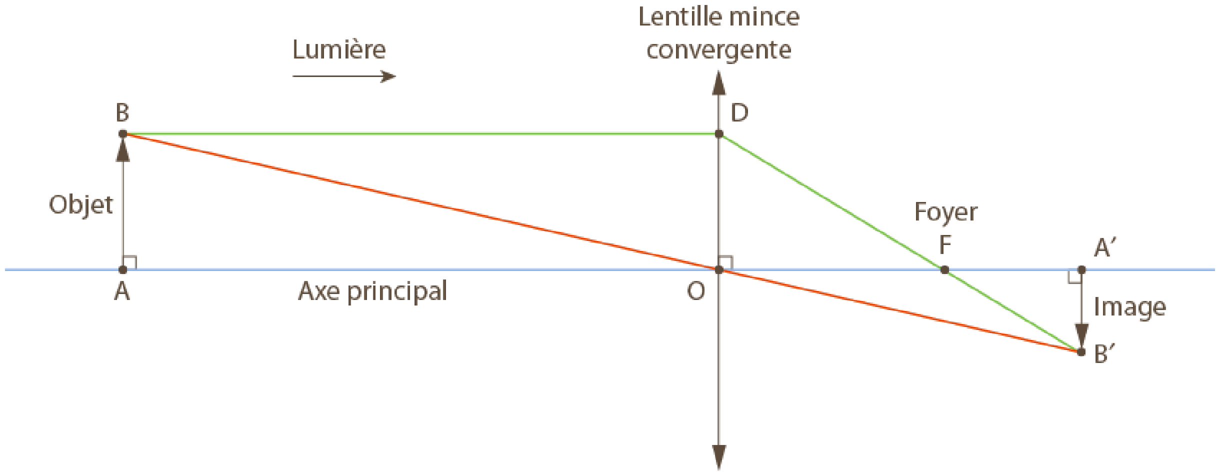
Index

3 page 59

Rappel : image d'un objet obtenue avec une lentille mince convergente.



A- En appliquant le théorème de Thalès aux triangles OAB et $OA'B'$, on a : $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$

et aux triangles FOD et $FA'B'$, on a : $\frac{A'F}{OF} = \frac{A'B'}{OD}$.

Comme $OD = AB$, on obtient la double égalité : $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'F}{OF} = \frac{A'B'}{AB}$.

Or, comme $F \in [OA']$, on a : $A'F = A'O - OF$, d'où, $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'F}{OF}$ équivaut à $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'O - OF}{OF}$

Or, $\frac{A'O - OF}{OF} = \frac{A'O}{OF} - 1$

En divisant chaque terme par OA' non nul, il vient : $\frac{1}{OA} = \frac{1}{OF} - \frac{1}{OA'}$, soit : $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF}$

Remarques : autres méthodes pour mener les calculs

les triangles étant rectangles, on peut utiliser la trigonométrie

tan $\widehat{AOB} = \frac{AB}{OA}$ *et tan* $\widehat{A'OB'} = \frac{A'B'}{OA'}$,

comme $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ *(angles opposés par le sommet),* $\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'}$ *, soit :* $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$

tan $\widehat{OFD} = \frac{OD}{OF}$ *tan* $\widehat{A'OB'} = \frac{A'B'}{A'F}$,

comme $\widehat{OFD} = \widehat{A'FB'}$ *(angles opposés par le sommet),* $\frac{OD}{OF} = \frac{A'B'}{A'F}$ *, soit :* $\frac{A'F}{OF} = \frac{A'B'}{OD}$ . .....

(mêmes calculs ensuite qu'au-dessus)

De l'égalité, $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'F}{OF}$ *, on tire :* $OA' \times OF = A'F \times OA = (A'O - OF) \times OA = A'O \times OA - OF \times OA$

soit : $OA'\times OF + OF\times OA = A'O\times OA$

On divise chaque terme par : $OA'\times OF\times OA$*, on obtient :* $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF}$

B- On sait $OA' = 20$ mm, soit : $OA' = 0{,}02$ m

On note $C = \frac{1}{OF}$ (en m^{-1} ou dioptrie) , et $OA = x$ (en mètres) d'où, $C = \frac{1}{x} + \frac{1}{0{,}02} = \frac{1}{x} + 50$

1) On pose $f(x) = \frac{1}{x} + 50$

Les variations de la fonction f, qui, à x associe C, sont celles de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$.

(En ajoutant une constante (ici : 50) l'ordre ne change pas.

x	0 $+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘ 50

2) Puisque $C = \frac{1}{OF}$, on a : $OF = \frac{1}{C} = \frac{1}{f(x)}$

Soit g la fonction qui, à x associe OF.

On a $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ et on obtient le tableau de variations suivant :

Puisque , pour tout x réel, $f(x) > 0$, on peut appliquer la fonction inverse

On a successivement :

$0 < a < b$	**fonctions appliquées**	**Commentaires**
$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$	Fonction inverse strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$	l'inverse d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.
$\frac{1}{a} + 50 > \frac{1}{b} + 50 > 50$ *soit :* $f(a) > f(b) > 50$	On a ajouté 50 (Fonction affine constante)	les réels obtenus sont strictement positifs
$\frac{1}{f(a)} < \frac{1}{f(b)} < \frac{1}{50}$ Soit $g(a) < g(b)$	Fonction inverse strictement décroissante sur $]50 ; +\infty[$	

On a montré : Si $0 < a < b$ alors $g(a) < g(b)$

x	0 $+\infty$
$g(x)$	‖ 0 ↗ $0{,}02$

Commentaires : *on peut conclure maintenant l'exercice, en calculant g(25).*

Comme g est strictement croissante sur]0 ; +∞[, on a :

Si x ⩾ 25 alors g (x) ⩾ g(25).

Comme g(25) = $\frac{1}{f(25)} = \frac{1}{50{,}04}$ *≈ 0,01998... mètres.*

Comme g (x) = OF, on obtient l'encadrement demandé au 3b/

Remarque : $g(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}+50} = \frac{x}{1+50x}$

3 a) ***Une méthode à partir du A/***

pour démontrer une égalité, on calcule séparément les deux membres de l'égalité ....

On sait que $\frac{1}{OF} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{0{,}02} = \frac{0{,}02+OA}{0{,}02\times OA}$, d'où, $OF = \frac{0{,}02\times OA}{0{,}02+OA}$

D'autre part : $0{,}02 - \frac{0{,}0004}{OA+0{,}02} = \frac{0{,}02(OA+0{,}02)-0{,}0004}{OA+0{,}02} = \frac{0{,}02\times OA}{0{,}02+OA}$

L'égalité $OF = 0{,}02 - \frac{0{,}0004}{OA+0{,}02}$ est donc prouvée.

b) $OA \geqslant 25$ m,

Si $x \geqslant 25$, comme g est une fonction strictement croissante, on obtient : $g(x) \geqslant g(25)$.

$g(25) = \frac{25}{1+25\times 50}$.

Une valeur approchée **par défaut** de $g(0{,}25)$ est 0,01998

D'autre part, quand x augmente indéfiniment , la vergence C tend vers 50 et son inverse OF tend vers 0,02.

Finalement : si $OA \geqslant 25$ m alors $0{,}019\,98 \leqslant OF \leqslant 0{,}02$ (en mètres), soit 19,98 mm $\leqslant OF \leqslant$ 20 mm.

c) Comme la distance $OA' = 20$ mm (distance du cristallin à la rétine), le foyer est extrêmement proche de la rétine ... lorsque OA tend vers l'infini.

---

16 page 62

La fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ; +∞[, d'où,

a) Si $0 \leqslant x \leqslant 9$ alors $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$

b) Si $0 < x \leqslant 0{,}01$ alors $0 < \sqrt{x} < 0{,}1$

c) Si $x \in [1\ ;\ 10^4[$ alors $\sqrt{x} \in [1\ ;\ 10^2[$

---

17 page 62

Soit la droite d'équation $y = 100$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est au-dessus de cette droite si et seulement si $\sqrt{x} \geqslant 100$.

On a donc : $x \geqslant 10^4$ Sur l'intervalle $[10^4 ; +\infty[$, la courbe de racine carrée est au-dessus de la droite d'équation $y = 100$

18 page 62

Commentaire :

On sait que la fonction $\sqrt{\ }$ est définie sur $[0 ; +\infty[$ et est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Se souvenir que la " quantité " sous le radical ($\sqrt{\ }$) est un réel positif ou nul.

