Index

Page 309

Exercice 1) Dans un repère orthonormal ....

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4-2 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, d'où, $AB^2 = (-6)^2 + 4^2 = 52$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où, $AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, d'où, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis : $BC^2 = 8^2 + (-1)^2 = 65$

Comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le triangle ABC est rectangle en A

Exercice 2) Équations de droites

1/ a) Puisque $-3\times 2 - (-3) - 3 = -6$, le point $A(2 ; -3)$ n'appartient pas à la droite d'équation $-3x - y - 3 = 0$

1/b) Puisque $2\times 2 + 4\times(-3) + 9 = 1$, le point $A(2\ ;-3)$ n'appartient pas à la droite d'équation $2x + 4y + 9 = 0$

2) a) Un vecteur directeur de la droite d'équation $2x + 3y - 5 = 0$ est $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

b) Un vecteur directeur de la droite d'équation $3x - y + 1 = 0$ est $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

c) Un vecteur directeur de la droite d'équation $y = 2x + 4$ est $\vec{u_3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

d) Un vecteur directeur de la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$ est $\vec{u_4}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

3) a) Le point $A(2\ ;-3)$ appartient à la droite d'équation $2x + y + c = 0$ si et seulement si $2\times 2 + (-3) + c = 0$.
$c = -1$

b) Le point $A(2\ ;-3)$ appartient à la droite d'équation $-x + 2y + c = 0$ si et seulement si $-2 + 2\times(-3) + c = 0$.
$c = 8$

Exercice 3) Forme canonique

a) $2x^2 + 6x - 3 = 2(x^2 + 3x) - 3$ Or, $x^2 + 3x = (x + \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4}$, d'où,

$2x^2 + 6x - 3 = 2[(x + \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4}] - 3$ Comme $2\times(-\dfrac{9}{4}) - 3 = -\dfrac{15}{2}$

La forme canonique de $2x^2 + 6x - 3$ est $2(x + \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{15}{2}$.

b) $y^2 + 8y + 2 = (y + 4)^2 - 16 + 2$
La forme canonique de $y^2 + 8y + 2$ est $(y + 4)^2 - 14$.

c) $-t^2 + 3t = -(t^2 - 3t)$ Or, $t^2 - 3t = (t - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4}$, d'où,

$-t^2 + 3t = -[(t - \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4}] = -(t - \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{9}{4}$

La forme canonique de $-t^2 + 3t$ est $-(t - \dfrac{3}{2})^2 + \dfrac{9}{4}$

d) $4z(z + 1) + 6 = 4(z^2 + z) + 6$ Or, $z^2 + z = (z + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4}$, d'où,

$4z(z + 1) + 6 = 4[(z + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4}] + 6$

$4z(z + 1) + 6 = 4(z + \dfrac{1}{2})^2 - 1 + 6 = 4(z + \dfrac{1}{2})^2 + 5$

La forme canonique de $4z(z + 1) + 6$ est $4(z + \dfrac{1}{2})^2 + 5$

Exercice 4 Avec la trigonométrie

1) $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ b) $\cos\pi = -1$ c) $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos(-\dfrac{5\pi}{6}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\sin(-\dfrac{\pi}{2}) = -1$ h) $\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ i) $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

2 a) Dans le triangle FLG rectangle en L, d'angle $\widehat{G}$ = 43°, d'hypoténuse $FG = 3$, on a : $FL = FG\times\sin 43°$
$FL = 3\times\sin 43°$ cm
b) L'aire de FGH est $\mathcal{A} = \dfrac{HG\times FL}{2} = 6\times\sin 43°$ cm² puisque $HG = 4$cm.
Une valeur approchée à 0,01 près : 4,09 cm² (Ne pas oublier de mettre la calculatrice en degrés)

Exercice 5) Avec la décomposition des vecteurs
a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (Règle du parallélogramme : $ABCD$ est un parallélogramme)

b) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + (-1)\times \overrightarrow{AD}$ Dans un parallélogramme, une diagonale représente la somme et l'autre la différence des vecteurs représentés par les côtés ....
(Faire une figure à chaque fois pour ne pas inverser le sens des vecteurs)

c) $\overrightarrow{BO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ O est le milieu de [BD], d'où, $\overrightarrow{BO} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$

d) $\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{BC}$ E est le milieu de [AB], d'où, $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$

TP6 page 324
Texte de Descartes en langage actuel :
Si j'ai par exemple : $z^2 = az + bb$, je fais le triangle rectangle NLM dont le côté LM est égal à b racine carrée de la quantité bb, et l'autre LN est $\dfrac{1}{2}a$ la moitié de l'autre quantité connue, qui était multipliée par z que je suppose être la ligne inconnue. Puis prolongeant (*le segment*) MN la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute (*longueur*) OM est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cette sorte :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$$

(Pour Descartes, les nombres négatifs actuels ne sont pas des nombres …)

2) (E) : $z^2 = az + bb$, c'est-à-dire $z^2 - az - b^2 = 0$.

Exemple : $a = 8$ et $b = 6$

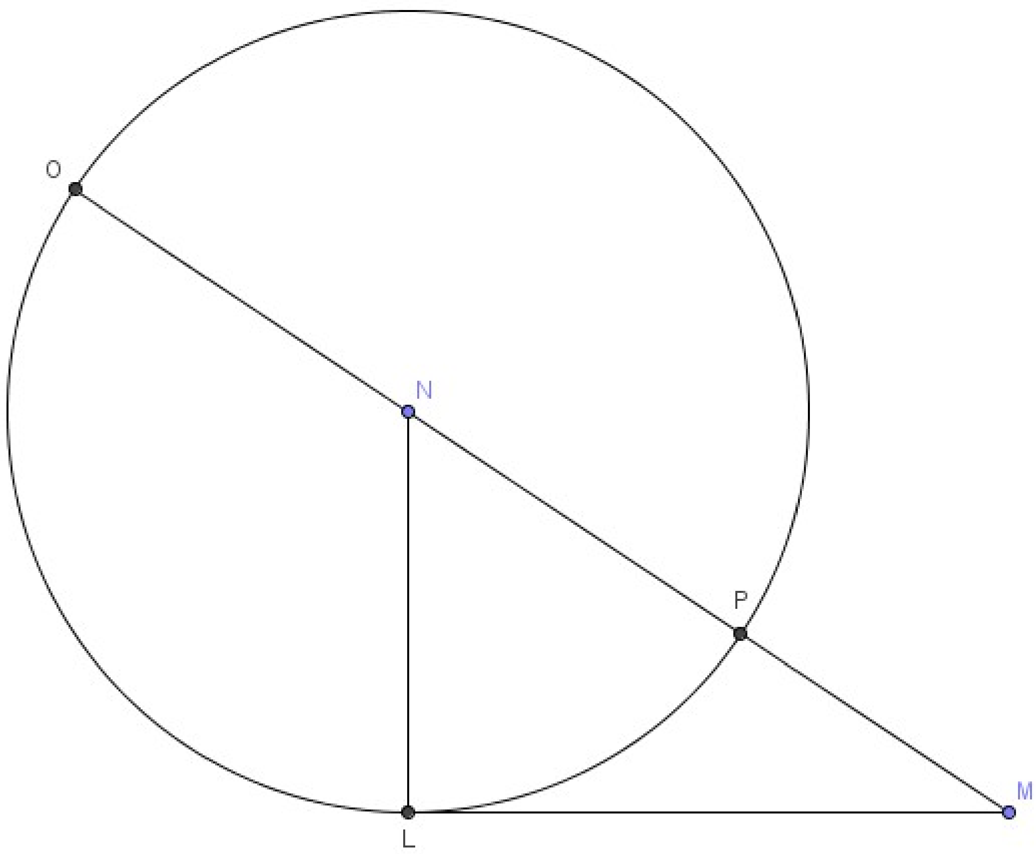
(E) $\Leftrightarrow z^2 - 8z - 36 = 0$

$\Delta = 64 + 144 = 208 = 16\times 13$

La racine positive est : $z = \dfrac{-(-8)+\sqrt{16\times 13}}{2} = 4 + 2\sqrt{13}$. (L'autre racine est : $4 - 2\sqrt{13}$)

Formule donnée par Descartes : $z = \dfrac{1}{2}\times 8 + \sqrt{\dfrac{1}{4}\times 64+36} = 4 + \sqrt{52} = 4 + 2\sqrt{13}$

3) a) Construction :
Construire le triangle rectangle en L avec LM = 6 et LN = 4.
(L'hypoténuse vaut donc $\sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$)



b) Dans l'exemple :
NO = NL = rayon = 4 et M, N, O alignés dans cet ordre, d'où : MO = NO + MN = 4 + 2 $\sqrt{13}$

De façon générale : L'hypoténuse est égale à $\sqrt{\left(\frac{1}{2\,a}\right)^2+b^2}$ et NO = NL = $\frac{1}{2}$ a,

d'où, MO = NO + MN = $\frac{1}{2}$ a + $\sqrt{\frac{1}{4}a^2+b^2}$.

c) $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}$ = $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NO})(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP})$
Or, $\overrightarrow{NO}$ = – $\overrightarrow{NP}$ (N centre du diamètre [OP],
et NO = NP = NL = r, et MN² = ML² + LN² = $b^2 + r^2$
$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}$ = $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NO})(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NO})$ = MN² – NO² = $b^2 + r^2 - r^2 = b^2$.
$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{PO}$ = MO.PO car les vecteurs $\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{PO}$ sont colinéaires de même sens.
Or, PO = $2\times r = a$.
D'où : $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{PO}$ = $a\times$MO
d) Comme $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}$ = $\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OP})$ = $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MO}$ + $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OP}$,
on a : $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MP}$ = MO² + $\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OP}$, soit : b^2 = MO² – $a\times$MO.
Conclusion : MO² =$a\times$MO + b^2
La longueur MO est une solution de l'équation (E).

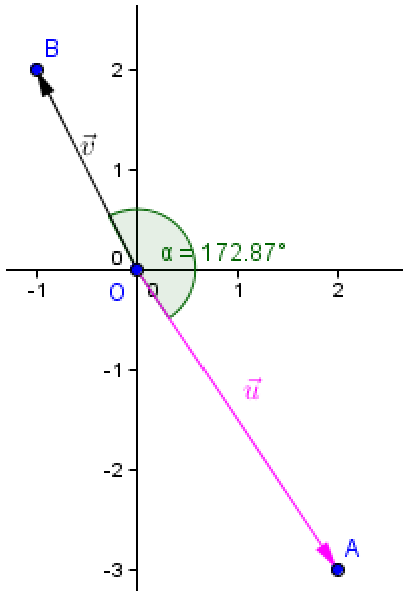
---

16 page 326

a) $\vec{u}$ $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}$ $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ donc : $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = $2\times(-1) + (-3)\times 2 = -8$

Complément : On sait aussi que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = = $\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.cosα où α est une mesure de l'angle formé par les deux vecteurs.

Comme $\| \vec{u} \| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13}$ et $\| \vec{v} \| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$, on a : $\cos\alpha = \dfrac{-8}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \dfrac{-8}{\sqrt{65}}$.



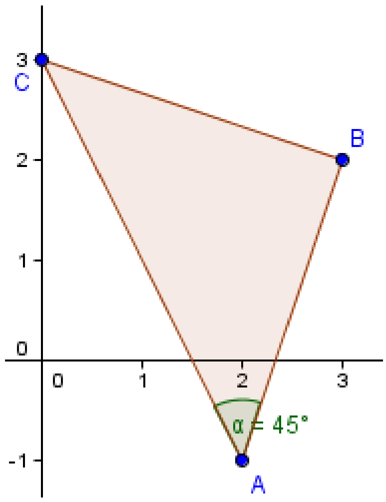
La calculatrice donne : $\alpha \approx 172{,}9°$ à 0,1° près par excès.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ donc : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Complément : les deux vecteurs sont orthogonaux.

17 page 326

$A(2\ ;-1)$, $B(3\ ;2)$ et $C(0\ ;3)$,



d'où : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\2-(-1)\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\3-(-1)\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -3\times2 + 1\times(-4) = -10$

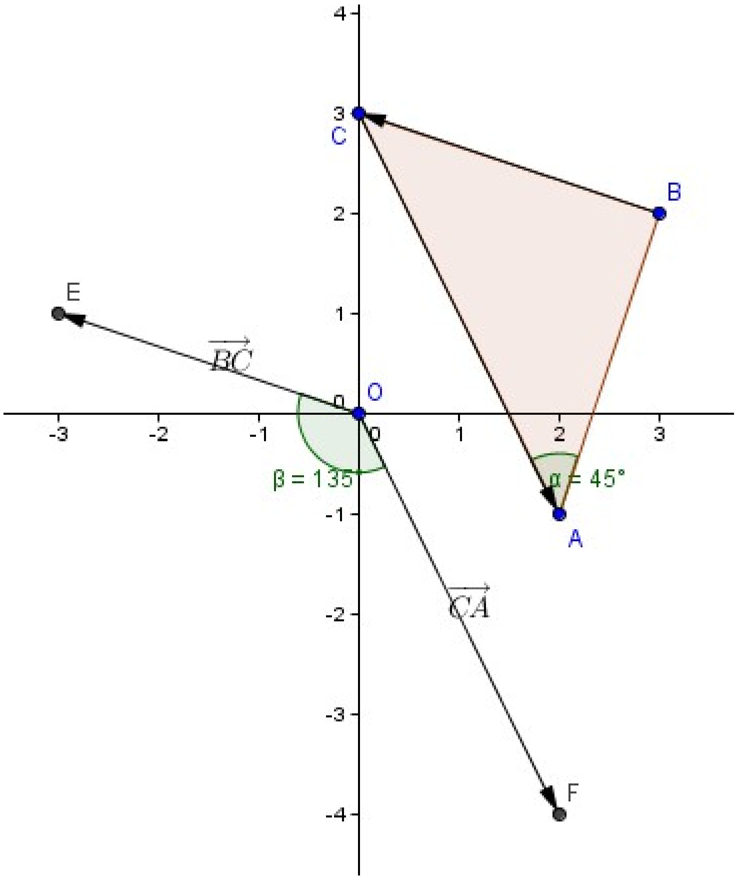
Compléments :

cos $\widehat{BAC} = \dfrac{10}{AB.AC}$ (voir complément de l'exercice 16).

AB = $\sqrt{10}$ et AC = $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, d'où, cos $\widehat{BAC} = \dfrac{10}{2\sqrt{10}\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\widehat{BAC} = 45°$

L'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$ correspond à l'angle formé par les directions de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.



remarque :

On peut évidemment aborder cette figure autrement et montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle et isocèle en calculant les longueurs ….

