5} < 1$

La solution négative n'est pas acceptable.

Conclusion : $\cos \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$