D'où, écrire $\sqrt{\text{Truc}} > \sqrt{\text{Machin}}$ équivaut à $\begin{cases} \text{Truc} \geqslant 0 \\ \text{Machin} \geqslant 0 \\ \text{Truc} > \text{Machin} \end{cases}$

a) $\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \sqrt{4}$

Comme la fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur **$[0 ; +\infty[$**, on a :

$\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$. (*comme $x > 4$, x est nécessairement positif*)

$\mathscr{S}_a =]4 ; +\infty[$.

b) $\sqrt{x} \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 9$ pour la même raison $\mathscr{S}_{\text{b}} = [0 ; 9]$

c) $\sqrt{x} \geqslant 10$ $\mathscr{S}_{\text{c}} = [100 ; +\infty[$

d) $\sqrt{x} \geqslant 0$ $\mathscr{S}_{\text{d}} = [0 ; +\infty[$

e) $\sqrt{x-4} < 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x - 4 < 4 \Leftrightarrow 4 \leqslant x < 8$ $\mathscr{S}_{\text{e}} = [4 ; 8[$

f) $\sqrt{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow 1 - x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 0$ $\mathscr{S}_{\text{f}} =]-\infty ; 0]$

19 page 63

a) $3 + \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$ $\mathscr{S}_a =]1 ; +\infty[$ (voir n°18 pour les justifications)

b) $3\sqrt{x} + 1 \geqslant 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{9}$ $\mathscr{S}_b = \left[\frac{1}{9} ; +\infty\right[$

c) $\sqrt{x}\,(x-5) \geqslant 0$ (évident) $\mathscr{S}_c = [5 ; +\infty[$

Ce qu'on doit avoir en tête :

L'expression $\sqrt{x}\,(x-5)$ n'a de sens que si $x \geqslant 0$.

Pour $x \geqslant 0$, on a : $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Le produit $\sqrt{x}\,(x-5)$ est positif ou nul si et seulement si les facteurs $\sqrt{x}$ et $(x-5)$ sont de même signe

Il est donc nécessaire et suffisant d'avoir $x - 5 \geqslant 0$

Complément :

$\sqrt{x}\,(x-5) \leqslant 0$ $\mathscr{S}_c = [0 ; 5\,]$

En effet, on doit avoir $x \geqslant 0$ et comme $\sqrt{x} \geqslant 0$, le facteur $(x-5)$ est négatif ou nul.

24 page 63

Méthode :

Comprendre que pour $a > 0$, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, d'où, $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

Comprendre que pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$, d'où, la transformation des quotients contenant des $\sqrt{}$ en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{5}+1} = \dfrac{3(2\sqrt{5}-1)}{(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)} = \dfrac{6\sqrt{5}-1}{20-1} = \dfrac{6\sqrt{5}-1}{19}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \dfrac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \sqrt{3} - 2$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Retenir : $A > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{A}} = \dfrac{\sqrt{A}}{A}$

---

25 page 63

Soit $x \geqslant 0$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

b) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \dfrac{-x+5\sqrt{x}-6}{x-9}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{2(\sqrt{x+1}+1)}{x}$ (Remarque : on doit avoir $x > 0$)

d) $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+4}-1} = \dfrac{3(\sqrt{x^2+4}+1)}{x^2+3}$

---

27 page 63

1 **Remarquer :** $n \in \mathbb{N}$, $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = 1$, ou encore : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} = \dfrac{1\times(\sqrt{5}+\sqrt{4})}{(\sqrt{5}-\sqrt{4})(\sqrt{5}+\sqrt{4})} = \sqrt{5}+\sqrt{4} = \sqrt{5} + 2$

b) Comme $5 \geqslant 4$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a : $\sqrt{5} \geqslant \sqrt{4}$, soit : $\sqrt{5} \geqslant 2$

En ajoutant 2 à chaque membre de l'inégalité : $\sqrt{5} + 2 \geqslant 4$

Finalement d'après le 1/a/ : $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} \geqslant 4$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$

Comme $6 \geqslant 5$ et que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a : $\sqrt{6} \geqslant \sqrt{5}$

En ajoutant $\sqrt{5}$ à chacun des membres de l'inégalité, il vient : $\sqrt{6} + \sqrt{5} \geqslant 2\sqrt{5}$

Conclusion : $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \geqslant 2\sqrt{5}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n}$.

---

28 page 63

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2x+5}$ pour tout x réel.

Remarque : L'expression $x^2 + 2x + 5$ est strictement positive

Preuve : $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$

ou encore

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times1\times5 = -16$

Comme $\Delta < 0$, l'expression est du signe de 1 coefficient de x^2, ...

1) $f(x) - 2 = \sqrt{x^2+2x+5} - 2$

Méthode :

On multiplie par : $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+5}+2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$ pour avoir une autre écriture de $f(x) - 2$

Important : on ne change pas la " valeur " d'un nombre en multipliant par 1.

Tout réside dans le choix de $1 = \dfrac{\text{truc}}{\text{truc}}$.

On doit avoir : " truc " $\neq 0$

et, il faut un intérêt (qu'apportent ces calculs ?)

Pour les formes algébriques contenant des $\sqrt{\ }$, on multiplie par la quantité conjuguée afin d'obtenir l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Vocabulaire : les expressions $a + b$ et $a - b$ sont dites conjuguées.

Application à l'exercice :

Pour tout x réel, $\sqrt{x^2+2x+5} \geqslant 0$ (car, c'est une image par la fonction $\sqrt{\ }$), d'où, $\sqrt{x^2+2x+5} + 2 \geqslant 2$

$\sqrt{x^2+2x+5} + 2 \neq 0$

$$f(x) - 2 = (\sqrt{x^2+2x+5} - 2)\times\frac{\sqrt{x^2+2x+5}+2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} = \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} = \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2}$$

2) Comme $\sqrt{x^2+2x+5} > 0$, et, $2 > 0$, la somme $\sqrt{x^2+2x+5} + 2 > 0$

Or $(x + 1)^2 \geqslant 0$ pour tout x réel. $(x + 1)^2 = 0$ lorsque $x = -1$

Par conséquent, le quotient $\dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+2} \geqslant 0$ (il est nul en -1)

Pour tout x réel, $f(x) - 2 \geqslant 0$, soit : $f(x) \geqslant 2$.

3) D'autre part : $f(-1) - 2 = 0$

$\begin{cases} f(-1)=2 \\ f(x)\geqslant 2 \text{ pour tout } x \text{ réel} \end{cases}$ prouve que 2 est le minimum de f atteint en –1.

---

30 page 63

1) Démonstration de la variation de la fonction $\sqrt{\ }$. (Voir cours)

2) a) f est définie sur [–3 ; +∞[par $f(x) = \sqrt{x+3}$.

Soit $-3 \leqslant a < b$.

Recherche du signe de $f(b) - f(a)$

$f(b) - f(a) = \sqrt{b+3} - \sqrt{a+3}$

Or, $\sqrt{b+3} - \sqrt{a+3} = \dfrac{(\sqrt{b-3}-\sqrt{a-3})(\sqrt{b-3}+\sqrt{a-3})}{\sqrt{b-3}+\sqrt{a-3}} = \dfrac{b-3-(a-3)}{\sqrt{b-3}+\sqrt{a-3}} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b-3}+\sqrt{a-3}}$.

Comme $a < b$ alors $b - a > 0$

D 'autre part, la somme $\sqrt{b+3} + \sqrt{a+3}$ de deux nombres positifs est positive.

On en déduit : $\sqrt{b+3} - \sqrt{a+3} > 0$, soit, $f(b) - f(a) > 0$ ou encore : $f(a) < f(b)$

Conclusion :

On a montré : si $-3 \leqslant a < b$ alors $f(a) < f(b)$

La fonction f est strictement croissante sur [–3 ; +∞[

b) g est définie sur]–∞ ; 2] par $g(x) = \sqrt{2-x}$

Soit $a < b \leqslant 2$

Recherche du signe de $g(b) - g(a)$

$g(b) - g(a) = \sqrt{2-b} - \sqrt{2-a}$

Or, $\sqrt{2-b} - \sqrt{2-a} = \dfrac{(\sqrt{2-b}-\sqrt{2-a})(\sqrt{2-b}+\sqrt{2-a})}{\sqrt{2-b}+\sqrt{2-a}} = \dfrac{2-b-(2-a)}{\sqrt{2-b}+\sqrt{2-a}} = \dfrac{a-b}{\sqrt{2-b}+\sqrt{2-a}}$

Comme $a < b$ alors $a - b < 0$

D 'autre part, la somme $\sqrt{2-b} + \sqrt{2-a}$ de deux nombres positifs est positive.

On en déduit : $\sqrt{2-b} - \sqrt{2-a} < 0$, soit, $g(b) - g(a) < 0$, ou encore, $g(a) > g(b)$

Conclusion :

On a montré : si $a < b \leqslant 2$ alors $g(a) > g(b)$

La fonction g est strictement décroissante sur]–∞ ; –2]

---

34 page 64

$\mathscr{P}$ a pour équation $y = 2x^2 - 6x + 1$ et $\mathscr{D}$: $y = -x + 4$

Dans la suite de l'exercice, on pose : $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ et $g(x) = -x + 4$

Ainsi, $\mathscr{P} : y = f(x)$ et $\mathscr{D} : y = g(x)$.