---

18 page 236

$\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

1 a) $-3\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$, d'où, $\vec{u}\cdot(-3\vec{v}) = -4\times3 + 5\times(-12) = -72$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-4)\times(-1) + 5\times4 = 24$ et $-3\times\vec{u}\cdot\vec{v} = -3\times24 = -72$

b) $2\vec{u} - 3\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$, d'où, $(2\vec{u}-3\vec{v})\cdot\vec{w} = ... = -19$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = -2$ et $\vec{v}\cdot\vec{w} = 5$, d'où, $2\times\vec{u}\cdot\vec{w} - 3\times\vec{v}\cdot\vec{w} = ... = -19$

2) $\vec{w}^{\,2} = \vec{w}\cdot\vec{w} = ... = 13$ $\qquad$ $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, d'où $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ... = 10$

---

21 page 326

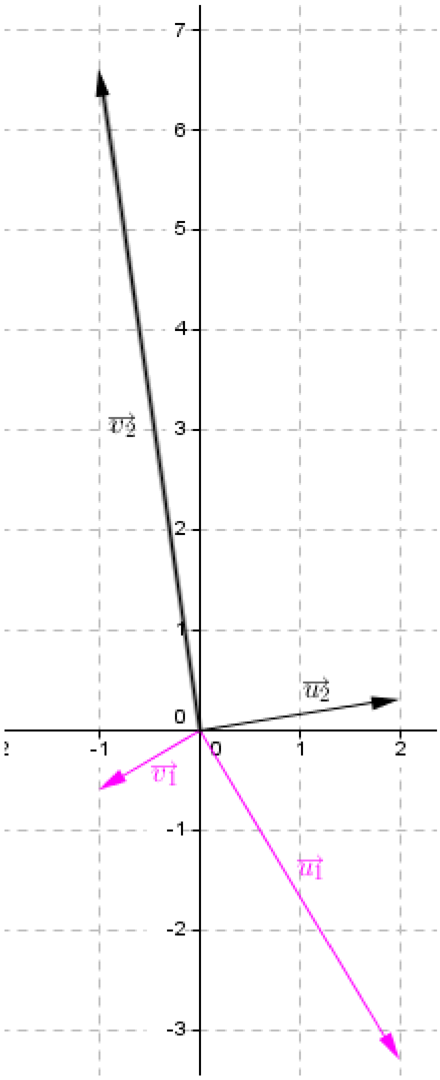
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $-3x + (-1)\times 4 = 0$. $\qquad x = -\dfrac{4}{3}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\x-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2x\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $2\times(-1) + (x-3)(2x) = 0$.

soit : $x^2 - 3x - 1 = 0$ $\qquad$ discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 13$

Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

illustration des deux cas :



---

22 page 326

$A(2\,;\,1)$, $B(6\,;\,-1)$, $C(7\,;\,1)$, $D(3;3)$

1) Le triangle ABC ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Évaluons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 4\times1 + (-2)\times2 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux, donc, le triangle ABC est un triangle rectangle en B. (ou d'hypoténuse $[AC]$).

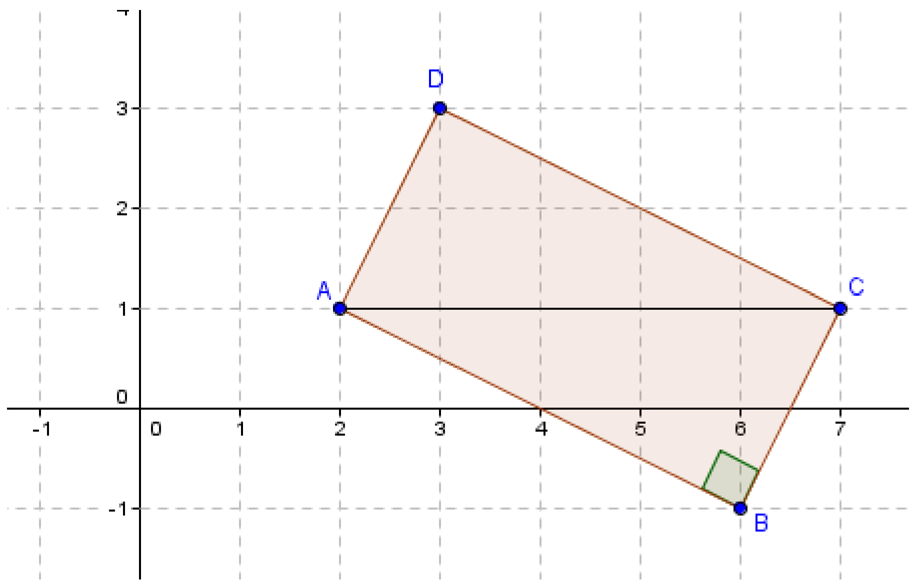
Comme $AB^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$ et que $BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, le triangle n'est pas isocèle.

2) Le quadrilatère $ABCD$?

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Comme $\widehat{ABC}$ est un angle droit, ce parallélogramme est un rectangle.



26 page 326

d: $y = 2x - 5$ et d' : $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$

Le coefficient directeur de d est $m = 2$, d'où, un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Le coefficient directeur de d' est $m' = \dfrac{-1}{2}$, d'où, un vecteur directeur est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{-1}{2}\end{pmatrix}$

Comme $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'} = 1\times1 + 2\times(-\dfrac{1}{2}) = 0$, les vecteurs directeurs de d et d' sont orthogonaux et, par conséquent, les droites d et d' sont perpendiculaires.

2) Le coefficient directeur de d est m , d'où, un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$

Le coefficient directeur de d' est m', d'où, un vecteur directeur est $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$

d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{u'} = 0$

si et seulement si $1\times 1 + mm' = 0$

si et seulement si $mm' = -1$.

Remarque: L'énoncé impose que les deux droites aient un coefficient directeur, d'où, les droites parallèles à l'axe des ordonnées sont exclues de cette étude.

Si $m = 0$, on a une droite d parallèle à l'axe des abscisses.

Dans ce cas, $m' = \lim\limits_{m\to 0}\dfrac{-1}{m} = \pm\infty$. (Ce qui correspond à une droite parallèle à l'axe des ordonnées).

3 a) Une droite perpendiculaire Δ à la droite d'' : $y = -3x + 5$ a pour coefficient directeur : $-\dfrac{1}{-3} = \dfrac{1}{3}$

b) $A(1\ ;\ 2) \in \Delta$, et le coefficient directeur de Δ est $\dfrac{1}{3}$.

Soit $M(x; y) \in \Delta$, on a: $\dfrac{y-y_A}{x-x_A}=\dfrac{1}{3}$, d'où, $y = \dfrac{1}{3}(x-1) + 2 = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

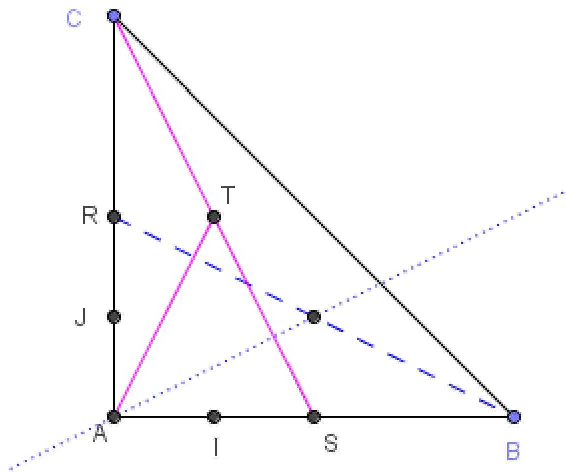
autre méthode:

Une équation d'une droite Δ perpendiculaire à d'' est donc de la forme : $y = \dfrac{1}{3}x + b$.

Comme $A(1\ ;\ 2) \in \Delta$, on a : $2 = \dfrac{1}{3}x + b$, soit : $b = \dfrac{5}{3}$.

$\Delta : y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{3}$.

27 page 327



1 a) Par construction $(AI) \perp (AJ)$ et $AI = AJ = 1$, donc, (A, I, J) est un repère orthonormal.

b) $A(0; 0)$, $B(4, 0)$, $C(0; 4)$, $R\left(\frac{0+0}{2};\frac{0+4}{2}\right) = (0; 2)$, $S\left(\frac{0+4}{2};\frac{0+0}{2}\right) = (2; 0)$ et $T\left(\frac{2+0}{2}:\frac{0+4}{2}\right) =(1; 2)$

2) $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$, donc, $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BR} = 1\times(-4) + 2\times2 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{BR}$ sont donc orthogonaux.

La droite (AT), étant perpendiculaire à la droite (BR) est la hauteur issue de A dans le triangle ABR.

Remarque:

De même la hauteur issue de A du triangle ACS coupe $[BR]$ en son milieu.

---

31 page 327

Deux méthodes:

Méthode 1:

d étant la droite passant par $A(x_A; y_A)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, un point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

Méthode 2:

Sachant que $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d, une équation de d est de la forme $ax + by + c = 0$

Comme $A \in d$, les coordonnées de A vérifient cette équation.

Applications:

1) $A(1; -2)$, $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Méthode 1 :

$M(x; y) \in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où : $1\times(x-1)+(-1)(y+2)=0$

Une équation de d est : $x-y-3=0$

Méthode 2 :

$\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ étant un vecteur normal de d, $x-y+c=0$ est une équation de d.

Comme $A \in d$, $1-(-2)+c=0$, d'où, $c=-3$

Une équation de d est : $x-y-3=0$

Remarque :

La vérification graphique est immédiate lorsque les coefficients sont entiers :

On place le point A.

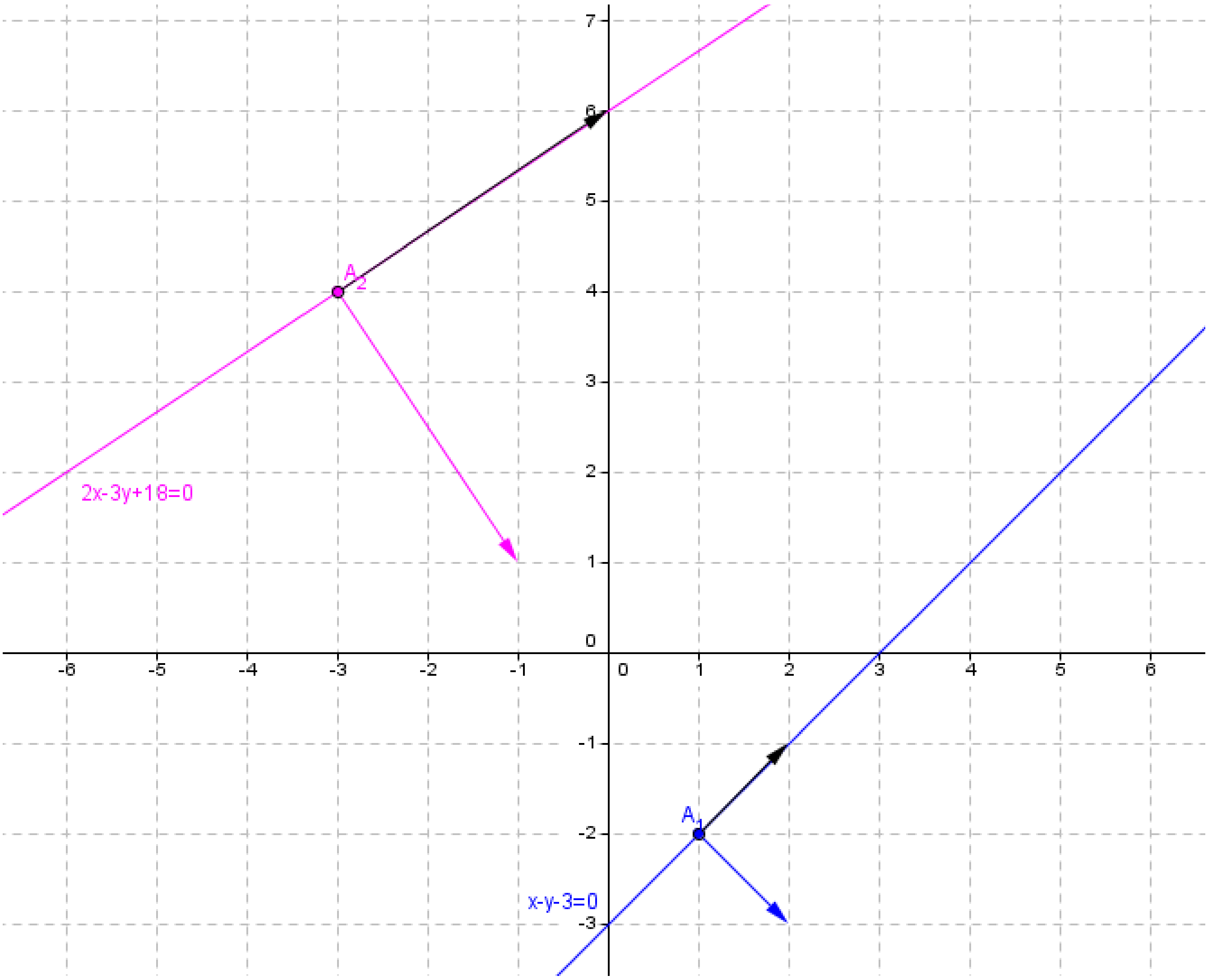
On fait apparaître le vecteur normal $\vec{n}$, un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et,

on vérifie l'ordonnée à l'origine (si $x=0$, $y=-3$)

2) $A(-3\,;\,4)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On trouve : Une équation de d est : $2x-3y+18=0$

(Ordonnée à l'origine : si $x=0$, $y=6$)



32 page 327 hauteurs et orthocentre

$A(0 ; 2)$, $B(4 ; 1)$, $C(3 ; 4)$

Comme la hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A, on applique les méthodes du numéro précédent.

1) La hauteur issue de A est la droite passant par $A(0 ; 2)$ de vecteur normal $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une équation est : $-(x-0)+3(y-2)=0$, d'où, $-x+3y-6=0$ est une équation de la hauteur issue de A.

La hauteur issue de B est la droite passant par $B(4 ; 1)$ de vecteur normal $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

d'où, $3x+2y-14=0$ est une équation de la hauteur issue de B.

2) Les coordonnées du point H intersection de ces hauteurs sont les solutions du système :

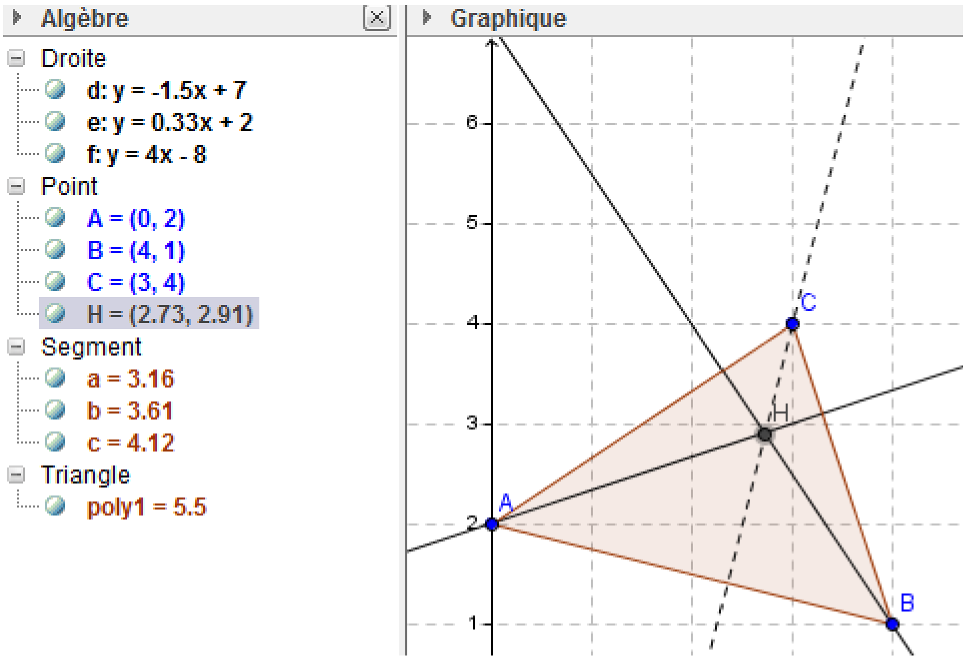
$\begin{cases} -x+3y-6=0 \\ 3x+2y-14=0 \end{cases}$. On trouve $H\left(\frac{30}{11} ; \frac{32}{11}\right)$.

3) $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} \frac{-3}{11} \\ \frac{-12}{11} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $\frac{-3}{11} \times 4 + \left(\frac{-12}{11}\right) \times (-1) = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

(*CH*) est la troisième hauteur du triangle. *H* est l'orthocentre de ce triangle.

Vérification avec GeoGebra :



33 page 327

La méthode utilisée pour le n°32 s'applique à toutes droites **perpendiculaires** à …. **passant par** ….

1) La médiatrice de [AB] est la perpendiculaire à (AB) en C′ milieu de [AB]

A(–1 ; 2), B(0, –3), d'où, C′ ($\frac{-1}{2}$; $\frac{-1}{2}$) et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Une équation de la médiatrice de [AB] est : $(x + \frac{1}{2}) - 5(y + \frac{1}{2}) = 0$, soit : $x - 5y - 2 = 0$

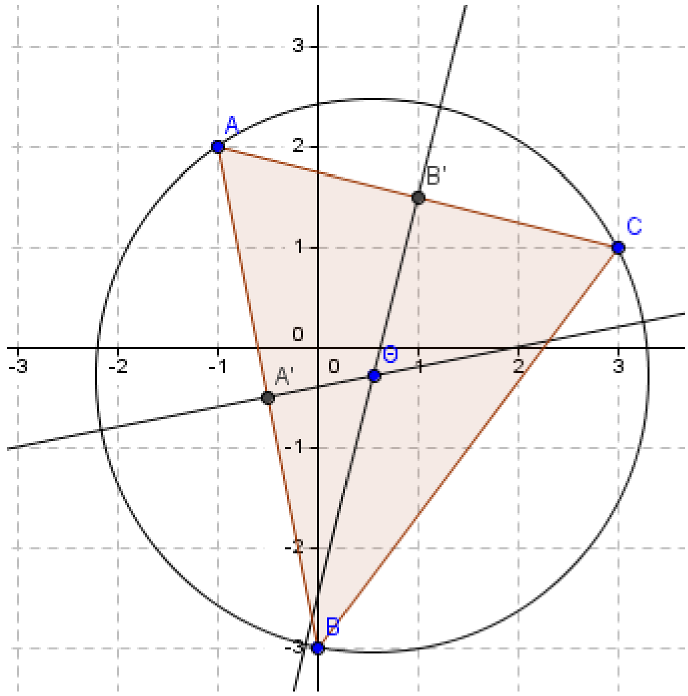
2) La médiatrice de [AC] est la perpendiculaire à (AC) en B′ milieu de [AC]

A(–1 ; 2), C(3 ; 1), d'où, B′ (1 ; $\frac{3}{2}$) et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une équation de la médiatrice de [AC] est : soit : $4x - y - \frac{5}{2} = 0$

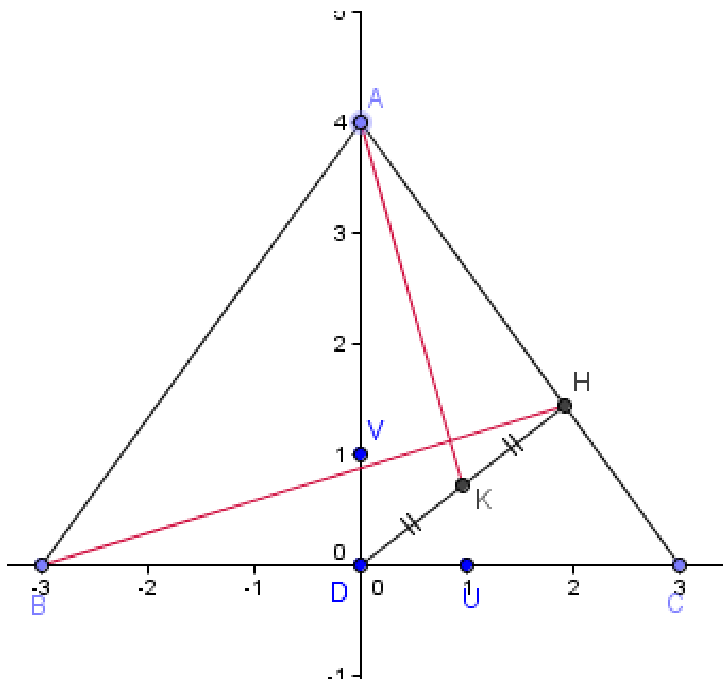
3) Le centre Ω du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices

Résolution du système : $\begin{cases} x - 5y - 2 = 0 \\ 4x - y - \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$ On trouve $\Omega(\frac{21}{38} ; -\frac{11}{38})$



36 page 328

ABC est un triangle isocèle en *A* tel que *AB* = 5 et *BC* = 6.



D est le milieu de [*BC*] et *H* le pied de la hauteur issue de *D* dans le triangle *ADC*, et, *K* le milieu de [*DH*].

U point de [*DC*] et *V* point de [*DA*] tel que $DU = DV = 1$

1) La médiane issue de *A* dans le triangle isocèle de base [*BC*] est aussi la médiatrice du segment [*BC*].

On a donc : $(DC) \perp (DA)$ et $DU = DV = 1$.

(D, U, V) définit ainsi un repère orthonormé.

2) Le théorème de Pythagore appliqué au triangle *ABD* rectangle en *D* donne : $DA^2 = 25 - 9 = 16$, soit : $DA = 4$

Dans ce repère : $C(3\ ;\ 0)$ et $(A(0\ ;\ 4)$, d'où : $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

(DH) est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{CA}$ passant par D, d'où,

$M(x\ y) \in (DH)$ si et seulement si $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$

Soit : $-3x + 4y = 0$ est une équation de (DH).

3) H est le point d'intersection de (DH) et de (AC).

Une équation de (AC) est de la forme : $4x + 3y + c = 0$

Comme $C(3\ ;\ 0) \in (AC)$, on obtient : $4\times3 + c = 0$

$c = -12$

Les coordonnées de H sont les solutions du système : $\begin{cases}-3x+4y=0\\4x+3y-12=0\end{cases}$

Par combinaison linéaire, il vient : $4(-3x + 4y) + 3(4x + 3y - 12) = 4\times0 + 3\times0 = 0$

Soit : $25y = 36$ $\quad y = \dfrac{36}{25}$ et $x = \dfrac{4\times36}{3\times25} = \dfrac{48}{25}$

$H\left(\dfrac{48}{25}\ ;\ \dfrac{36}{25}\right)$

Comme K est le milieu de $[DH]$, on obtient : $K\left(\dfrac{24}{25}\ ;\ \dfrac{18}{25}\right)$

4) $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\dfrac{75}{68}\\\dfrac{45}{68}-5\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}\dfrac{75}{68}\\\dfrac{-295}{68}\end{pmatrix}$ et, $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\dfrac{75}{34}-(-3)\\\dfrac{45}{34}\end{pmatrix}$, soit : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\dfrac{177}{34}\\\dfrac{45}{34}\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}\dfrac{24}{25}\\\dfrac{18}{25}-4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\dfrac{24}{25}\\\dfrac{-82}{25}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\dfrac{48}{25}-(-3)\\\dfrac{36}{25}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\dfrac{123}{25}\\\dfrac{36}{25}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BH} = \frac{24}{25}\times\frac{123}{25} + \left(\frac{-82}{25}\right)\times\frac{36}{25} = \frac{24\times123-82\times36}{25^2} = \frac{8\times3\times3\times41-2\times41\times9\times4}{25^2} = 0$$

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BH}$ étant nul, les vecteurs sont orthogonaux.

Conclusion : Les droites (AK) et (BH) sont perpendiculaires.

Remarque :

On peut généraliser en posant, $BC = 2a$ et $DA = b$.

$D(0\ ;\ 0)$, $C(a\ ;\ 0)$, $A(0\ ;\ b)$, $B(-a\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ et donc : $(DH) : -ax + by = 0$

et $(AC) : bx + ay - ab = 0$

$H:\begin{cases}-ax+by=0\\ bx+ay-ab=0\end{cases}$, d'où, $(b^2+a^2)y=a^2b$, soit : $y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$ et $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$ $H\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}\ ;\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$

$K\left(\dfrac{ab^2}{2(a^2+b^2)}\ ;\ \dfrac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right)$

$\overrightarrow{AK}\begin{cases}\dfrac{ab^2}{2(a^2+b^2)}\\ \dfrac{a^2b}{2(a^2+b^2)}-b\end{cases}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{cases}\dfrac{ab^2}{(a^2+b^2)}+a\\ \dfrac{a^2b}{(a^2+b^2)}\end{cases}$

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BH}=\frac{ab^2(ab^2+a(a^2+b^2))+(a^2b-2b(a^2+b^2))a^2b}{2(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2b^2(b^2+a^2+b^2+a^2-2a^2-2b^2)}{2(a^2+b^2)^2}=0$$

---

37 page 328

1) $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(2;-4)$ et de rayon $r=2$ a pour équation: $(x-2)^2+(y+4)^2=2^2$

2) Si $x=3$, l'ordonnée est une solution de l'équation du second degré d'inconnue y: $(3-2)^2+(y+4)^2=2^2$

On a donc: $(y+4)^2=3$, soit: $y+4=-\sqrt{3}$ ou $y+4=\sqrt{3}$

Il existe deux points de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3: $A(3;-4-\sqrt{3})$ et $B(3;-4+\sqrt{3})$

---

39 page 328

Méthode :

On connaît les coordonnées des points A et B qui forment un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

Pour tout point M de $\mathscr{C}$, on a : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ (voir cours)

On pose x et y les coordonnées de M, et on calcule le produit scalaire :

Applications :

1) A(10 ; 7) et B(4 ; –1)

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-10\\ y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\ y+1\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=(x-10)(x-4)+(y-7)(y+1)$

Une équation de $\mathscr{C}$ est : $(x-10)(x-4)+(y-7)(y+1)=0$

En développant : $x^2+y^2-14x-6y+33=0$

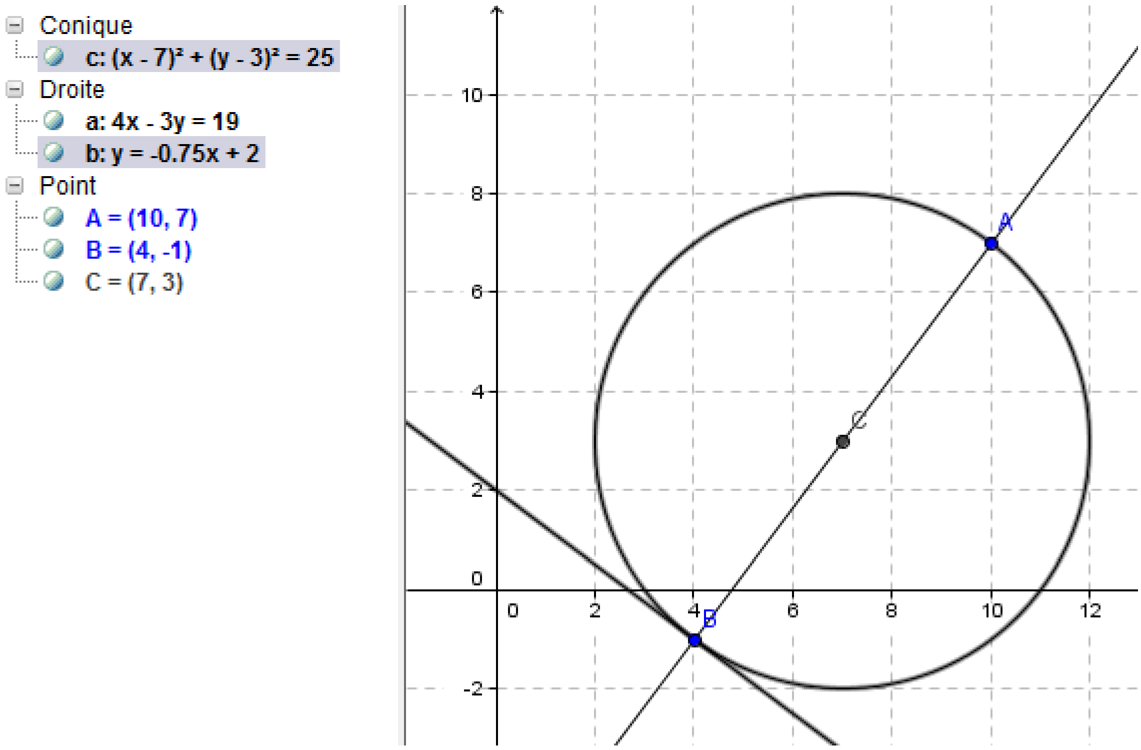
Sous forme canonique : $(x-7)^2+(y-3)^2=25$ (Le centre C(7 ; 3) et le rayon 5).

2) la tangente T à $\mathscr{C}$ au point B est la perpendiculaire à (AB) passant par B (voir n°s 32 et 33) .

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\ -8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-4\\ y+1\end{pmatrix}$

$-6(x-4)-8(y+1)=0$ (On peut réduire en divisant par -2)

Une équation de T est : $3x+4y-8=0$



42 page 328

Méthode : Reconnaître une équation de courbe (connue …) Voir aussi n° 43.

a) $x^2 + y^2 - 3y = 0$

Forme canonique : $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

E est le cercle de centre $\Omega(0\ ;\ \frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$.

b) $x^2 + y^2 - 4x + 8 = 0$

Forme canonique : $(x-2)^2 - 4 + y^2 + 8 = 0$, soit ; $(x-2)^2 + y^2 = -4$

La somme de deux carrés n'est jamais strictement négative.

E est l'ensemble vide (E = $\varnothing$)

43 page 328

a) $2x - 5y + 3 = 0$ est une équation de la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, passant par $A(1\ ;\ 1)$.

b) $x^2 - y + 3x - 4 = 0$ équivaut à $y = x^2 + 3x - 4$.

On a une équation de la parabole $\mathscr{P}$ de sommet $S(-\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{25}{4})$ passant par …..

c) $2x^2 + 4y - 1 = 0$ si et seulement si $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$

On a une équation de la parabole $\mathscr{P}'$ de sommet S'(0 ; $\frac{1}{4}$) passant par …..

d) $x^2 + y^2 - 6y - 4 = 0$ si et seulement si $x^2 + (y - 3)^2 = 13$

On a une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(0 ; 3)$ et de rayon $\sqrt{13}$.

---

45 page 328

1) $\mathscr{C}$ d'équation: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 20$ est le cercle de centre $\Omega(6; 3)$ et de rayon $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
$\mathscr{C}'$ d'équation $x^2 + y^2 = 5$ est le cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon $\sqrt{5}$.
2) a) Les coordonnées de $E(2; 5)$ vérifient l'équation de $\mathscr{C}$: $(2 - 6)^2 + (5 - 3)^2 = 16 + 4 = 20$, et,
celles de $F(1; -2)$ vérifient l'équation de $\mathscr{C}'$: $1^2 + (-2)^2 = 5$.

b) Il semble que les deux cercles sont tangents.
3 a) Un point $M(x; y)$ appartient à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ si et seulement si les coordonnées $(x; y)$ sont solutions du système:

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2=20\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$

Le point sur les méthodes (logique) :

Par équivalences

Dans ce cas, on s'assure que la ou les solutions du système initial sont la ou les solutions du système déduit et réciproquement.
On s'interroge donc à chaque étape pour savoir si on peut " remonter " dans la démarche ...

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2=20\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2-(x^2+y^2)=20-5\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$ *(ainsi, si la deuxième équation est vraie, la première est vraie)*

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2-(x^2+y^2)=20-5\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-12x+36+y^2-6y+9-x^2-y^2=15\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12x-6y+30=0\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$

(les équivalences sont assurées car on remplace par calculs algébriques une expression par une expression égale et on retranche 15 aux deux membres de la première équation ....)

$$\begin{cases}-12x-6y+30=0\\ x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+y-5=0\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$ *(L'équivalence est assurée car on a factorisé par –6 puis diviser par –6 qui est non nul tous les membres de la première équation).*

Remarque: *2x + y – 5 = 0 est une équation de droite.*

Conséquence pour la suite de l'exercice : Si on résout le système final, la ou les solutions de ce système sont celles du système initial.