Pour donner la position relative de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$, on détermine le signe de la différence :

$d(x) = 2x^2 - 6x + 1 - (-x + 4)$

Soit l'expression $d(x) = 2x^2 - 5x - 3$

On reconnaît une expression du **second degré.**

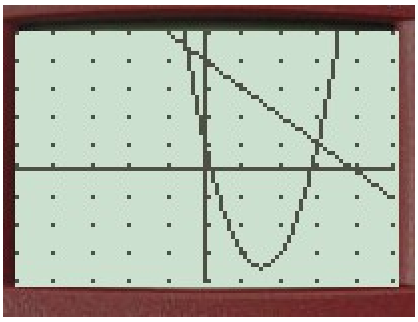
Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times2\times(-3) = 49 = 7^2$

On a donc deux racines, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)-7}{2\times2} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)+7}{2\times2} = 3$

Comme **le coefficient 2 est strictement positif**, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$d(x)$		+	0	–	0		
Comparaison des ordonnées		$f(x) > g(x)$		$f(x) < g(x)$		$f(x) > g(x)$	
position relative		$\mathscr{P}$ au-dessus de $\mathscr{D}$		$\mathscr{P}$ au-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{P}$ au-dessus de $\mathscr{D}$	

Vérification graphique :



---

38 page 64

Nombre	Valeur absolue	Commentaires
2	$\|2\| = 2$	$2 > 0$
–5,3	$\|-5{,}3\| = 5{,}3$	$-5{,}3 < 0$, d'où, sa valeur absolue est son opposé
$1 - \sqrt{5}$	$\|1-\sqrt{5}\| = \sqrt{5} - 1$	$1 < \sqrt{5}$, d'où, $1 - \sqrt{5} < 0$ L'opposé de $1 - \sqrt{5}$ est $\sqrt{5} - 1$
$-\dfrac{3}{4}$	$\left\|\dfrac{-3}{4}\right\| = \dfrac{3}{4}$.	
$-2\sqrt{3}$	$\|-2\sqrt{3}\| = 2\sqrt{3}$	
10^{-4}	$\|10^{-4}\| = 10^{-4}$	$10^{-4} > 0$

Nombre	**Valeur absolue**	**Commentaires**
-10^3	$\lvert -10^3 \rvert = 10^3$	
$\pi - 10$	$\lvert \pi - 10 \rvert = 10 - \pi$	

40 page 64

a) $|x| = 3$ équivaut à $x = 3$ ou $x = -3$ $\mathcal{S}_a = \{-3 ; 3\}$

b) L'équation $|x| = -2$ n'a aucune solution $\mathcal{S}_b = \varnothing$

c) $|x| = \sqrt{2} - 1$ équivaut à $x = 1 - \sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2} - 1$ $\mathcal{S}_c = \{1 - \sqrt{2} ; \sqrt{2} - 1\}$

d) $|x| < 1$ équivaut à $-1 < x < 1$ $\mathcal{S}_d =]-1 ; 1[$

e) $|x| \leqslant 100$ équivaut à $-100 \leqslant x \leqslant 100$ $\mathcal{S}_e = [-100 ; 100]$

f) $|x| > 0{,}01$ équivaut à $x < -0{,}01$ ou $x > 0{,}01$ $\mathcal{S}_f =]-\infty ; -0{,}01[\cup]0{,}01 ; +\infty[$

41 page 64

1) $|t-6| = 2$ équivaut à $t - 6 = -2$ ou $t - 6 = 2$ équivaut à $t = 4$ ou $t = 8$

2) $|3t+9| = 5$ équivaut à $3t + 9 = -5$ ou $3t + 9 = 5$

équivaut à $3t = -14$ ou $3t = -4$ équivaut à $t = -\dfrac{14}{3}$ ou $t = -\dfrac{4}{3}$.

42 page 64

$\max(a ; b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant b \\ b & \text{si } a \leqslant b \end{cases}$ (Si $a = b$, $\max(a ; b) = a = b$)

Soit un réel x,

si $x \geqslant 0$ alors $x \geqslant -x$ et $\max(x ; -x) = x$.

Si $x \leqslant 0$ alors $-x \geqslant x$ et $\max(x ; -x) = -x$.

Conclusion : $\max(x ; -x) = |x|$

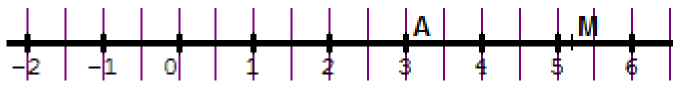
44 page 64 fonction affine par morceaux.

1)

Le point A a pour abscisse 3, le point M a pour abscisse x.

La distance de x à 3 est la longueur du segment $[AM]$

On doit étudier les cas où A est avant M et A est après M.



Si $x = 3$ alors la distance $d(x)$ de x à 3 est égale à 0.

Si $x > 3$ alors la distance $d(x)$ de x à 3 est égale à $x - 3$.

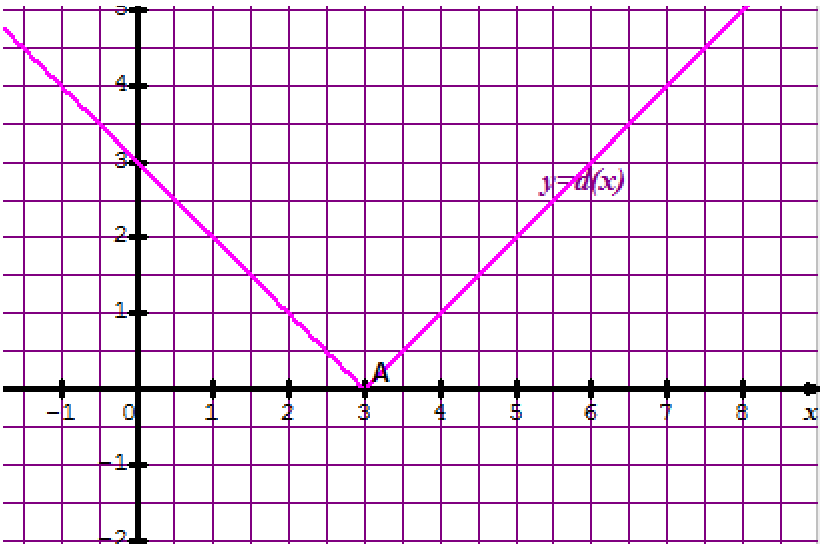
Si $x < 3$ alors la distance $d(x)$ de x à 3 est égale à $3 - x$.

Comme $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ 3-x & \text{si } x \leqslant 3 \end{cases}$, on a : $d(x) = |x-3|$.

2)La représentation graphique de d est la réunion des deux demi-droites d'équations respectives :

$y = x - 3$ sur $[3 ; +\infty[$

$y = 3 - x$ sur $]-\infty ; 3]$



46 page 64 (fonctions $u + \lambda$)

Revoir si nécessaire les variations des fonctions de référence

a) f est définie par $f(x) = \sqrt{x} + 4$

$D_f = [0 ; +\infty[$ et f strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (f est de la forme $u + \lambda$ avec $u = \sqrt{\ }$ et $\lambda = 4$)

b) f est définie par $f(x) = x^2 - 2$

$D_f = \mathbb{R}$

f strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$

f strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (f est de la forme $u + \lambda$ avec $u = \uparrow^2$ (fonction carré) et $\lambda = -2$)

c) f est définie par $f(x) = |x| - 4$

$D_f = \mathbb{R}$

f strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$

f strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (f est de la forme $u + \lambda$ avec $u = |.|$ et $\lambda = -4$)

d) f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3$

$D_f =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

f strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

f strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ (f est de la forme $u + \lambda$ avec u = fonction inverse et $\lambda = +3$)

47 page 65 (Fonctions λu)

Revoir si nécessaire les variations des fonctions de référence

a) f est définie par $f(x) = 4\sqrt{x}$

$D_f = [0 ; +\infty[$ et, comme $4 > 0$,

f strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (f est de la forme λu avec $u = \sqrt{\ }$ et $\lambda = 4$)

b) f est définie par $f(x) = -2x^2$

$D_f = \mathbb{R}$
Comme $-2 < 0$,
f strictement croissante sur $]-\infty\ ; 0]$
f strictement décroissante sur $[0\ ; +\infty[$ (f est de la forme λu avec $u = \uparrow^2$ (fonction carré) et $\lambda = -2$)

c) f est définie par $f(x) = -3\ |x|$
$D_f = \mathbb{R}$
Comme $-3 < 0$,
f strictement croissante sur $]-\infty\ ; 0]$
f strictement décroissante sur $[0\ ; +\infty[$ (*f est de la forme* λu *avec* $u = |.|$ et $\lambda = -3$)

d) f est définie par $f(x) = \dfrac{4}{x} = 4\times\dfrac{1}{x}$
$D_f =]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$
Comme $4 > 0$
f strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$
f strictement décroissante sur $]0\ ; +\infty[$ (*f est de la forme* λu *avec* u = fonction inverse et $\lambda = +4$)

---

51 page 65
OABC est un carré de côté 2 cm.