Par implications :

Dans ce cas, on a : si un réel est solution du premier système alors il est aussi solution du denier système ....
(mais, on peut avoir d'autres solutions au dernier système qui ne sont pas solutions du système initial)

$$\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2=20\\ x^2+y^2=5\end{cases}$$

On **en déduit** par différence des deux équations: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 - x^2 - y^2 = 20 - 5$
soit: $-12x + 36 - 6y + 9 = 15$
En divisant tous les termes par –6: $2x + y - 5 = 0$. *(calculs algébriques analogues aux calculs précédents)*

Remarque: $2x + y - 5 = 0$ est une équation de droite.

On a montré que **si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont des points communs**, ces points sont sur cette droite.
On ne sait pas encore à ce stade de la démonstration que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont des points communs.

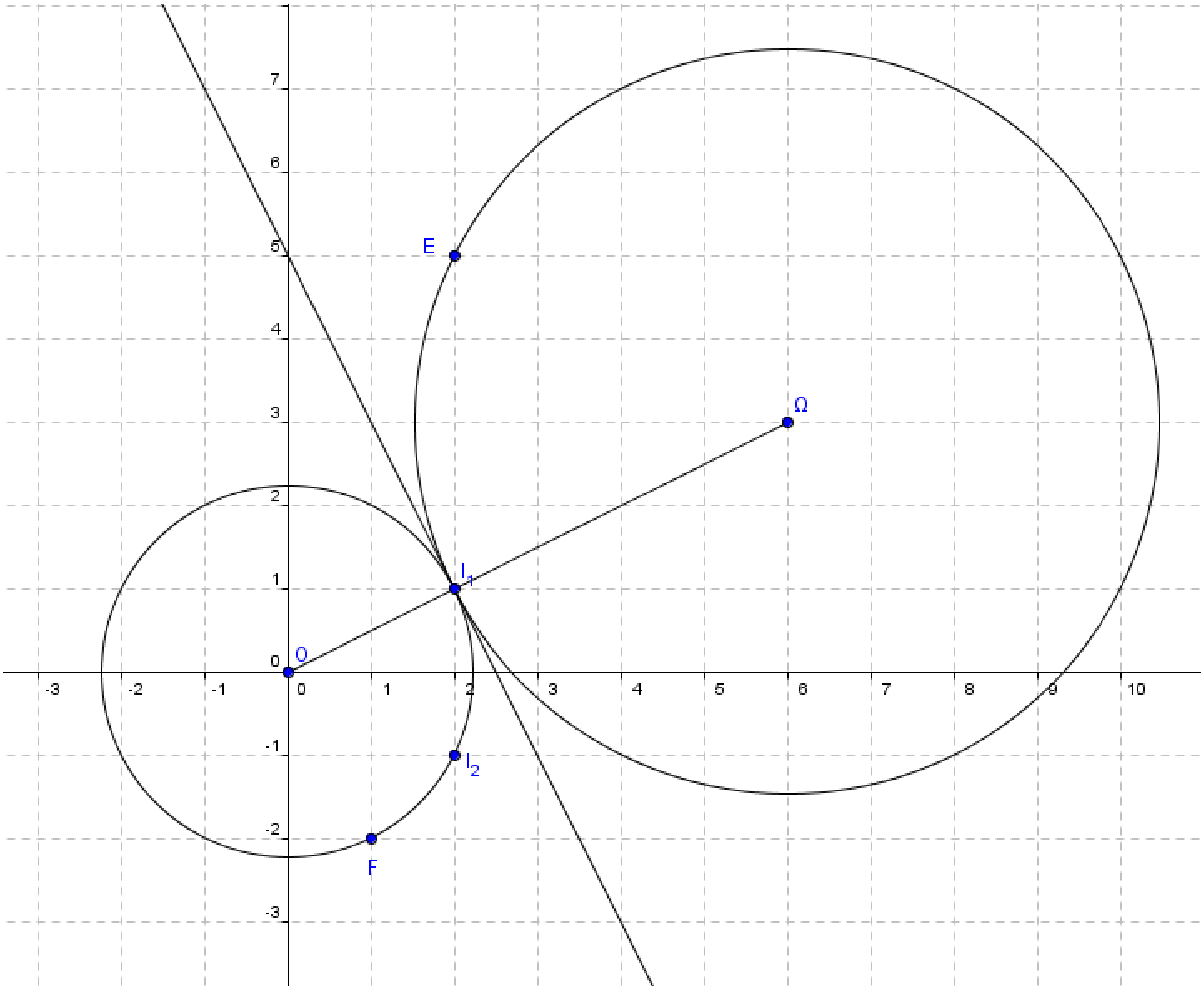
b) ***Résolution du système*** $\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+(-2x+5)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+5 \\ 5x^2-20x+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+5 \\ 5(x-2)^2=0 \end{cases}$

Ce denier système a un et un seul couple solution : $x = 2$ et $y = -2\times 2 + 5 = 1$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un et un seul point commun le point $I(2; -1)$.

Dans le cas où on a procédé par implications, il faut s'assurer que les solutions sont valides :
Par exemple :
$2x + y - 5 = 0$ si et seulement si $y = -2x + 5$
En substituant dans l'équation de $\mathscr{C}'$, il vient: $x^2 + (-2x + 5)^2 = 5$, soit: $5x^2 - 20x + 20 = 0$
En divisant tous les termes par 5: $x^2 - 4x + 4 = 0$, soit $(x - 2)^2 = 0$
$x = 2$, et, $y^2 = 5 - 4 = 1$. (dans l'équation de $\mathscr{C}'$)
Deux points possibles: I_1 (2; –1) et I_2 (2; 1)
Dans l'équation de $\mathscr{C}$: $(2 - 6)^2 + (-1 - 3)^2 = (-4)^2 + (-4)^2 = 32$, donc, $I_1 \notin \mathscr{C}$.
$(2 - 6)^2 + (1 - 3)^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 20$, donc, $I_2 \in \mathscr{C}$.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un et un seul point commun le point $I(2; -1)$.

c) On a: $\overrightarrow{O\Omega} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de Δ: $2x + y - 5 = 0$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Comme $\overrightarrow{O\Omega}\cdot\vec{u} = 6\times(-1) + 3\times 2 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{O\Omega}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
Δ est la tangente commune aux deux cercles en I.
$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents au point $I(2; -1)$.

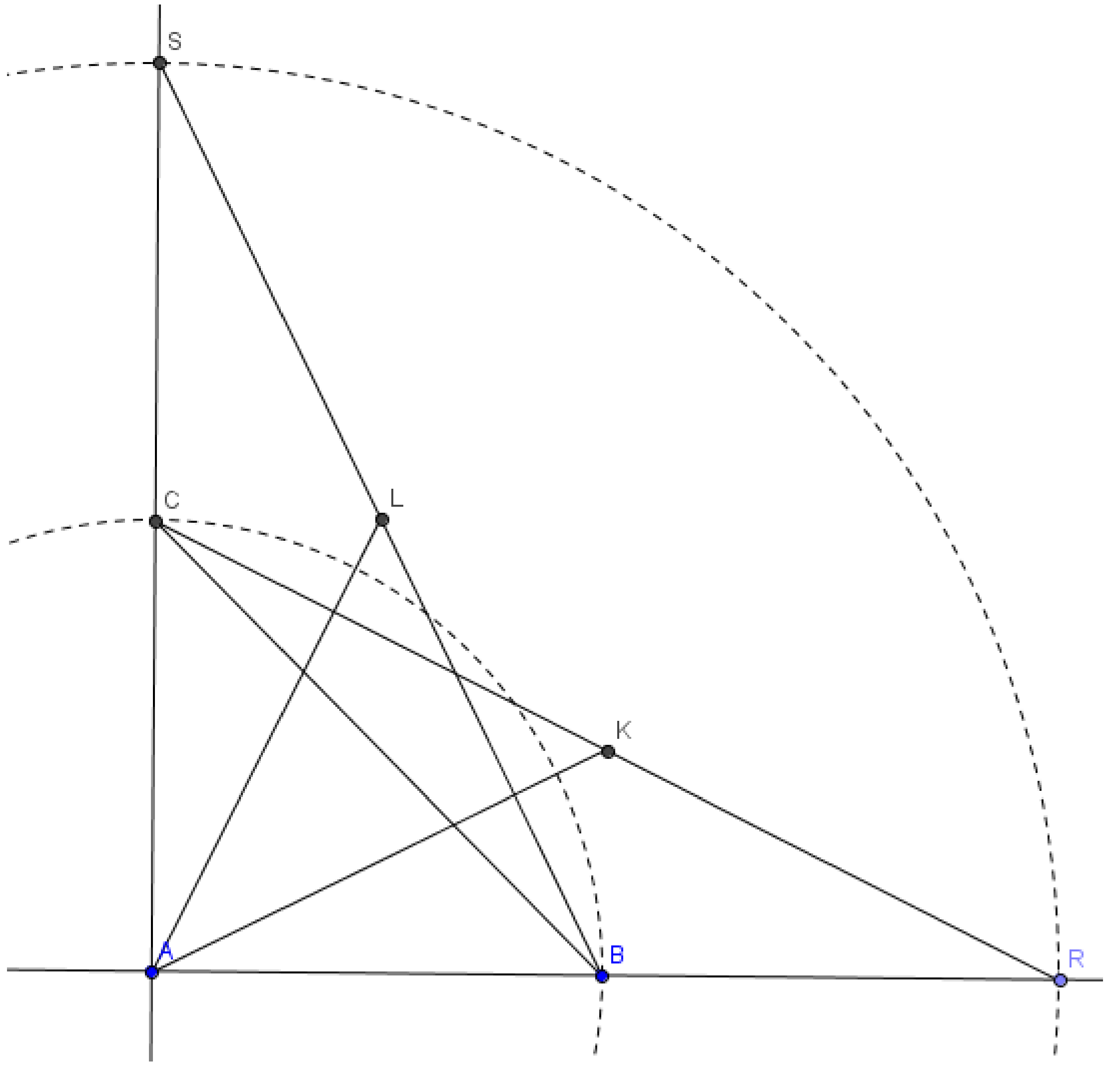


52 page 329

ABC triangle isocèle rectangle en A.

R est un point de la demi-droite]AB) et S est un point de la demi-droite]AB) tels que AR = AS.

K est le milieu de [CR] et L celui de [BS].



1 a) Conjecture :

La droite (AL) médiane du triangle ABS semble être la hauteur du triangle ACR, et la droite (AK) médiane du triangle ACR semble être la hauteur du triangle ABS.

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR} = \left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}\right)+\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KR}\right)$,

or, K est le milieu de [CR], d'où, $\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KR} = \vec{0}$.

Conclusion : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR} = 2\ \overrightarrow{AK}$.

On a donc : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AR}$.

c) $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB}$ (Relation de Chasles).

d) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BS} = (\frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AR})(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB})$

$$= \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS} - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS} - \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires de même sens, d'où, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS} = AC\times AS$.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux, d'où $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont orthogonaux, d'où $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AS} = 0$.

$\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens, d'où, $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AB} = AR\times AB$.

ABC étant isocèle en A, AB = AC, et, on a d'après les données de construction : AS = AR.

Finalement : $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BS} = \frac{1}{2}AC\times AS - \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}AR\times AB.$

$= 0$

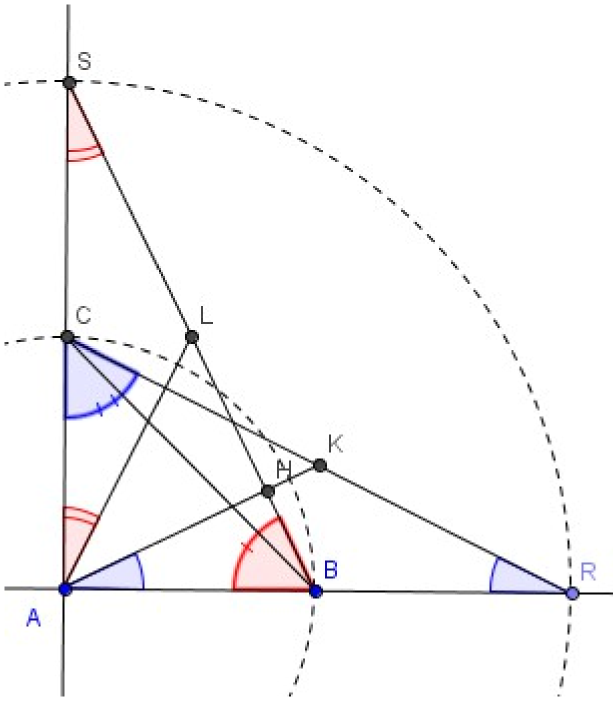
Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont orthogonaux, donc, la droite (AK) est la hauteur du triangle ABS.

2) La même démarche s'applique à $\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{CR}$ en remplaçant K par L, B par C et S par R.

$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{CR} = 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{CR}$ sont orthogonaux, donc, la droite (AL) est la hauteur du triangle ACR.

3) ***Une autre méthode*** : avec les angles



Notons H le point d'intersection de (AK) et (BS), et montrons que les angles $\widehat{BAK}$ et $\widehat{ABS}$ sont complémentaires.

Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse vaut la moitié de l'hypoténuse.

Ainsi, $AL = \frac{BS}{2} = SL = LB$.

Le triangle ALS est isocèle en L, et, par conséquent : $\widehat{SAL} = \widehat{ASL}$.

$\widehat{ASL} = \widehat{ASB}$ (puisque L milieu de [BS])

Comme ABS est rectangle en A, on a : $\widehat{ABS} + \widehat{ASB} = 90°$.

Les angles $\widehat{\text{ABS}}$ et $\widehat{\text{ASB}}$ sont complémentaires.

Conséquence n° 1 : Les angles $\widehat{\text{ABS}}$ et $\widehat{\text{SAL}}$ sont complémentaires.

De même dans le triangle AKR isocèle en K, on a : $\widehat{\text{KAR}} = \widehat{\text{ARK}} = \widehat{\text{BAK}}$ et, dans le triangle ARC, on a : $\widehat{\text{ARC}} + \widehat{\text{RCA}} = 90°$.

Les angles $\widehat{\text{ARC}}$ et $\widehat{\text{RCA}}$ sont complémentaires.

Conséquence n° 2 : Les angles $\widehat{\text{BAK}}$ et $\widehat{\text{RCA}}$ sont complémentaires.

Les triangles ARC et ASB sont superposables puisque AR = AS, AC = AB et $\widehat{\text{RAC}} = \widehat{\text{SAB}}$ (= 90°)

Conséquence n° 2 : Les angles $\widehat{\text{RCA}}$ et $\widehat{\text{ABS}}$ sont égaux.

D'après les conséquences 1, 2 et 3, on a : $\widehat{\text{BAK}}$ et $\widehat{\text{ABS}}$ sont complémentaires.

Conclusion : dans le triangle AHB, l'angle $\widehat{\text{AHB}} = 180° - (\widehat{\text{BAK}} + \widehat{\text{ABS}}) = 90°$

Une autre méthode : Dans un repère orthonormal

Choix du repère : $(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}})$ est un repère orthonormé puisque $\widehat{\text{BAC}} = 90°$ et AB = AC.

Coordonnées des points :

On pose R(r ; 0), d'où, S(0 ; r) par construction des points R et S.

K $\begin{cases} x_{\text{K}} = \dfrac{r+0}{2} \\ y_k = \dfrac{0+1}{2} \end{cases}$ et L $\begin{cases} x_{\text{L}} = \dfrac{1+0}{2} \\ y_{\text{L}} = \dfrac{0+r}{2} \end{cases}$ K($\dfrac{r}{2}$; $\dfrac{1}{2}$) et L($\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{r}{2}$)

$\overrightarrow{\text{AK}} \begin{pmatrix} \dfrac{r}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BS}} \begin{pmatrix} 0-1 \\ r-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ r \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\text{AK}} \cdot \overrightarrow{\text{BS}} = -1 \times \dfrac{r}{2} + \dfrac{1}{2} \times r = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{BS}}$ sont orthogonaux.

La droite (AK) est perpendiculaire à (BS).

$\overrightarrow{\text{AL}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{r}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{RC}} \begin{pmatrix} -r \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{AL}} \cdot \overrightarrow{\text{RC}} = \ldots = 0$

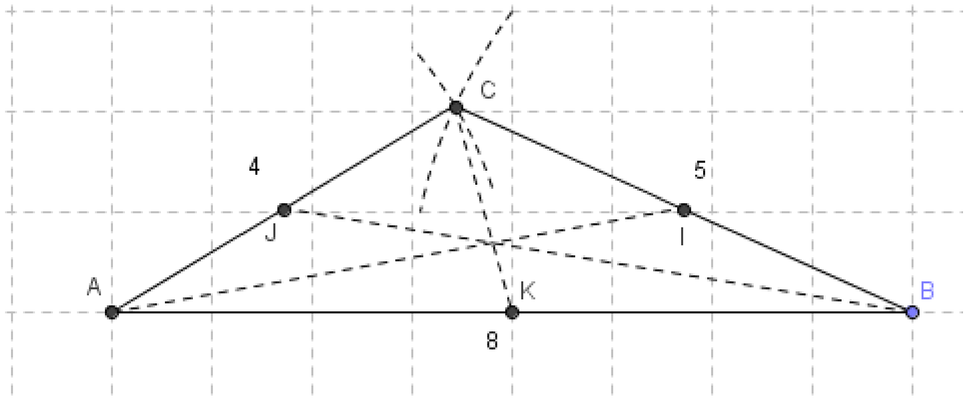
Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AL}}$ et $\overrightarrow{\text{RC}}$ sont orthogonaux.

La droite (AL) est perpendiculaire à (RC).

59 page 330

Donner un nom aux médianes et appliquer le théorème de la médiane :

I, étant le milieu de $[AB]$, pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$



$AB = 8$, $AC = 4$ et $BC = 5$

Médiane issue de A : AI

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$, d'où, $AI^2 = \dfrac{64+16-\frac{25}{2}}{2} = \dfrac{135}{4} = \dfrac{9\times 15}{4}$ $\quad AI = \dfrac{3}{2}\times\sqrt{15}$.

Médiane issue de B : BJ

$BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$, d'où, $BJ^2 = \dfrac{64+25-8}{2} = \dfrac{81}{2}$ $\quad BJ = \sqrt{\dfrac{81}{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

Médiane issue de C : CK

$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \frac{1}{2}AB^2$, d'où, $CK^2 = \dfrac{16+25-32}{2} = \dfrac{9}{2}$ $\quad CK = \sqrt{\dfrac{9}{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

---

60 page 330 lieux de points

Vocabulaire :

Lorsque dans une figure géométrique, on cherche l'ensemble des points vérifiant une proposition, cet ensemble est le **lieu du point**. (Dans cet exercice, le lieu du point M vérifiant $MA^2 + MB^2 = 20$ sera le cercle ….)

Quand la proposition fait intervenir une fonction qui, à ce point M (variable), associe un nombre, on parle aussi de **ligne de niveau**.

L'exemple que vous connaissez bien est celui concernant les lignes de niveau sur une carte :

l'ensemble des points à l'altitude 100 m est la ligne de niveau 100 m sur la carte.

A tout point de la carte, on associe l'altitude : f : M $\mapsto$ altitude

L'ensemble des points M (ensemble des antécédents) tels que f(M) = 100 est cette ligne de niveau.

Dans cet exercice : Soit la fonction g : M $\mapsto$ $MA^2 + MB^2$

la ligne de niveau 20 est le cercle ….

Méthode :

Penser à utiliser le carré scalaire : en remplaçant le carré d'une longueur par le carré scalaire des vecteurs afin d'utiliser la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs en somme de vecteurs …

Repérer les points particuliers, les projetés orthogonaux, les points alignés …

Le milieu d'un segment est souvent utile …

Énoncé :
Soit le segment $[AB]$ de longueur 4 et de milieu I. (Points fixes).

M est un point du plan. (Point variable)

On sait : (***théorème de la médiane***) Pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Rappel de la démonstration :

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$ (nécessaire pour utiliser les vecteurs ...)

$= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$ (car, l'égalité, pour tout M, $MA = MI + IA$ est fausse …)

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

Or, $\overrightarrow{MI}^2 = MI^2$, et , I étant le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $IA = IB = \frac{AB}{2}$.

$MA^2 + MB^2 = MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ puisque $2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) = 0$

Retour à l'exercice :

$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 20$ Or, $AB^2 = 16$

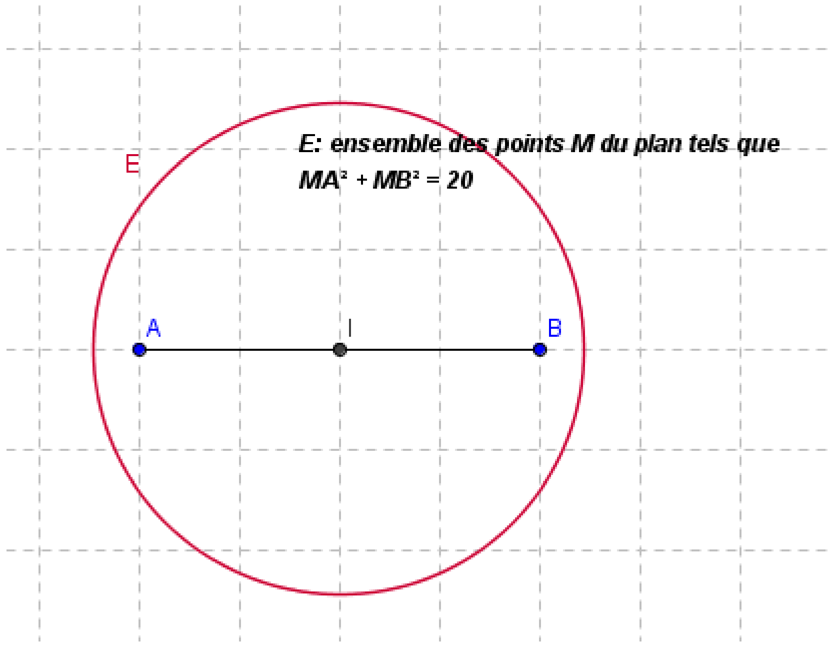
$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2MI^2 + 8 = 20$

$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow MI^2 = 6$ Or, $MI \geqslant 0$ (longueur)

$MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow MI = \sqrt{6}$

Conclusion :

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.



Compléments :

Soit k un réel, on cherche l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$. AB = 4

On a donc : $2MI^2 = k - 8$.

Conclusion : si $k < 8$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est l'ensemble vide. $\mathcal{E}_k = \varnothing$

Si $k = 8$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon 0 ($MI^2 = 0$, d'où, $MI = 0$).

Si k = 16 alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon 2 ($MI^2 = 4$, d'où, $MI = 2$).

l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de diamètre [AB]

Si $k \geqslant 8$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-8}{2}}$ ($MI^2 = \dfrac{k-8}{2}$)

---

64 page 330 Ensemble ou lieu de points

(Voir présentation au n° 60)

Énoncé :

Soit le segment [AB] de longueur 2 et de milieu I. (Points fixes).

M est un point du plan. (Point variable).

Comme I est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$$

Or, $IA = \dfrac{AB}{2}$, d'où, $IA^2 = \dfrac{AB^2}{4}$.

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

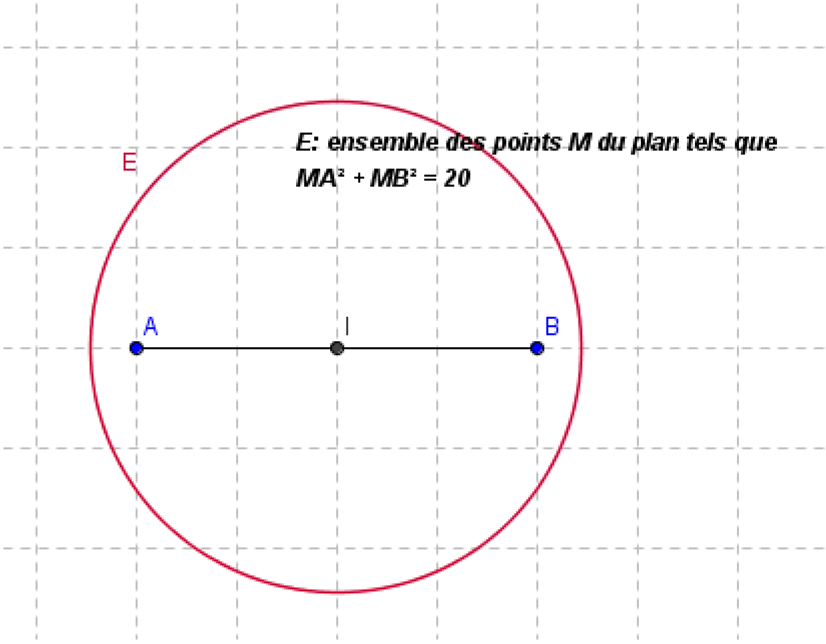
2) Comme AB = 2 et I milieu de [AB], on a : IA = 1

D'où : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - 1$

On cherche l'ensemble Γ des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5$, soit $MI^2 - 1 = 5$

$MI^2 = 6$, et comme $MI \geqslant 0$, on obtient $M \in \Gamma$ si et seulement si $MI = \sqrt{6}$.

3) Γ est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.



Compléments :

Soit k un réel, on cherche l'ensemble $\mathcal{E}_k$ des points du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$. AB = 2

On a donc : $MI^2 = k + 1$.

Conclusion : si $k < -1$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est l'ensemble vide. $\mathcal{E}_k = \emptyset$

Si $k = -1$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon 0 ($MI^2 = 0$, d'où, $MI = 0$).

Si $k = 0$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon 1 ($MI^2 = 1$, d'où, $MI = 1$).

l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de diamètre [AB]

Si $k \geqslant -1$ alors l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+1}$

65 page 330

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$

où C' est le projeté orthogonal de C sur (AB)

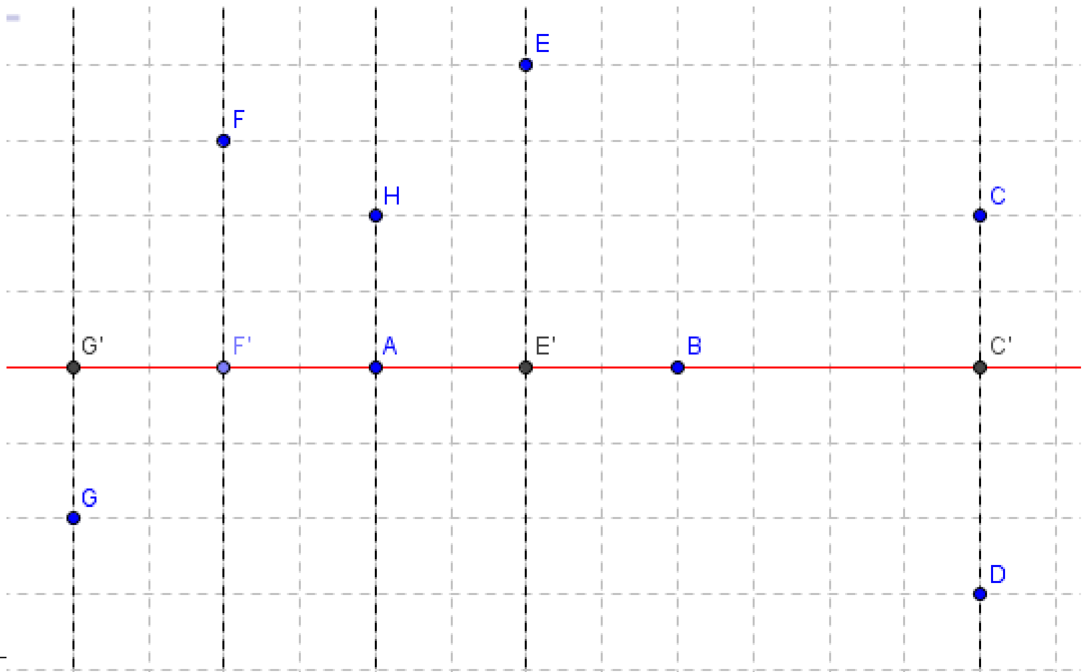
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires de même sens, $AB = 4$, $AC' = 8$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 8 = 32$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 32$ (même raison)

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 4 \times 2 = 8$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = -8$



e) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} = -16$

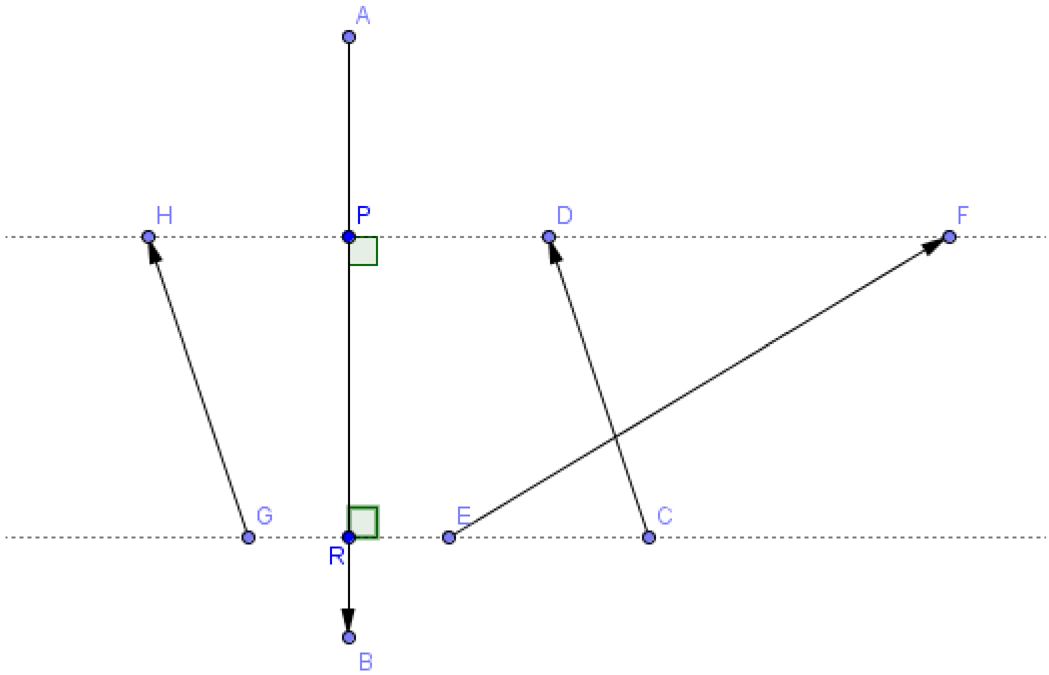
f) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 0$

---

66 page 330

Le point R est le projeté orthogonal sur la droite (AB) commun aux points C, E, G , et,

le point P est celui commun aux points D, F, H.