À tout réel x strictement positif, on associe le point M de $[OA)$ n'appartenant pas à $[OA]$, tel que $AM = x$.
La droite (MB) coupe (OC) en P . On pose $f(x) = OP$
1) On cherche OP en fonction de AM.
Avec la propriété de Thalès :
On sait que $A \in [OM]$, d'où, $OA + AM = OM$ $\qquad OM = 2 + x$
Comme $(AB) \parallel (OP)$, le théorème de Thalès appliqué aux triangles *MOP* et *MAB* donne :
$\dfrac{OP}{AB} = \dfrac{OM}{AM}$, d'où, OP = $\dfrac{AB\times(OA+AM)}{AM} = \dfrac{2\times(2+x)}{x} = \dfrac{4+2x}{x} = \dfrac{4}{x} + 2$

Avec la trigonométrie (du collège) :
En remarquant que $\widehat{OMP} = \widehat{AMB}$, dans les triangles rectangles *MOP* et *MAB*, on a :
$\tan\ \widehat{OMP} = \dfrac{OP}{OM}$ et $\tan\ \widehat{AMB} = \dfrac{AB}{AM}$, d'où, $OP = \dfrac{OM\times AB}{AM} = ... = 2 + \dfrac{4}{x}$.
2) Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ; +\infty[$ et que $4 > 0$, on a successivement :
Une méthode :
Si $0 < a < b$ alors $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
En multipliant par 4, puis en ajoutant 2 , on obtient :
Si $0 < a < b$ alors $\dfrac{4}{a} + 2 > \dfrac{4}{b} + 2$, soit : $f(a) > f(b)$
la fonction f est strictement décroissante sur $]0\ ; +\infty[$

Une autre méthode :
Soit $0 < a < b$
$f(b) - f(a) = (\dfrac{4}{b} + 2) - (\dfrac{4}{a} + 2) = \dfrac{4}{b} - \dfrac{4}{a} = \dfrac{4(a-b)}{ab}$
Comme $a < b$, $a - b < 0$
Comme $a > 0$ et $b > 0$ alors $ab > 0$.

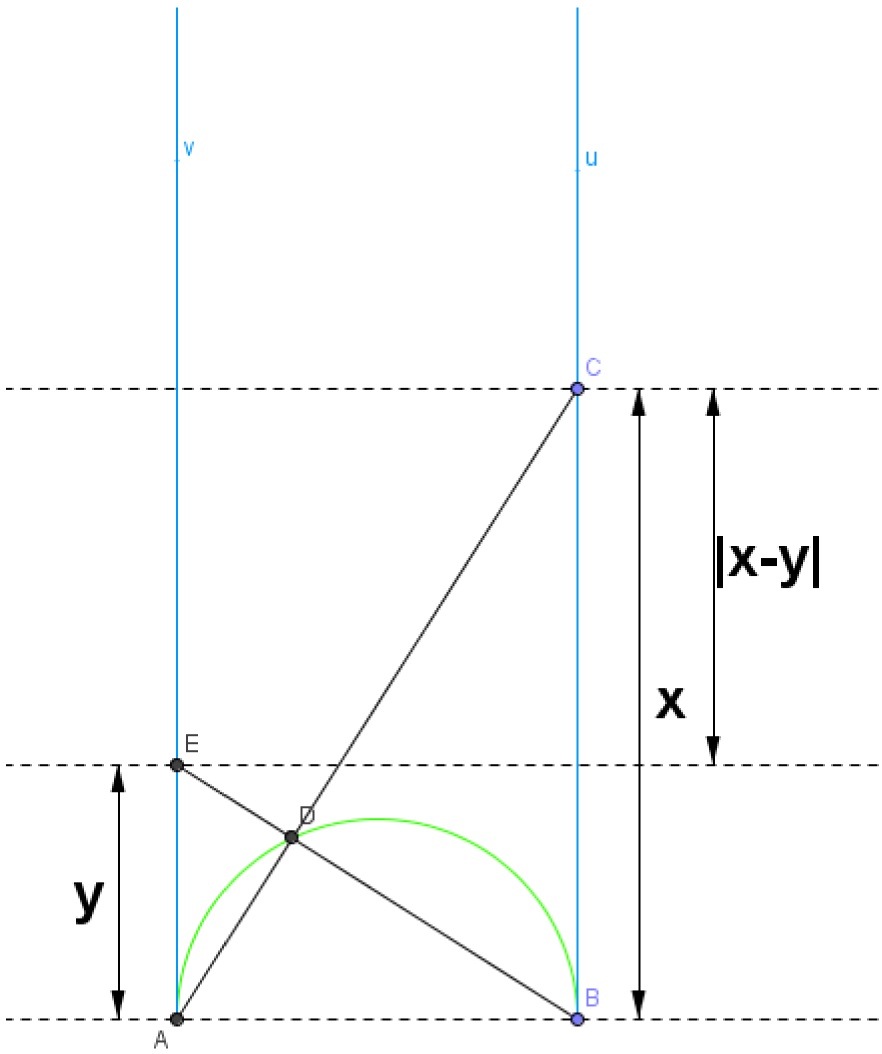
Le quotient $\frac{4(a-b)}{ab}$ est strictement négatif.
$f(b) - f(a) < 0$
On a montré :
Si $0 < a < b$ alors $f(a) > f(b)$
la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Remarque : la fonction f de l'énoncé n'existe pas sur $]-\infty\,;0[$

---

52 page 65

1 a) b) Conjecture :



La fonction f associe, à la longueur BC, la longueur AE.

Il semble que f est décroissante.

Lorsque BC augmente, AE diminue

lorsque BC diminue, AE augmente.

BC et AE varient en sens contraire.

La fonction $f : BC \mapsto AE$ définie sur $]0\ ;+\infty[$ est décroissante.

Comprendre l'énoncé : notion de fonction :

À une longueur x (allant de 0 à $+\infty$), on associe une longueur y.

Si $x = 0$, C est en B, et, il n'y a pas de point E (pas de droite (BD) coupant $[Av)$.

La fonction $f : x \mapsto y = f(x)$ est par conséquent définie sur $]0\ ;+\infty[$

2) **Des rappels** :

- Un triangle est inscrit dans un cercle lorsque ses trois sommets sont sur le cercle.
- Le cercle est circonscrit à ce triangle (" circum " signifie " autour de ")

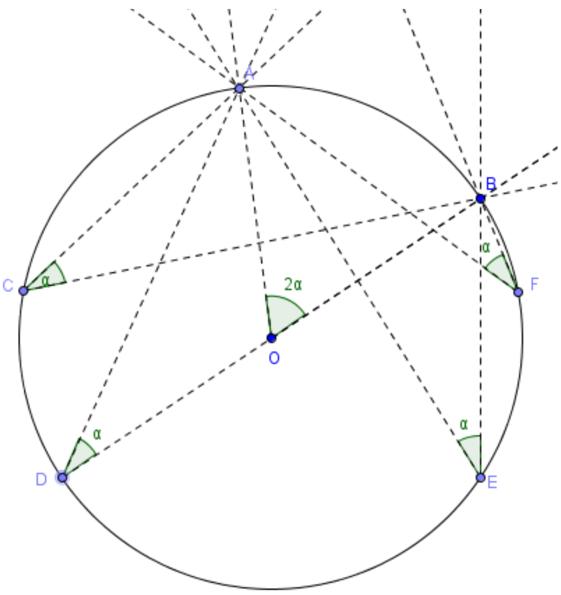
Pour déterminer un triangle rectangle, deux conditions : $\begin{cases} \text{- être inscrit dans un cercle} \\ \text{- un côté du triangle est un diamètre} \end{cases}$.

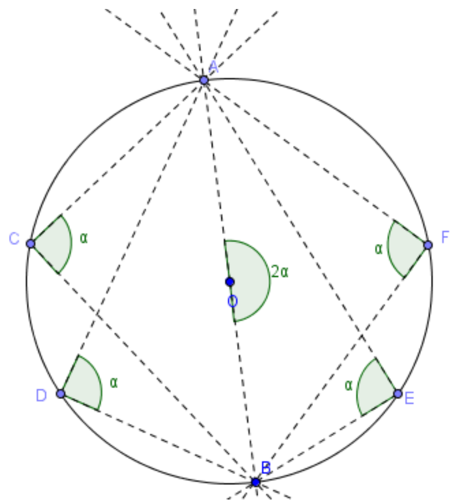
Ce n'est qu'après cela que l'on peut dire que ce côté est l'hypoténuse

- Une figure importante :

Les angles inscrits interceptant le même arc de cercle sont égaux et valent la moitié de l'angle au centre interceptant cet arc. (le cas de l'angle droit étant un cas particulier).

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}\ .$$





a) b) Le triangle ABD est inscrit dans le demi-cercle de diamètre $[AB]$.

Ce triangle est donc un triangle rectangle en D.

On a donc : $AD^2 + BD^2 = AB^2$ (i)

Les triangles EDC, BDC, ADE sont aussi rectangles en D.

$CD^2 + DE^2 = CE^2$ (ii)

$AE^2 = AD^2 + DE^2$ (iii)

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ (iv)

Par somme membre-à-membre des égalités (i) et (ii), on a :

$AB^2 + CE^2 = AD^2 + DB^2 + CD^2 + DE^2$

En remplaçant dans le membre de droite, $AD^2 + DE^2$ par AE^2 (iii) et $BD^2 + DC^2$ par BC^2 (iv), on obtient :

$AB^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2$ (v)

c) **Point méthode** :

au 2b), on a trouvé une égalité où apparaît CE (qui est une longueur dépendant de x).

Il faut donc trouver une autre égalité faisant intervenir CE de façon à substituer CE dans l'égalité du 2b/ pour avoir y en fonction de x.

Les calculs :

$AE^2 = y^2$

$BC^2 = x^2$

Or, $[CE]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés perpendiculaires de longueurs : $|y-x|$ et 4

$CE^2 = |y-x|^2 + 4^2$, d'où, $CE^2 = (y - x)^2 + 4^2 = y^2 - 2xy + y^2 + 16$

Comme $AB^2 = 4^2 = 16$, on obtient d'après l'égalité (v) :

$16 + y^2 - 2xy + x^2 + 16 = y^2 + x^2$ qui équivaut à $2xy = 32$

Comme $x > 0$, on a : $y = \dfrac{16}{x}$

3) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{16}{x}$ définie sur $]0 ; +\infty[$ est décroissante.