On en déduit : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RP}$.

Compléments :

*** On aurait de même : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RP}$.

*** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RP}$ étant colinéaires de sens contraires, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{RP} = -AB\times RP$

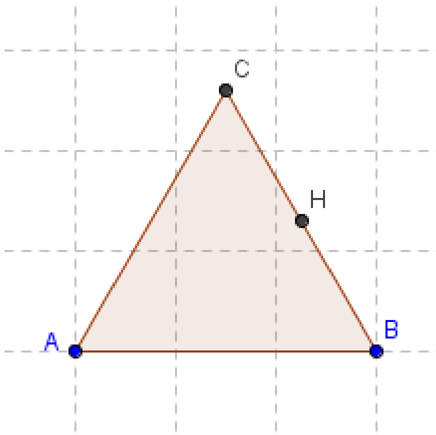
---

68 page 330

ABC triangle équilatéral de côté 3.

H le milieu de [BC].

Rappel : Dans un triangle équilatéral, la hauteur fait : côté$\times \frac{\sqrt{3}}{2}$)



$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$ car, H étant le milieu de [BC] d'un triangle équilatéral ABC, la médiane [AH] est aussi la médiatrice du segment [BC]. On a donc : $(AH) \perp (CH)$

Le projeté orthogonal de *B* sur (*AH*) est *H*, d'où,

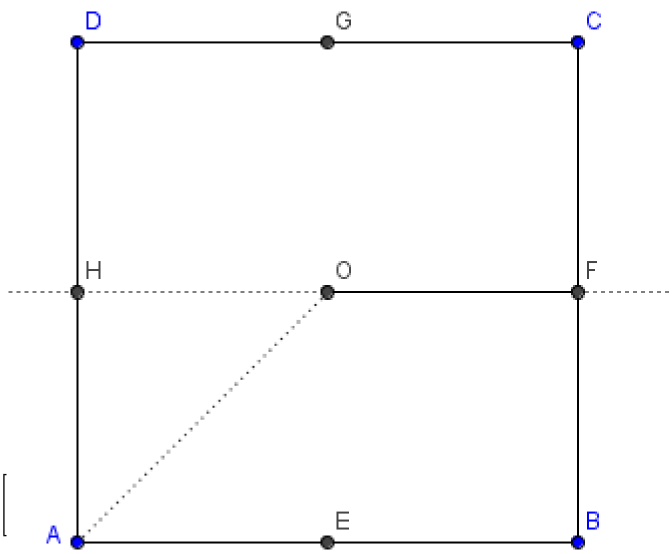
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}^{\,2} = AH^2 = AB^2 - BH^2 = 9 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{27}{4}$ (Le calcul de AH^2 est évident ...)

Autres méthodes :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$, d'où, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}^{\,2} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}^{\,2}$, car, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB.AH.\cos \widehat{BAH} = 3 \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27}{4}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC} \,.\, \dfrac{1}{2} \overrightarrow{CB} = -\dfrac{1}{2} \overrightarrow{BC}^{\,2} = -\dfrac{9}{2}$



69 page 330

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^{\,2} = AB^2 = 25$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

d) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OF}^{\,2} = -\dfrac{25}{4}$.

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} \times \left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{1}{2} \overrightarrow{AB}^{\,2} = -\dfrac{25}{2}$.

f) $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{GC} = -\dfrac{25}{4}$

---

72 page 331

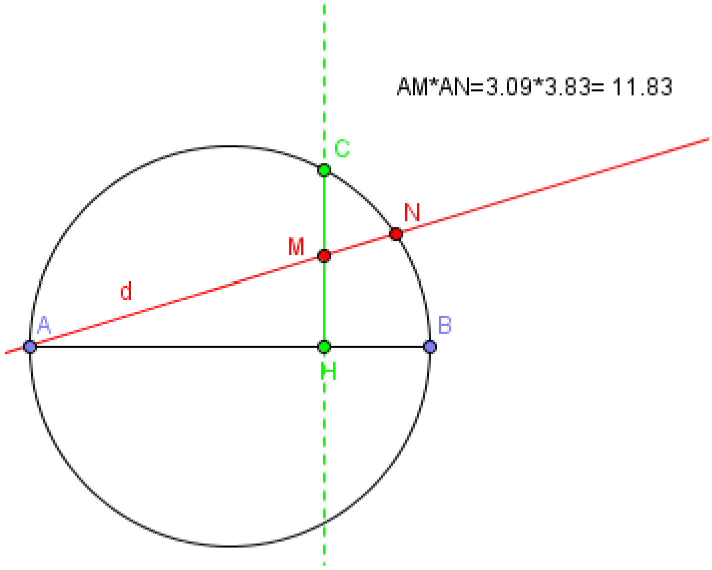
Γ est un cercle de diamètre [AB].

C est un point de Γ distinct de A et B.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et *d* une droite passant par A qui recoupe le cercle en N.

(CH) et *d* se coupent en M.

1) figure



2) Conjecture.

Le produit AM×AN semble constant. (On peut penser que si M et N sont confondus en C le résultat reste valable ou que si N est en B, M est en H et qu'on a encore le même résultat)

3) Le triangle ABN, étant inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB], est rectangle en N.

4) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$ car le projeté orthogonal de B sur (AM) est N d'après le 3/.

Ou encore :

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, donc, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right) = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$.

Comme (AM) ⊥ (BN), voir 3/, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN} = 0$

Conclusion : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ car, M et C ont le même projeté orthogonal H sur (AB).

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$ car H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$ car H est le projeté orthogonal de M sur (AB).

On a donc : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$

Remarque : une autre façon de comprendre la relation

Si on ajoute à $\overrightarrow{AM}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, on ne change pas le produit scalaire par $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

ou encore :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ si et seulement si $\vec{v}-\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

5) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = AM.AN$ car par construction $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires de même sens.

d'autre part : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Or, ACB est un triangle rectangle en C, donc, C est le projeté orthogonal de B sur (AC).

On a donc :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 = AC^2$.

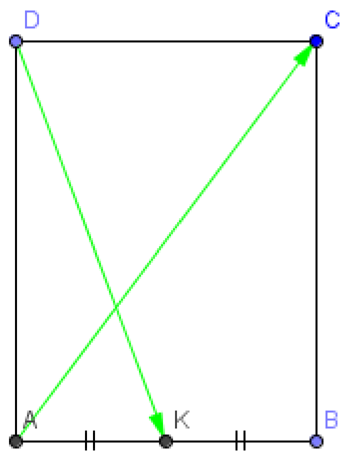
Conclusion :

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = AM.AN = AC^2$.

---

85 page 332

ABCD rectangle tel que $AB = 3$, $AD = 4$ et K milieu de $[AB]$.



1) Calcul de $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DK}$.

Méthode 1 : (*Décomposition des vecteurs en somme de vecteurs de façon à obtenir des produits scalaires de vecteurs colinéaires et de vecteurs orthogonaux*).

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK}$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DK} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AK}$$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -AD^2 = -16$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AK} = 0$, $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$, $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{9}{2}$.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DK} = -16+0+0+\frac{9}{2} = \frac{-23}{2}.$$

Méthode 2 : (*Dans un repère orthonormal*)

Posons $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \perp \vec{j}$.

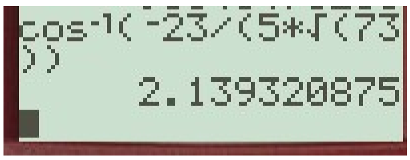
Le repère $(\mathrm{A};\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

$A(0 ; 0)$, $B(3 ; 0)$, $C(3 ; 4)$, $D(0 ; 4)$ et $K\left(\frac{3}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-4\end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DK} = 3\times\frac{3}{2}+4\times(-4) = \frac{-23}{2}$

2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DK} = AC.DK.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DK}\right)$ $\qquad AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ et $DK^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-4)^2 = \frac{73}{4}$

D'où, $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DK}\right) = \dfrac{\frac{-23}{2}}{\frac{5\times\sqrt{73}}{2}} = \dfrac{-23}{5\times\sqrt{73}}$



On obtient : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DK}\right) \approx 2{,}1$ radians à 0,1 près.

---

86 page 332

a) On connaît AB, AC et $\widehat{BAC}$

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 20°$ (Angles alternes-internes égaux car, $(DC) \parallel (AB)$.)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 4\times6\times\cos 20° \approx 22{,}55$

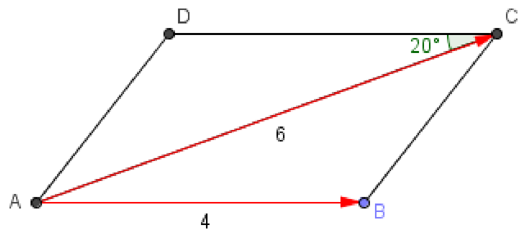


figure a

b) ***Un calcul*** :

On connaît le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AD}$ sur $\overrightarrow{AB}$, d'où,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}^{\,2}$

$= 6\times1 + 6^2 = 42$

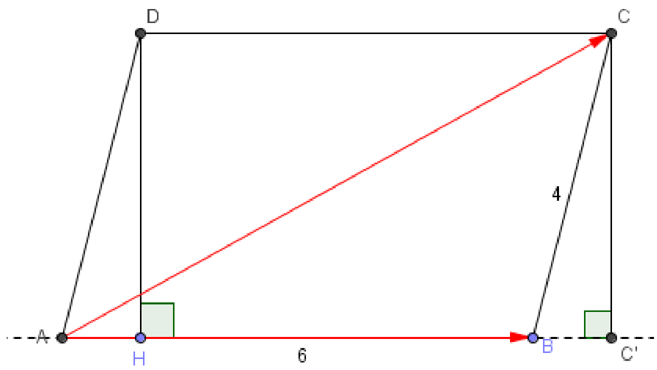


figure b

Un autre calcul :

Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a donc : $BC' = AH = 1$ et $AC' = 6 + 1 = 7$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = 6\times7 = 42$

c) On connaît AB, AC et $\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\| = AD$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2]$

Or, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, d'où,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AD^2 - AB^2 - AC^2)$

$= \frac{1}{2}(64 - 36 - 16) = 6.$

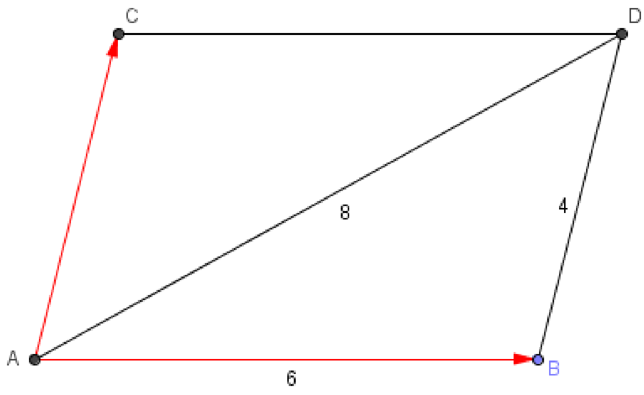


figure c

d) ***Un calcul*** :

On connaît l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$,

d'où, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$

$= \frac{\pi}{3}$,

on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 36 + AB.BC.\cos\frac{\pi}{3}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 36 + 6\times4\times\frac{1}{2} = 48$

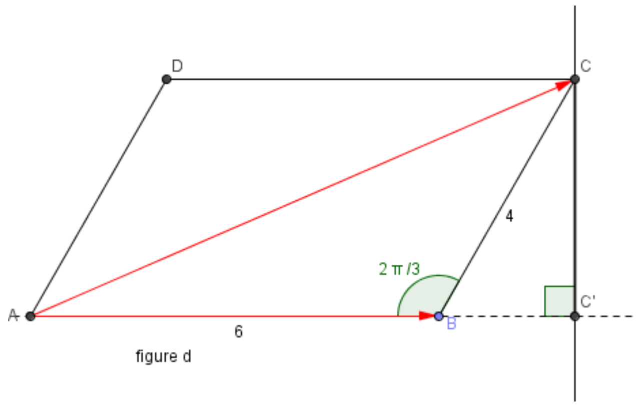


figure d

Un autre calcul :

Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).

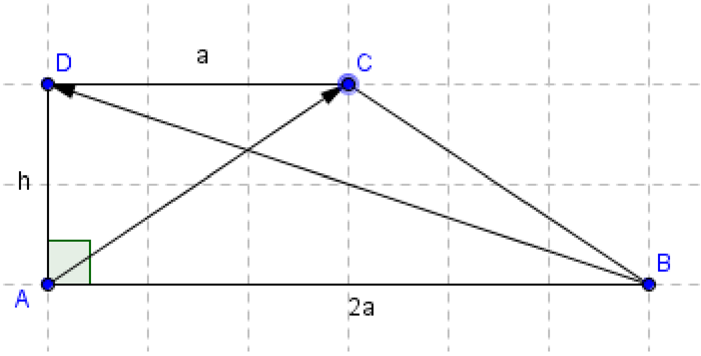
On a : $\widehat{C'BC} = \frac{\pi}{3}$ ($\widehat{ABC}$ et $\widehat{C'BC}$ sont des angles supplémentaires.)

$BC' = 4\times\cos\frac{\pi}{3}$ (triangle rectangle …)

$BC' = 4\times\frac{1}{2} = 2$, d'où, $AC' = 6 + 2 = 8$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = 6\times8 = 48$

88 page 332



D'après les données du trapèze :

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

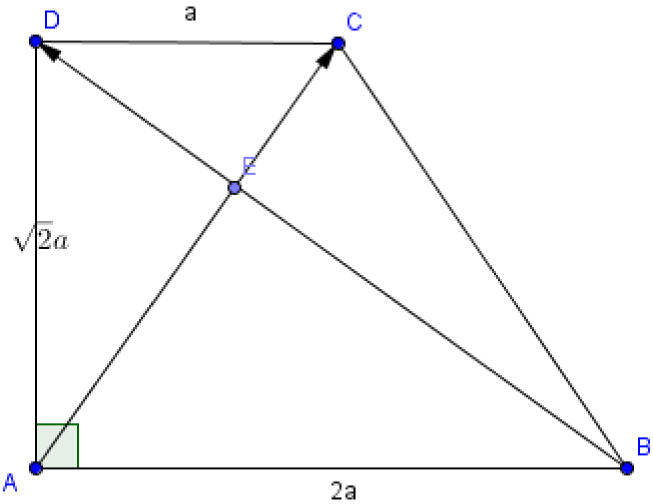
$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$= 0 + h^2 - 2a^2 + 0$

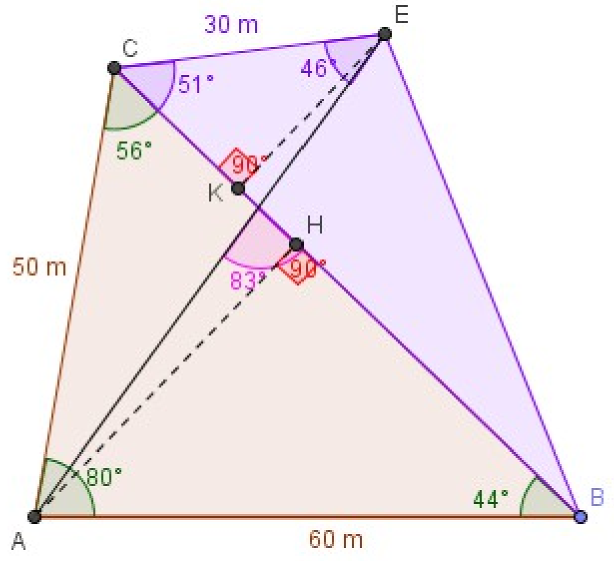
$= h^2 - 2a^2$

2) (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.

Soit : $h = \sqrt{2}.a$ (Longueurs donc nombres positifs …)



96 page 333



Propriétés utiles :

P1) La somme des angles d'un triangle vaut 180°,

P2) Les angles opposés par leur sommet sont de même mesure.

P3) Théorème d'Al-Kashi

P4) Aire d'un triangle : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

P5) Lignes trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer la hauteur.

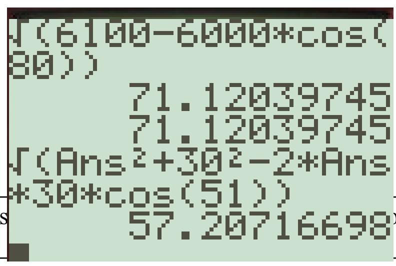
1) Dans le triangle ABC, on connaît : $AB = 60$, $AC = 50$ et $\widehat{BAC} = 80°$

$\overrightarrow{BC}^{\,2} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Comme $\| \vec{u} \|^2 = \vec{u}^{\,2}$, on obtient :

$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2.AC.AB.\cos(80°)$ Théorème d'Al-Kashi
$BC^2 = 6100 - 6000.\cos(80°)$ $BC \approx 71{,}12$ m

2) Dans le triangle BCE, on connaît BC, (voir 1°), $CE = 30$.
L'angle $\widehat{BCE} = 180° - (83 + 46)° = 51°$. (D'après P1 et P2)
On a donc : $BE^2 = BC^2 + CE^2 - 2 \times BC \times CE \times \cos(51°)$ Théorème d'Al-Kashi
$BE \approx 57{,}2$ m
À la calculatrice, utiliser la touche Rép ou Ans ...



3) Aire de ABC

Soit la hauteur AH relative à la base BC :

$AH = AB\ \sin(44°) = AC\ \sin\ (56°)$

$\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{BC \times AB \times \sin(44°)}{2}$ ou $\dfrac{BC \times AC \times \sin(56°)}{2}$

Soit la hauteur EK relative à la base BC :

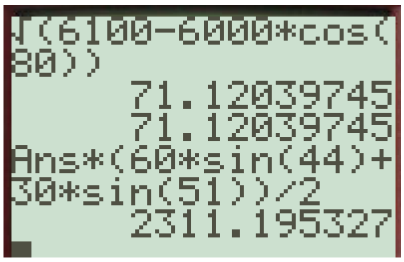
$EK = EC\ \sin(51°)$

$\mathcal{A}(BCE) = \dfrac{BC \times EC \times \sin(51°)}{2}$

$$\mathcal{A}(ABCE) = \frac{BC \times AB \times \sin(44°)}{2} + \frac{BC \times EC \times \sin(51°)}{2}$$

$$= \frac{BC}{2}\ (AB \times \sin(44°) + EC \times \sin(51°))$$

$$\approx 2311\ \text{m}^2$$

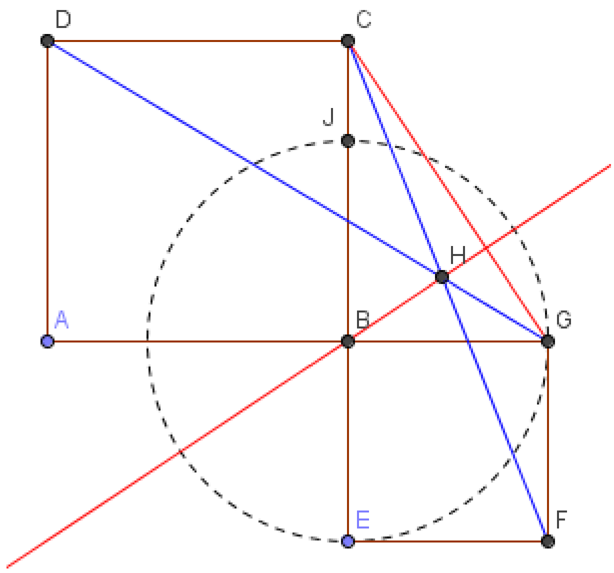


---

133 page 336 ***Orthogonalité***

ABCD et BEFG sont deux carrés tels que A, B, G alignés dans cet ordre et H est le point d'intersection de (DG) et (CF).

Choix d'un repère : On pose BG = 1 et $(B ; \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BJ})$ et C(0 ; c) avec $c > 0$



1) Le repère étant orthonormé, on a : BG = BJ = 1

Comme C(0 ; c) et comme $c > 0$, on a : $\overrightarrow{BC} = c\ \overrightarrow{BJ}$, d'où, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires de même sens.

En remarquant que BE = 1 et que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires, on a : $\overrightarrow{BJ} = -\ \overrightarrow{BE}$.

B est le milieu de [EJ].

2) Coordonnées

Points	Coordonnées	Preuves
A	$(-c\ ;\ 0)$	$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires de sens opposés et BA = BC
B	$(0\ ;\ 0)$	Origine du repère
C	$(0\ ;\ c)$	Par définition de c.
D	$(-c\ ;\ c)$	$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
E	$(0\ ;\ -1)$	justifié au 1/
F	$(1\ ;\ -1)$	$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE}$
G	$(1\ ;\ 0)$	Par définition du repère

3) la droite (FC) a pour équation :

(l'ordre des méthodes proposées n'a aucune importance, mais vous devez connaître toutes ces méthodes)

Méthode 1/ :

Une équation de (FC) est de la forme $y = ax + b$ ($a \neq 0$ car (FC) non parallèle aux axes)

F $\in$ (FC) d'où : $-1 = a + b$

C $\in$ (FC) d'où : $c = b$

On en déduit : $a = -1 - c = -(1 + c)$

Conclusion : Une équation de (FC) est : $y = -(1 + c)x + c$.

Méthode 2 :

L'ordonnée à l'origine est c

Le coefficient directeur $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_F - y_C}{x_F - x_C} = \dfrac{-1-c}{1-0} = -1 - c = -(1 + c)$

Conclusion : Une équation de (FC) est : $y = -(1 + c)x + c$.

Méthode 3 :

Un point M(x ; y) $\in$ (FC) si et seulement si $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{FM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FC} \begin{pmatrix} 0-1 \\ c-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ c+1 \end{pmatrix}$.

D'après la relation de colinéarité, une équation de (FC) est : $(c + 1)(x - 1) = -(y + 1)$

En réorganisant, on retrouve : $(c + 1)x - c - 1 = -y - 1$, d'où : $y = -(1 + c)x + c$.

4) Une équation de (DG)

Méthode 1/ :

Une équation de (DG) est de la forme $y = ax + b$ ($a \neq 0$ car (DG) non parallèle aux axes)

D $\in$ (DG) d'où : $c = a(-c) + b$

G ∈ (DG) d'où : $0 = a + b$

On en déduit par différence : $-c = a(1 + c)$, d'où, $a = -\dfrac{c}{1+c}$ et $b = -a = \dfrac{c}{1+c}$

Conclusion : Une équation de (DG) est : $y = -\dfrac{c}{1+c}x + \dfrac{c}{1+c}$.

Méthode 2 :

Le coefficient directeur $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_G - y_D}{x_G - x_D} = \dfrac{0-c}{1-(-c)} = -\dfrac{c}{1+c}$

Comme G ∈ (DG) : $0 = -\dfrac{c}{1+c} \times 1 + b$, d'où, $b = \dfrac{c}{1+c}$

Conclusion : Une équation de (DG) est : $y = -\dfrac{c}{1+c}x + \dfrac{c}{1+c}$

Méthode 3 :

Un point M(x ; y) ∈ (DG) si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GD}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} -c-1 \\ c-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(c+1) \\ c \end{pmatrix}$

D'après la relation de colinéarité, une équation de (GD) est : $c(x - 1) = -(c + 1)y$.

En réorganisant, on retrouve : $y = -\dfrac{c}{1+c}x + \dfrac{c}{1+c}$

5) Coordonnées du point H.

Les coordonnées du point H sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = -(1+c)x + c \\ y = -\dfrac{c}{1+c}x + \dfrac{c}{1+c} \end{cases}$$

Par comparaison, on en déduit l'équation aux abscisses : $-(1 + c)x + c = -\dfrac{c}{1+c}x + \dfrac{c}{1+c}$

En multipliant les deux membres par $(1 + c)$, puis, en " regroupant " les x …

$x[(1 + c)^2 - c] = (1 + c)c - c$.

$x = \dfrac{c^2}{c^2+c+1}$ et $y = -(1 + c)\dfrac{c^2}{c^2+c+1} + c = \dfrac{c^3+c^2+c-c^2-c^3}{c^2+c+1} = \dfrac{c}{c^2+c+1}$.

Conclusion : H$\left(\dfrac{c^2}{c^2+c+1} ; \dfrac{c}{c^2+c+1}\right)$

Pour démontrer que (BH) et (CG) sont perpendiculaires, calculons le produit scalaire : $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CG}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{BH}$ sont celles de H et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix} -1 \\ c \end{pmatrix}$,

la somme des produits : $-1 \times \dfrac{c^2}{c^2+c+1} + c \times \dfrac{c}{c^2+c+1} = 0$

ce qui prouve que (BH) et (CG) sont perpendiculaires.

134 page 336 distance d'un point à une droite

Une définition :

La **distance d'un point M à une droite *d*** est la longueur du segment $[MH]$ perpendiculaire à d avec $H \in d$.

H est par conséquent le projeté orthogonal de M sur d.

autre définition équivalente :

La **distance d'un point M à une droite *d*** est la distance minimale MN avec N décrivant la droite d.

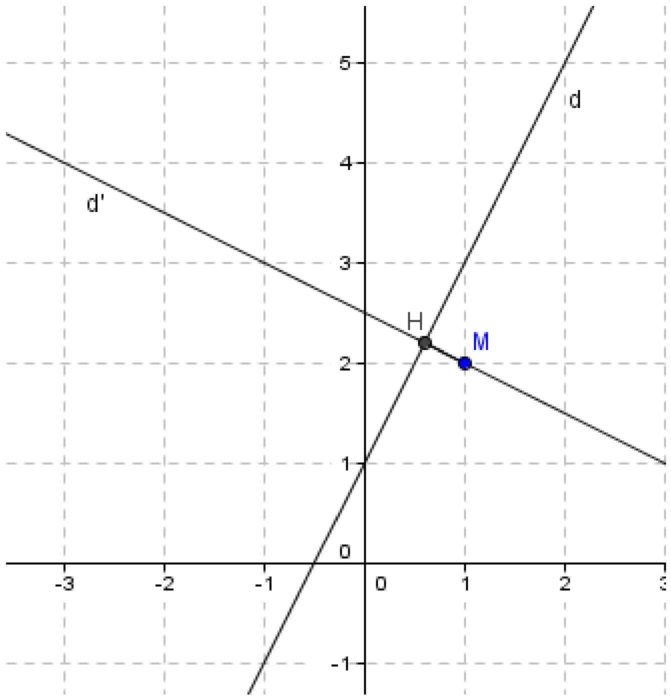
Énoncé :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. (unité : 1 cm)

1) ***Un exemple*** :

a) d est le droite d'équation $2x - y + 1 = 0$

$M(1\,;2)$



b) évaluation de la distance de M à d, entre 0,4 et 0,5

c) Recherche d'une équation de d' perpendiculaire à d passant par M.

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ est donc un vecteur normal de d'.

Un point $X(x\,;y) \in d'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{MX}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{MX}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MX} = 1.(x-1) + 2(y-2)$

Un point $X(x\,;y) \in d'$ si et seulement si $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MX} = 0$

si et seulement si $1.(x-1) + 2(y-2) = 0$

une équation de d' est $x + 2y - 5 = 0$

d) Le projeté orthogonal H de M sur d est le point d'intersection de d et d'.

les coordonnées de H sont donc les solutions du système $\begin{cases} 2x-y+1=0 & L_1 \\ x+2y-5=0 & L_2 \end{cases}$.

En faisant 2 L_2 - L_1 , on a : $5y = \frac{11}{5}$, soit $y = \frac{11}{5}$, puis : $x = -2\times\frac{11}{5} + 5 = \frac{3}{5}$.

Conclusion : H($\frac{3}{5}$; $\frac{11}{5}$)

$\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}-1\\ \frac{11}{5}-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-2}{5}\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}$, d'où, $MH = \|\overrightarrow{MH}\| = \frac{1}{5}\sqrt{(-2)^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Complément :

Une autre méthode pour déterminer la distance d'un point à une droite est de minimiser une fonction donnant la distance de M à un point quelconque de d.

Soit $N(t\ ;2t+1)$ un point de la droite d d'équation $2x - y + 1 = 0$

La distance $MN = \sqrt{(t-1)^2+(2t+1-2)^2} = \sqrt{5t^2-6t+2}$.

On pose $f(t) = MN^2 = 5t^2 - 6t + 2$ (distance au carré)

Comme une distance est positive le minimum de MN est atteint quand f est minimale.

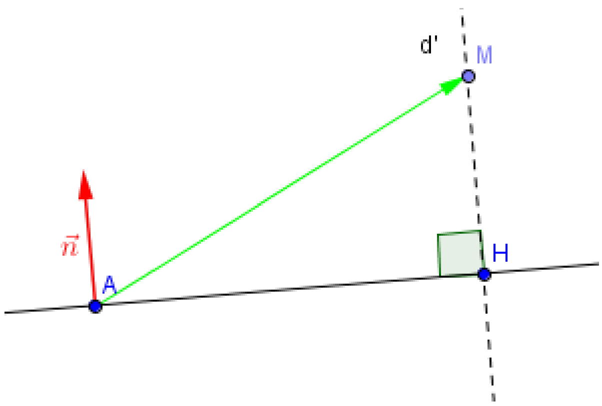
f étant une fonction du second degré atteint son minimum lorsque $t = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

En ce cas : $MN = \sqrt{5\times\left(\frac{3}{5}\right)^2-6\times\left(\frac{3}{5}\right)+2} = \frac{1}{5}\sqrt{45-90+50} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

2. Une formule

Soit A un point de d et H le projeté orthogonal de M sur d de vecteur normal $\vec{n}$.

(On a donc : $(HM) \perp (d)$ et $(AH) = d$.)



a) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} + \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}$ puisque, $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ étant orthogonaux, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n} = 0$.

b) Or, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont **colinéaires** d'où,

$\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = HM.\|\vec{n}\|$ si $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont de même sens, ou $\overrightarrow{\text{HM}}\cdot\vec{n} = -\text{HM}.\ ||\ \vec{n}\ ||$ si $\overrightarrow{\text{HM}}$ et $\vec{n}$ sont de sens opposés.

On a alors : $|\ \overrightarrow{\text{HM}}\cdot\vec{n}\ | = \text{HM}.\ ||\ \vec{n}\ ||$ et par conséquent : $\text{HM} = \dfrac{|\overrightarrow{\text{HM}}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ et comme $\overrightarrow{\text{HM}}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n}$,

on a : $\text{HM} = \dfrac{|\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

c) Prenons dans l'exemple 1/. A(0 ; 1) et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, on a : $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n} = 2\times1 + (-1)\times1 = 1$

$||\ \vec{n}\ || = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$.

$\text{HM} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Plus généralement : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite d d'équation $ax + by + c = 0$

Posons M(x_0 ; y_0) et A(x_A ; y_A) avec $a\,x_A + b\,y_A + c = 0$ puisque A $\in d$.