En effet, $f(x) = 16\times\dfrac{1}{x}$ et comme $16 > 0$, les variations de f et la fonction inverse sont identiques.

---

54 page 65

a) $\sqrt{x+4}$ est définie si et seulement si $x \geqslant -4$. (On résout : $x + 4 \geqslant 0$)

b) $\sqrt{1-2x}$ est définie si et seulement si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. (On résout : $1 - 2x \geqslant 0$)

c) $\sqrt{2+x}$ est définie si et seulement si $x \geqslant -2$. (On résout : $2 + x \geqslant 0$)

d) $\sqrt{x^2-1}$ est définie si et seulement si $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$. $x \in]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ (On résout : $x^2 - 1 \geqslant 0$)

e) $\sqrt{-x}$ est définie si et seulement si $x \leqslant 0$ (On résout : $-x \geqslant 0$)

f) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$ est définie si et seulement si $x > 0$. (On résout : $\begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x} \geqslant 0 \end{cases}$)

---

55 page 65

Méthode :

Étude des variations de $\sqrt{u}$ sachant les variations de *u*.
1) On doit avoir *u* (*x*) ⩾ 0 (pour calculer l'image $\sqrt{u(x)}$)
2) Comme la fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur [0 ; +∞[, (la fonction " conserve " l'ordre)
la variation de la fonction $f = \sqrt{u}$ est celle de *u* sur les intervalles où *u* (*x*) est postif ou nul.

Application :

a)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
u		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
signe de $u(x)$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{u}$	XX XX XX XX XX XX		0	$\nearrow$	

b)

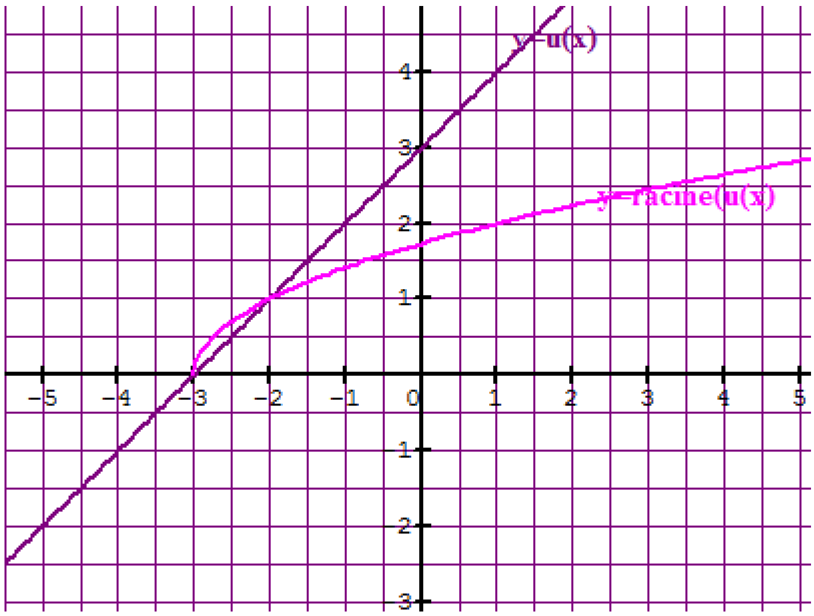
x	$-\infty$		4		$+\infty$
u		$\searrow$	0	$\searrow$	
signe de $u(x)$		$+$	0	-	
$\sqrt{u}$		$\searrow$	0	XXX XXX	XXX XXX

c)

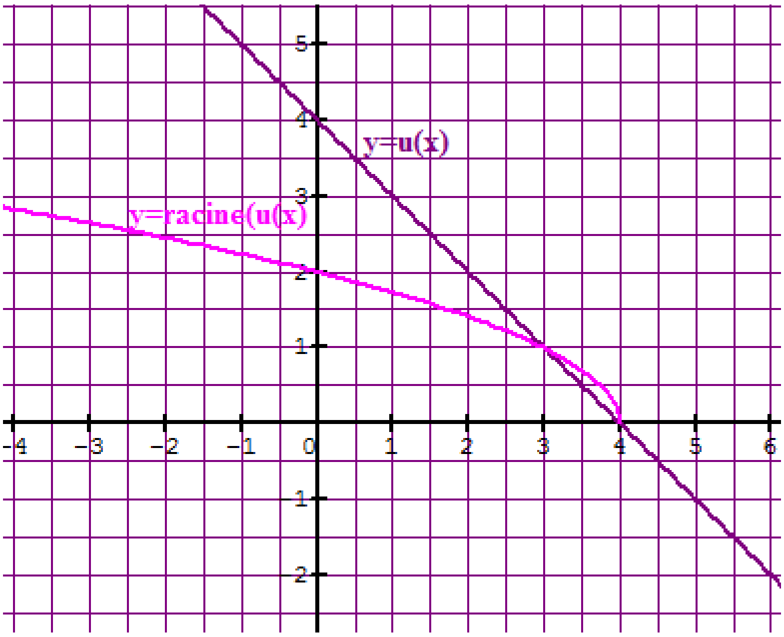
x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
u		↗	0	↗		↘	0	↘	
signe de $u(x)$		–	0	+	+	+	0	–	
$\sqrt{u}$	XX XX XX	XX XX XX	0	↗		↘	0	XX XX XX	XX XX XX

Un exemple graphique dans chaque cas :

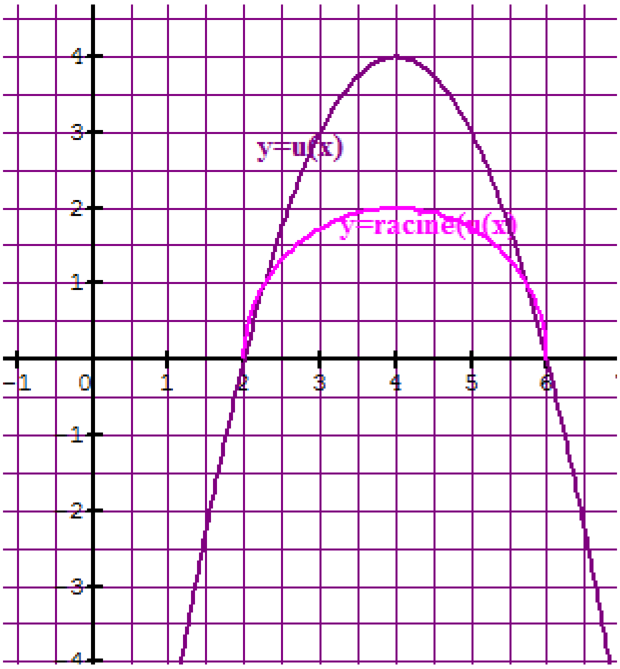
a)



b)



c)



---

64 page 66

a) On sait :

On sait :	**On en déduit**

a)

x	2		$+\infty$
u	4	$\nearrow$	

u est une fonction strictement croissante définie sur $[2\,;+\infty[$ et $u(x) > 0$,

donc, $\dfrac{1}{u}$ est définie sur $[2\,;+\infty[$, et, est une fonction strictement décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

x	2		$+\infty$
$f=1/u$	$1/4$	$\searrow$	

b)

x	-3		0		$+\infty$
u		$\searrow$	2	$\nearrow$	

u est une fonction strictement décroissante sur $[-3\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, et $u(x) > 0$,

donc, $\dfrac{1}{u}$ est définie sur $[-3\,;+\infty[$, et, est une fonction strictement croissante sur $[-3\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$

x	-3		0		$+\infty$
$f=1/u$		$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	

c)

x	-3		$+\infty$
u	0	$\nearrow$	

u est une fonction strictement croissante définie sur $[-3\,;+\infty[$ et $u(-3) = 0$, et, $u(x) > 0$ sur $]-3\,;+\infty[$

donc, $\dfrac{1}{u}$ est définie sur $]-3\,;+\infty[$ et, est une fonction strictement décroissante sur $]-3\,;+\infty[$.

x	-3		$+\infty$
$f=1/u$	‖ $+\infty$	$\searrow$	

d)

x	$-\infty$		**4**		$+\infty$
u		$\searrow$	0	$\searrow$	

u est une fonction strictement décroissante définie sur $]-\infty\,;+\infty[$ et $u(4) = 0$, et, $u(x) > 0$ sur $]-\infty\,;4[$,
$u(x) < 0$ sur $]4\,;+\infty[$.

donc, $\dfrac{1}{u}$ est définie sur $]-\infty\,;4[\,\cup\,]4\,;+\infty[$ et, est une fonction strictement croissante sur $]-\infty\,;4[$ et sur $]4\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		**4**		$+\infty$
$f=1/u$		$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	

66 page 66

a) $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$ f est de la forme $a \times \dfrac{1}{u} + \lambda$ avec $u(x) = x + 1$, $a = 3$, et $\lambda = 2$

La fonction $u : x \mapsto x + 1$ est une fonction affine strictement croissante qui s'annule en -1 en changeant de signe.

On en déduit :

$\frac{1}{u}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty\ ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$\frac{1}{u}$ est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty\ ; -1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

Comme $3 > 0$, en multipliant par 3, $3\times\frac{1}{u}$ a les mêmes variations que $\frac{1}{u}$, et en ajoutant 2, f a les mêmes variations que $\frac{1}{u}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

b) $f(x) = -\frac{3}{-2x+4} + 2$ f est de la forme $a\times\frac{1}{u} + \lambda$ avec $u(x) = -2x + 4$, $a = -3$, et $\lambda = 2$

La fonction $u : x \mapsto -2x + 4$ est une fonction affine strictement décroissante qui s'annule en 2 en changeant de signe.

On en déduit :

$\frac{1}{u}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{2\} =]-\infty\ ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$\frac{1}{u}$ est une fonction strictement croissante sur $]-\infty\ ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$

En multipliant par -3 : $-3\times\frac{1}{u}$ est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$

En ajoutant 2, f a les mêmes variations que $-3\times\frac{1}{u}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

c) $f(x) = -1 + \frac{5}{x^2+1}$ f est de la forme $a\times\frac{1}{u} + \lambda$ avec $u(x) = x^2 + 1$, $a = 5$, et $\lambda = -1$

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Le minimum atteint en 0 vaut 1, d'où, $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit :

$\frac{1}{u}$ est définie sur ℝ.

$\frac{1}{u}$ est une fonction strictement croissante sur $]-\infty\ ;0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ (le maximum atteint en 0 vaut $\frac{1}{1}=1$)

En multipliant par 5 : comme $5 > 0$,

$5\times\frac{1}{u}$ est une fonction strictement croissante sur $]-\infty\ ;0]$ et strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ (le maximum atteint en 0 vaut 5)

En ajoutant -1, f a les mêmes variations que $\frac{5}{u}$. (le maximum atteint en 0 vaut 4)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	4	$\searrow$

d) $f(x)=2-\frac{3}{\sqrt{x}+1}$ $\qquad$ f est de la forme $-3\times\frac{1}{u}+\lambda$ avec $u(x)=\sqrt{x}+1$ et $\lambda=2$

u: $x\mapsto\sqrt{x}+1$ a le même ensemble de définition et la même variation que la fonction $\sqrt{\ }$,
d'où, u est définie sur $[0\ ;+\infty[$
u est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$
le minimum atteint en 0 est 1, d'où, $u(x)>0$.

On en déduit :

$\frac{1}{u}$ est définie sur $[0\ ;+\infty[$

$\frac{1}{u}$ est une fonction strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$ (le maximum atteint en 0 vaut $\frac{1}{1}=1$)

En multipliant par -3 : comme $-3 < 0$

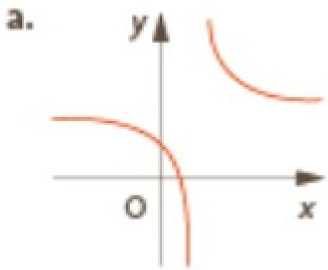
$-3\times\frac{1}{u}$ est une fonction strictement croissante sur sur $[0\ ;+\infty[$ (le minimum atteint en 0 vaut -3)

En ajoutant 2, f a les mêmes variations que $\frac{-3}{u}$. (le minimum atteint en 0 vaut -1)

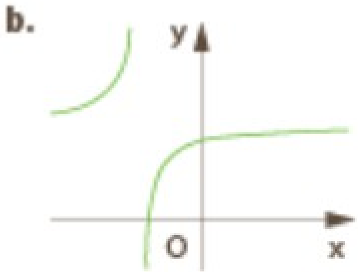
x	0	$+\infty$
f	-1	$\nearrow$

67 page 66

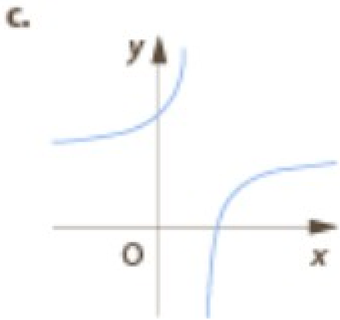
$f(x) = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ f n'est pas définie en 1, f est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition. (voir ex 66 a)) Graphique a/



$g(x) = 3 - \dfrac{1}{x+2}$ g n'est pas définie en –2, g est strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine de définition. Graphique b/

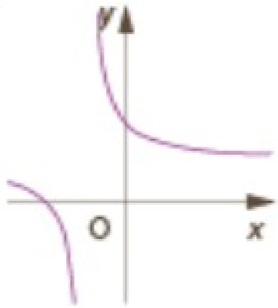


$h(x) = \dfrac{2x-3}{x-1} = \dfrac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \dfrac{1}{x-1}$ h n'est pas définie en 1, h est strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine de définition. Graphique c/



$k(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$ k n'est pas définie en –1, k est strictement décroissante sur chaque intervalle de son domaine de définition. Graphique d/

d.



70 page 67

$f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ pour $x \neq -2$

Rappel : la fonction f est une fonction homographique.

L'étude de ce type de fonctions est liée à celle de la fonction inverse.

1). Comme $3(x + 2) - 7 = 3x - 1$, pour tout $x \neq -2$, on a, en divisant par $x + 2$, $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2} = 3 + \dfrac{-7}{x+2}$

2). En posant $a = 3$ et $b = -7$, on a $f(x)$ de la forme $a + \dfrac{b}{x+2}$

La fonction f s'écrit sous la forme $f : x \mapsto 3 + \dfrac{-7}{x+2}$

3) On peut écrire la **fonction** f sous forme d'opérations usuelles sur les fonctions : $f = a + b\times\dfrac{1}{u}$ où ***u* est une fonction.**

Méthode : On va donc appliquer successivement (et dans l'ordre) les propriétés du cours …

étape 1 :

Étude de $u : x \mapsto x + 2$ u est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

u s'annule en changeant de signe en -2

étape 2 :

Étude de $\dfrac{1}{u}$: Puisque u garde un signe constant sur $]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$, la fonction $\dfrac{1}{u}$ a des variations opposées à celles de u, d'où,

$\dfrac{1}{u}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et strictement décroissante sur $]-2\ ; +\infty[$

étape 3 :

Étude de $b\times\dfrac{1}{u}$: Comme $b < 0$, la fonction $b\times\dfrac{1}{u}$ a des variations opposées à celles de $\dfrac{1}{u}$, d'où,

$b\times\dfrac{1}{u}$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et strictement croissante sur $]-2\ ; +\infty[$

étape 4 :

Étude de $a + b\times\dfrac{1}{u}$

En ajoutant la constante a, les variations de $a + b\times\dfrac{1}{u}$ sont celles de $b\times\dfrac{1}{u}$, d'où,

f est strictement croissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et strictement croissante sur $]-2\ ; +\infty[$.

Résumé dans un tableau (synthèse) :

Commentaires				
La variable	x	$-\infty$	-2	$+\infty$
La fonction u **(fonction affine)**	*variations de* $x \mapsto x+2$		↗	
Signe de $u(x)$ Nécessaire pour étudier $\frac{1}{u}$.	signe de $x+2$	$-$	0	$+$
La fonction $\frac{1}{u}$	*variations de* $x \mapsto \frac{1}{x+2}$	↘	‖	↘ ?
La fonction $-7\times\frac{1}{u}$ $-7<0$	*variations de* $x \mapsto \frac{-7}{x+2}$	↗	‖	↗
La fonction $3+(-7)\times\frac{1}{u}$	*variations de* $x \mapsto$ $3+\frac{-7}{x+2}$	↗	‖	↗

71 page 67

a) (Il y a une erreur dans le livre : soit $f(x) = \frac{4x+1}{x-1}$ avec $x \neq 1$, soit $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$ avec $x \neq \frac{1}{2}$).

Avec $f(x) = \frac{4x+1}{x-1}$ avec $x \neq 1$

Comme $4x + 1 = 4(x-1) + 5$, on peut écrire $f(x) = \frac{4(x-1)+5}{x-1} = 4 + \frac{5}{x-1}$

La méthode précédente de l'exercice 70 permet de conclure :

f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 1[$ et strictement décroissante sur $]1\ ; +\infty[$

En effet, la fonction affine $x \mapsto x-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en changeant de signes en 1.

Le coefficient multiplicateur 5 est positif …

Avec $f(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$ avec $x \neq \frac{1}{2}$).

$4x + 1 = 2(2x-1) + 3$, d'où, $f(x) = \frac{4(2x-1)+3}{2x-1} = 4 + \frac{3}{2x-1}$

f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$ et strictement décroissante sur $]\ \frac{1}{2}\ ;+\infty[$

En effet, la fonction affine $x \mapsto 2x-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en changeant de signes en $\frac{1}{2}$

Le coefficient multiplicateur 3 est positif …

Commentaires					
La variable	x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
La fonction u **(fonction affine)**	*variations de* $x \mapsto 2x-1$	↗			
Signe de u (x) Nécessaire pour étudier $\frac{1}{u}$.	signe de $2x-1$	$-$	0	$+$	
La fonction $\frac{1}{u}$	*variations de* $x \mapsto \frac{1}{2x-1}$	↘	‖	↘	?
La fonction $3\times\frac{1}{u}$ $3>0$	*variations de* $x \mapsto \frac{3}{2x-1}$	↘	‖	↘	
La fonction $4+3\times\frac{1}{u}$	*variations de* $x \mapsto 4+\frac{3}{2x-1}$	↘	‖	↘	

b) $f(x) = \frac{-4x+2}{x+6}$ avec $x \neq -6$

Comme $-4x+2 = -4(x+6)+26$, on peut écrire $f(x) = \frac{-4(x+6)+26}{x+6} = -4 + \frac{26}{x+6}$

La méthode précédente permet de conclure :

f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;-6[$ et strictement décroissante sur $]-6\ ;+\infty[$

En effet, la fonction affine $x \mapsto x+6$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en changeant de signes en -6.