Le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n} = a(x_0 - x_A) + b(y_0 - y_A) = ax_0 + by_0 - (a\,x_A + b\,y_A)$

Comme $a\,x_A + b\,y_A = -c$, $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n} = ax_0 + by_0 + c$

D'autre part : $||\ \vec{n}\ || = \sqrt{a^2+b^2}$

Conclusion : $\text{HM} = \dfrac{|\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

---

139 page 337 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et de rayon r ($r > 0$).

M un point du plan et d une droite passant par M qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B.

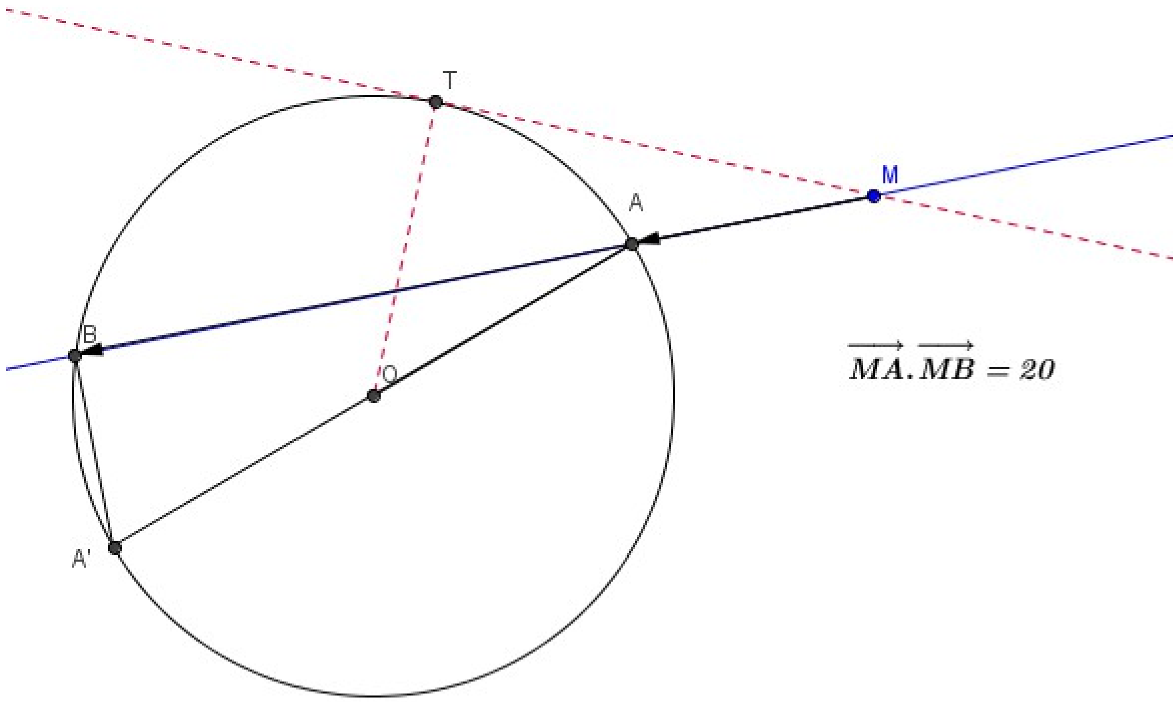
A) La construction permet de conjecturer la proposition suivante :

M étant donné, quelque soit la droite d passant par M et coupant le cercle en deux points A et B

(on peut avoir $A = B$), le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ est constant.

B) Démonstration

Soit A' le symétrique de A par rapport à O (A' est diamétralement opposé à A).



1) Le projeté orthogonal de A' sur d est B car le triangle ABA' est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AA']$.

On a donc : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

Or, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.

On a alors : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - r^2$.

2) On vient de montrer que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MO^2 - r^2$.

Les deux nombres MO et r sont indépendants de la position de la droite d.

Ce nombre $MO^2 - r^2 = p_{\mathscr{C}}(M)$ est la puissance de M par rapport au cercle $\mathscr{C}$.

3) Si M est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$, $0 \leqslant MO < r$ et $MO^2 - r^2 < 0$. $p_{\mathscr{C}}(M) < 0$.

Si M est sur le cercle $\mathscr{C}$, $MO = r$ et $MO^2 - r^2 = 0$. $p_{\mathscr{C}}(M) = 0$.

Si M est à l'extérieur du cercle $\mathscr{C}$, $MO > r > 0$ et $MO^2 - r^2 > 0$. $p_{\mathscr{C}}(M) > 0$.

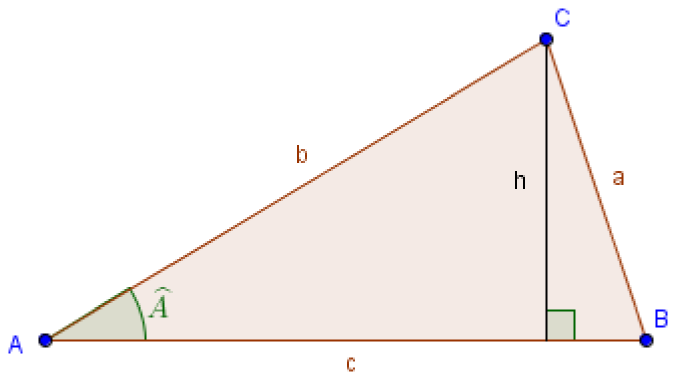
4) Soit la droite (MT) tangente au cercle en $\mathscr{C}$.

Le triangle MOT est rectangle en T et d'après le théorème de Pythagore, $MT^2 = MO^2 - r^2 = p_{\mathscr{C}}(M)$

---

144 page 338 Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.C.)

ABC est un triangle de côtés a, b et c et d'aire S.



Soit h la hauteur issue de C.

$$S = \frac{c \times h}{2} = \frac{c \times b \times \sin \widehat{A}}{2} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$$

1 a) La formule d'Al-Kashi est : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \widehat{A}$

soit : $2bc\cos \widehat{A} = b^2 + c^2 - a^2$

En élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient :

$4b^2c^2\cos^2 \widehat{A} = (b^2 + c^2 - a^2)^2$

b) Comme $\cos^2 \widehat{A} = 1 - \sin^2 \widehat{A}$, on en tire :

$4b^2c^2(1 - \sin^2 \widehat{A}) = (b^2 + c^2 - a^2)^2$

En développant et en réorganisant : $4b^2c^2\sin^2 \widehat{A} = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$

On reconnaît la différence de deux carrés $(A - B^2 = \dots)$

$$\begin{aligned}
4b^2c^2\sin^2 \widehat{A} &= [2bc - (b^2 + c^2 - a^2)][2bc + (b^2 + c^2 - a^2)] \\
&= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(b^2 + c^2 + 2bc - a^2) \\
&= [a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)][(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2] \\
&= [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2] \\
&= [a - (b - c)][a + (b - c)][(b + c) - a][(b + c) + a]
\end{aligned}$$

Se souvenir :

$b^2 + c^2 - 2bc = (b - c)^2$ et

$b^2 + c^2 + 2bc = (b + c)^2$

En réorganisant :

$4b^2c^2\sin^2 \widehat{A} = (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$

2) p est le demi-périmètre de ABC d'où $2p = a + b + c$

soit : $b + c = 2p - a$ puis, $-a + b + c = 2p - 2a = 2(p - a)$

$c + a = 2p - b$ puis, $a - b + c = 2p - 2b = 2(p - b)$

$a + b = 2p - c$ puis, $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$

a) En substituant dans l'égalité du 1 b), il vient :

$4b^2c^2\sin^2 \widehat{A} = 2p \times 2(p - a) \times 2(p - b) \times 2(p - c) = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$

En divisant par 4 : $b^2c^2\sin^2 \widehat{A} = 4p(p - a)(p - b)(p - c)$

et puisque les nombres positifs : $bc\sin \widehat{A} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

b) Comme $S = \frac{1}{2} bc\sin \widehat{A}$, on obtient la formule de Héron d'Alexandrie :

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

3) **Application** :

Les côtés sont 19 cm, 20 cm, 21 cm, $S \approx 172$ cm²

Les côtés sont : 22 cm, 30 cm, 51 cm, $S \approx 127$ cm²

(Les côtés sont plus grands, mais le triangle est plus aplati dans le deuxième cas.

Le premier triangle est proche d'un triangle équilatéral).

Compléments :

1) Supposons que les côtés soient fixés dans cet ordre : $0 < a \leqslant b \leqslant c$

Le triangle est constructible lorsque $a + b > c$ On a donc : $c - b < a \leqslant b$ $c - a < b \leqslant c$

2) **Recherche du triangle de plus grande aire pour un périmètre donné.**

***p* est une constante** (le périmètre est fixé).

première étape :

Supposons ***c* fixé.**

On pose $a = x$ (variable), d'où, $b = 2p - c - x$

Comme S et S^2 ont les m^mes variations, on étudie :

$S^2 = p(p-x)(p-2p+c+x)(p-c) = p(p-c)[-x^2 + (2p-c)x + p(c-p)]$

S^2 est donc un polynôme du second degré qui atteint son maximum en $a = \frac{2p-c}{2}$

En ce cas, $b = 2p - c - \frac{2p-c}{2} = \frac{2p-c}{2} = a$.

Parmi tous les triangles de côté c et de périmètre p, celui qui a la plus grande aire est le triangle isocèle de base c.

deuxième étape :

Cherchons parmi les triangles isocèles de périmètre p fixé, celui qui a la plus grande aire.

On pose $c = x$ (variable) et on a : $a = b = p - \frac{x}{2}$

$S^2 = p(-\frac{x}{2})^2(p-x) = \frac{1}{4}px^2(p-x) = \frac{1}{4}(-px^3 + p^2x^2)$

Ce polynôme du troisième degré a pour dérivée : $f'(x) = \frac{1}{4}(-3px^2 + 2p^2x) = \frac{1}{4}px(-3x + 2p)$

Comme $x > 0$, la dérivée s'annule en changeant de signe en $x = \frac{2p}{3}$

Le maximum est atteint lorsque $c = \frac{2p}{3}$ (un tiers du périmètre).

En ce cas, $a = b = c$, le triangle est équilatéral. La formule mène à $S = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

---

152 page 340
Traduction des données :

Le patio est un triangle ABC où $AB^2 = 90$, $BC^2 = 20$ et $CA^2 = 30$.

On pose $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$,

d'où, $c = \sqrt{90} = 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}$,

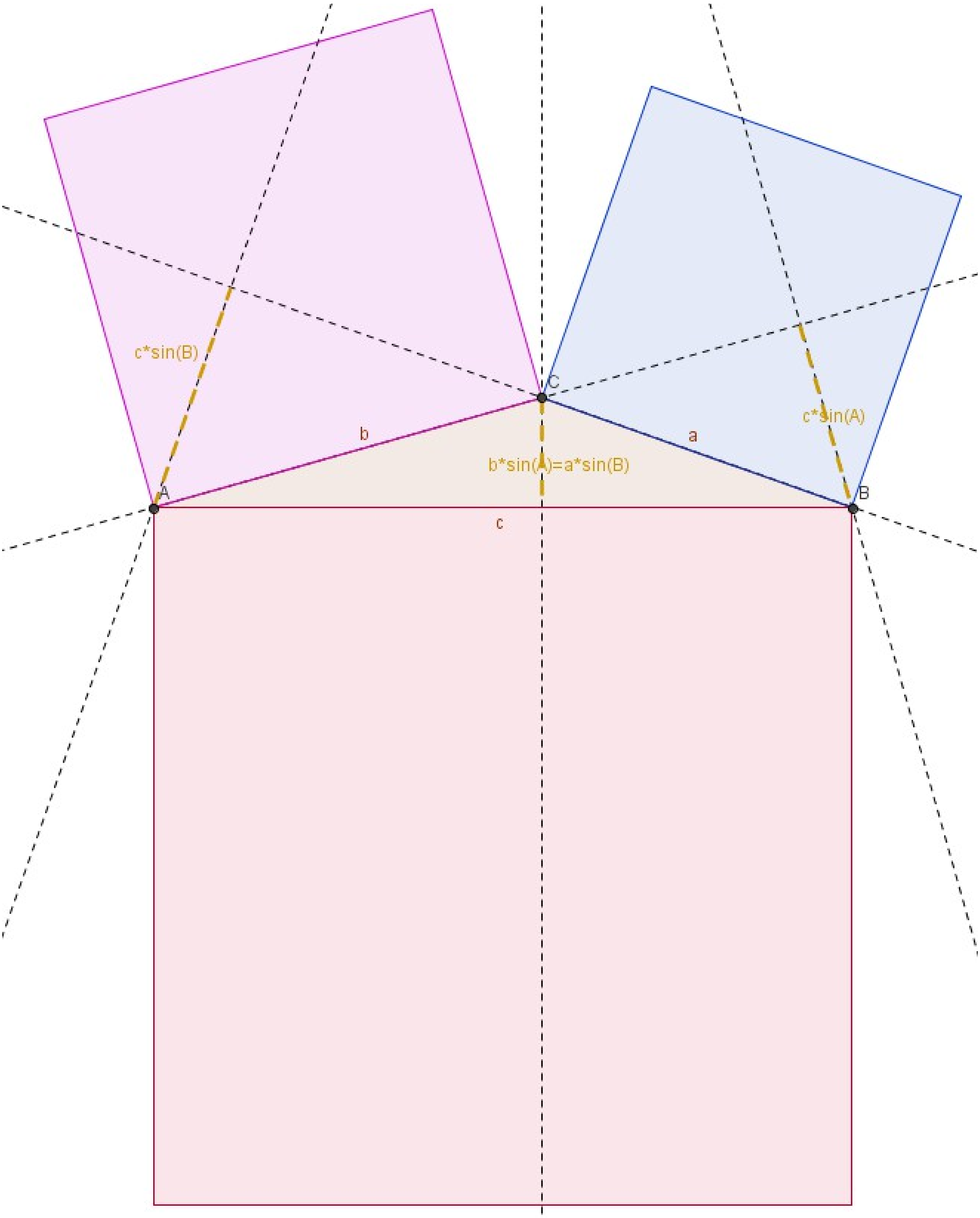
$a = \sqrt{20} = 2\times\sqrt{5}$

et $b = \sqrt{30} = \sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}$

L'aire d'un triangle est obtenue par : $\mathscr{A} = \frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$

En prenant : $b = AC$ comme longueur de la base, la hauteur issue de B est égale à $h = c\times\sin\widehat{A}$

donc $\mathscr{A} = \frac{b\times c\times\sin\widehat{A}}{2}$



(On a de même : $\mathscr{A} = \dfrac{a\times b\times \sin\widehat{C}}{2} = \dfrac{c\times a\times \sin\widehat{B}}{2}$)

Le théorème d'Al-Kashi permet de calculer cos $\widehat{A}$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, d'où, $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{30+90-20}{2\times\sqrt{30}\times\sqrt{90}} = \dfrac{5}{3\sqrt{3}}$

rappel : $\sin^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = 1$

Comme $\sin\widehat{A} > 0$, on a : $\sin\widehat{A} = \sqrt{1-\dfrac{5}{27}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Finalement : $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{30}\times\sqrt{90}\times\sqrt{2}}{2\times3\times\sqrt{3}} = 5\sqrt{2}$ m²

En prenant les autres côtés, on a : $\cos\widehat{B} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ et $\sin\widehat{B} = \sqrt{1-\dfrac{16}{18}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$,

d'où, $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{20}\times\sqrt{90}}{2\times3} = 5\sqrt{2}$ m²

$\cos\widehat{C} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\sin\widehat{C} = \sqrt{1-\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$, d'où, $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{20}\times\sqrt{30}}{2\times\sqrt{3}} = 5\sqrt{2}$ m²