Le coefficient multiplicateur 26 est positif …

73 page 67

(quand la proposition est vraie, il faut la prouver grâce aux propriétés (générales) ...

quand la proposition est fausse, un contre-exemple suffit)

Proposition (A) :

" Si $a = b$ alors $|a| = |b|$ " est une proposition vraie.

En effet, par la fonction valeur absolue, un réel a une et une seule image.

Complément :

Par définition d'une fonction f définie sur un ensemble D_f, un élément de D_f a une et une seule image.

On a donc : a et b étant des éléments de D_f, Si a = b alors f(a) = f(b)

Proposition (B) :

" Si $|a| = |b|$ alors $a = b$" est une proposition fausse.

Contre-exemple :

Prenons $a = -3$, $b = 3$.

On a : $|-3| = |3|$, mais $-3 \neq 3$

Complément :

Cette proposition est la réciproque de la proposition précédente.

Pour la plupart des fonctions f, f(a) = f(b) ***n'implique pas*** *l'égalité de a et b.*

Proposition (C) :

" $|a| = |b|$ si et seulement si $a^2 = b^2$ " est une proposition vraie.

En effet : $|a| = \begin{cases} a \\ \text{ou} \\ -a \end{cases}$ et $|b| = \begin{cases} b \\ \text{ou} \\ -b \end{cases}$

Comme $a^2 = (-a)^2 = a^2$ et $b^2 = (-b)^2 = b^2$, on a :

on a montré : " Si $|a| = |b|$ alors $a^2 = b^2$"

Réciproquement :

Soit $a^2 = b^2$, on a alors : $a = b$ ou $a = -b$.

Comme $|b| = |-b|$, on obtient : $|a| = |b|$.

Complément :

Pour ***prouver une équivalence****, on doit montrer que l'implication et sa réciproque sont vraies*

Proposition (D) :

" $|a-b| = a + b$ " est une proposition fausse

Contre-exemple :

Prenons $a = 3$ et $b = -1$

$|3-(-1)| = |4| = 4$

$3 + (-1) = 2$

$4 \neq 2$

Rappel de la définition de la valeur absolue :

$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geqslant b \\ b-a & \text{si } a \leqslant b \end{cases}$

par conséquent, pour avoir $|a-b| = a + b$*, il faut :* $\begin{cases} a-b=a+b \\ \text{ou} \\ b-a=a+b \end{cases}$ *soit :* $\begin{cases} b=0 \\ \text{ou} \\ a=0 \end{cases}$

Proposition (E) :

" $|a|^2 = |a^2|$ " est une proposition vraie.

Preuve :

$|a|^2 = |a| \times |a| = \begin{cases} a \times a \\ \text{ou} \\ (-a)\times(-a) \end{cases} = a^2$ dans les deux cas.

$|a^2| = a^2$ puisque a^2 positif.

Remarque *: Cette question met en évidence l'ordre des " opérations " à effectuer.*

Pour calculer $|a|^2$ *, on fait :* $a \mapsto |a| \mapsto |a|^2$ *(valeur absolue suivie de carré)*

Pour calculer $|a^2|$ *, on fait :* $a \mapsto a^2 \mapsto |a^2|$ *(carré suivi de la valeur absolue)*

Dans la plupart des cas, on ne peut pas changer l'ordre des " opérations ".

Exemple *: $(a + b)^2$ (somme de a et b suivie du carré de la somme) et $a^2 + b^2$ (carrés de a et b suivis de la somme des carrés)*

---

74 page 67

1) f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u : x \mapsto -x^2 + 4x + 5$ (Fonction du second degré)

Point méthode : On a besoin de déterminer le signe de $u(x)$ *($\sqrt{u}$ est définie si et seulement si $u(x) \geqslant 0$)*

et des variations de u *($\sqrt{u}$ et u ont les m^mes variations sur les intervalles où $\sqrt{u}$ est définie)*

Étude de u :

Signe de u (x) :

On peut remarquer : $u(x) = -(x^2 - 4x - 5) = -[(x-2)^2 - 4 - 5] = -[(x-2)^2 - 9] = -(x - 2 - 3)(x - 2 + 3)$

$u(x) = -(x-2)^2 + 9$ (forme canonique)

$u(x) = -(x-5)(x+1)$

On peut aussi faire : discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 20 = 36 = 6^2$ et $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$

f est définie sur $[-1 ; 5]$ car $u(x) \geqslant 0$ sur $[-1 ; 5]$

Variations de u :

Comme le signe de -1 coefficient de x^2 est négatif et que $\alpha = \dfrac{-4}{2\times(-1)} = 2$,

la fonction u est croissante sur $[-1 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 5]$.

$u(2) = 9$ et donc $f(2) = 3$

Comme u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations, on a :

x	-1		2		5
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

2) $g(x) = -f(x)$

Point méthode :

on connaît la variation de f et g est de la forme λf avec λ = –1.

Étude de g :
comme le facteur $-1 < 0$, g et f ont des variations opposées, d'où,

x	-1		2		5
$g(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

3 a)b) Tracé ...

méthode :

On calcule quelques valeurs pour construire C_f... (on a déjà 3 points dans l'étude de f), on trace C_g symétrique de C_f par rapport à l'axe des abscisses.

Preuve de la symétrie dans un repère orthonormal: Soit $M(x, f(x))$ un point de C_f. Le point $M'(x ; -f(x))$ symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses est point de C_g puisque $g(x) = -f(x)$.

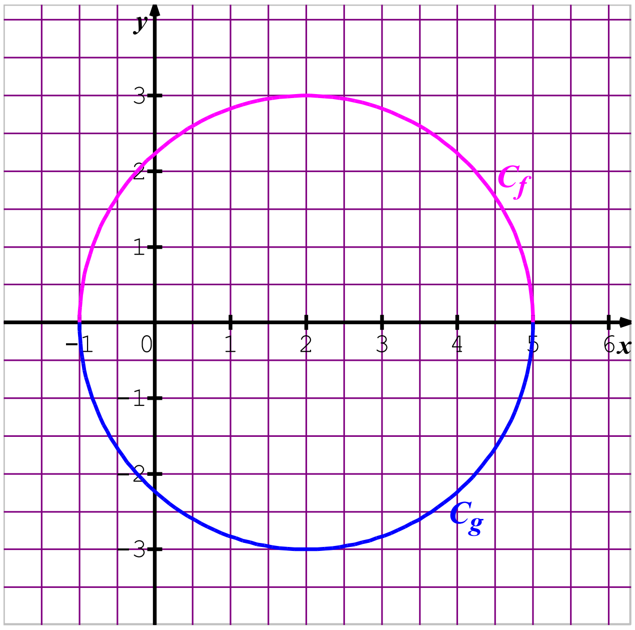
On a donc : Si $M \in (Ox)$ alors $M' \in (Ox)$

Si $M \notin (Ox)$ alors $M' \notin (Ox)$,

le milieu K de $[MM']$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_K = \dfrac{x+x}{2} = x \\ y_K = \dfrac{f(x)+(-f(x))}{2} = 0 \end{cases}$ donc, $K \in (Ox)$

$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x-x=0 \\ -f(x)-f(x)=-2f(x) \end{pmatrix}$, d'où, $\overrightarrow{MM'}$ colinéaire à $\vec{j}$ ....

L'axe (Ox) est la médiatrice de $[MM']$



4- Soit $A(2\ ;\ 0)$

l'objectif de l'énoncé est de démontrer une équivalence.

Point méthode :

En général, pour démontrer une équivalence, on démontre deux implications.

Si $M(x\ ;\ y)$ est un point de C_f alors $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$

et la réciproque :

Si $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$ alors $M(x\ ;\ y)$ est un point de C_f

***démonstration de :* Si $M(x\ ;\ y)$ est un point de C_f alors $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$**

Donnée :

$M(x\ ;\ y)$ un point de C_f.

On a donc : $y = \sqrt{-x^2+4x+5}$ et $y \geqslant 0$.

$AM^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 = x^2 - 4x + 4 + (-x^2 + 4x + 5) = 9$

on a montré : si $M \in C_f$ alors $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$.

démonstration de la réciproque :

Donnée :

$AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$.

On donc : $AM^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 = 9$

d'où, $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9$, soit : $y^2 = -x^2 + 4x + 5$

Comme $y \geqslant 0$, on obtient : $y = \sqrt{-x^2+4x+5} = f(x)$, donc : $M \in C_f$.

on a montré : si $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$ alors $M \in C_f$.

Finalement : *$M \in C_f$ si et seulement si $AM^2 = 9$ et $y \geqslant 0$.*

C_f est donc l'ensemble des points d'ordonnée positive situés à la distance 3 du point A.
C_f est donc le demi-cercle au-dessus de l'axe des abscisses de centre A et de rayon 3.
$C_f \cup C_g$ est le cercle de centre A et de rayon 3.

---

102 page 70

Tracé

1) a et b deux réels. $M(a\ ;\ b)$ et $N(b\ ;\ a)$

$OM^2 = a^2 + b^2$ et $ON^2 = a^2 + b^2$ (Th. de Pythagore).

OM et ON étant des distances, on a : $OM = ON = \sqrt{a^2 + b^2}$

b) Le milieu P de $[MN]$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_P = \dfrac{a+b}{2} \\ y_P = \dfrac{b+a}{2} \end{cases}$.

Comme $y_P = x_P$, le point P est un point de la droite d d'équation $y = x$.

c) Deux cas :

O et P sont confondus ...

On a donc : $b = -a$ et les points M et N sont sur la droite d' d'équation $y = -x$ peroendiculaire à d en O.

Les points M et N sont donc symétriques par rapport à d.

O et P ne sont pas confondus.

Comme $OM = ON$, le point O est un point de la médiatrice de $[MN]$.

(Lee triangle OMN est isocèle en O).

Le point P milieu de $[MN]$ est aussi un point de la médiatrice de $[MN]$.

La droite (OP) est donc la médiatrice de $[MN]$.

Or, O et P sont deux points distincts de d, donc les droites (OP) et d sont confondues.

Les points M et N sont donc symétriques par rapport à d.

2) a) M est un point d'abscisse a de $\mathscr{C}$ avec $a \geqslant 0$.

L'ordonnée de M est par conséquent $\sqrt{a}$. $M(a\ ;\ \sqrt{a})$

b) D'après le 1/, M' symétrique de M par rapport à d a pour coordonnées $M'(\sqrt{a}\ ;\ a)$

Comme $a = (\sqrt{a})^2$, on a : $y_{M'} = (x_{M'})^2$, donc, le point $M' \in \mathscr{C}'$.

(On a montré :

Si $M \in \mathscr{C}$ alors $M' \in \mathscr{C}'$)

c) Réciproque :

Soit N un point de $\mathscr{C}'$ d'abscisse b avec $b \geqslant 0$.

L'ordonnée de N est par conséquent b^2. $N(b\,;\,b^2)$

N' symétrique de N par rapport à d a pour coordonnées $N'(b^2\,;\,b)$

Comme $b \geqslant 0$, $b = \sqrt{b^2}$, et par conséquent $N' \in \mathscr{C}$.

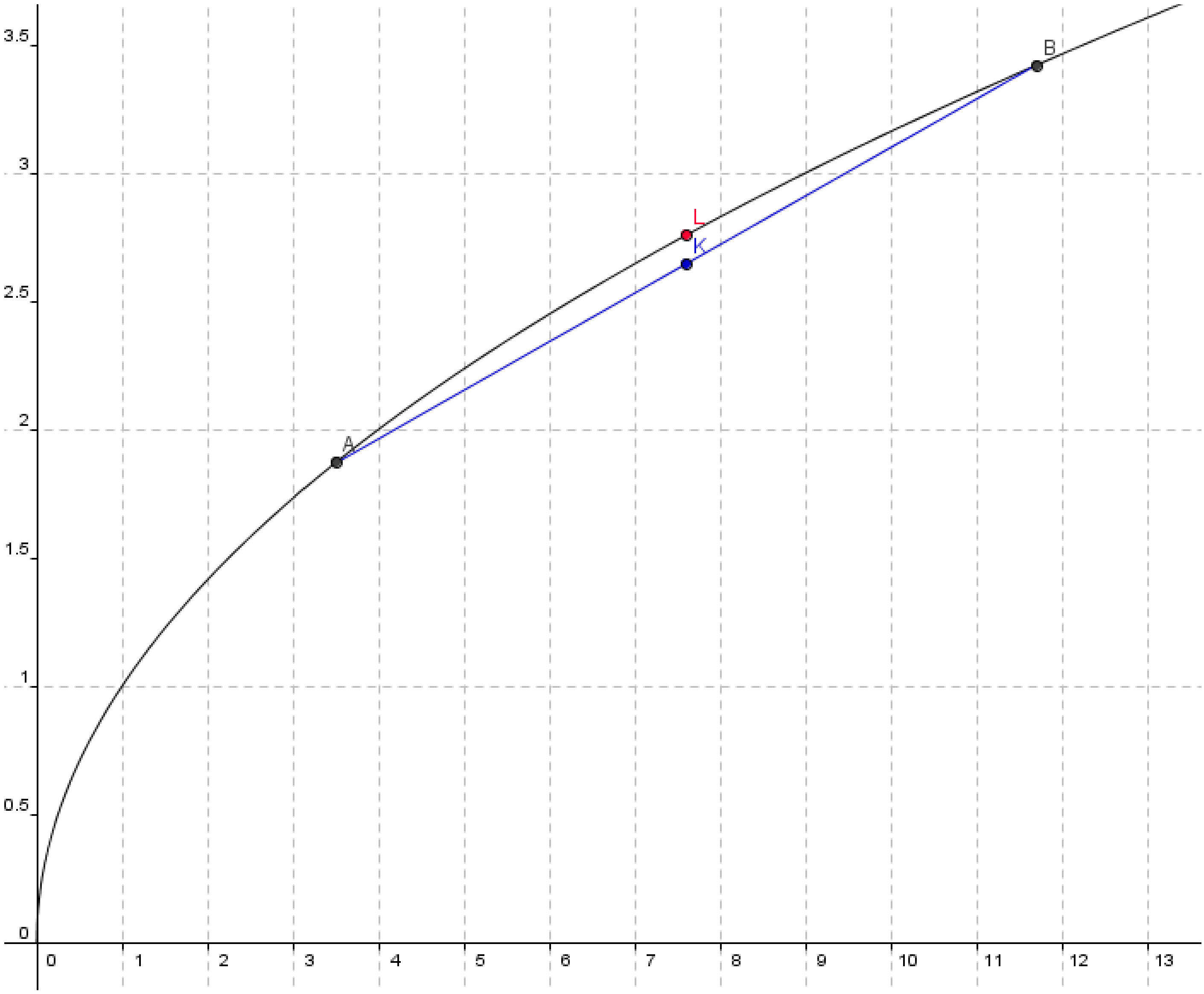
(On a montré :

Si $N \in \mathscr{C}'$ alors $N' \in \mathscr{C}$)

d) Conclusion : Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport à d.

105 page 70

Voir : http://dossierslmm.chez-alice.fr/1S//DM6_105page70.html



1) $\mathscr{C}$ représente la fonction racine carrée.
a et b sont deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.
2) Les coordonnées de $A(a;\ \sqrt{a})$ et de $B(b;\ \sqrt{b})$

3) Les coordonnées du milieu K de $[AB]$: $\begin{cases} x_K = \dfrac{a+b}{2} \\ y_K = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \end{cases}$.

4) a) Le point L de $\mathscr{C}$ ayant pour abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ a pour ordonnée $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$.

b) Graphiquement, K est strictement en-dessous de L, d'où, $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$.

5) **Un réflexe à acquérir** : Une des méthodes permettant de comparer des nombres, de les encadrer est d'utiliser les variations d'une fonction reconnue.

Ici, on a deux nombres positifs $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ et $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$ à comparer, et, le symbole $\sqrt{\ }$

On peut penser à utiliser la fonction " carré " puisque :

Les deux nombres sont positifs, donc, ils sont dans le même ordre que leurs carrés.

$0 < \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$ si et seulement si $0 < \dfrac{1}{4}(a + 2\sqrt{a}\ \sqrt{b} + b) < \dfrac{a+b}{2}$.

Or, $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{1}{4}(a + 2\sqrt{a}\ \sqrt{b} + b) = \dfrac{a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2$

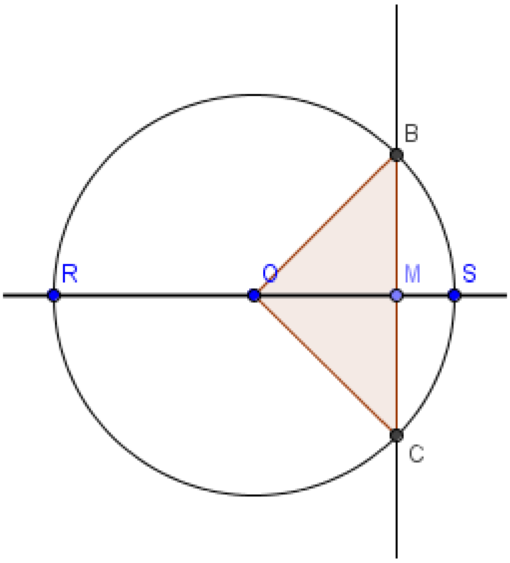
Comme un carré est toujours positif et $a < b$, on a: $\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{1}{4}(a + 2\sqrt{a}\ \sqrt{b} + b) > 0$

Conclusion: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

106 page 71 .

1) La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [0\ ;\ 2]$ ($M \in [OS]$ et $OS = 2$ et $OM = x$)

(On peut considérer que lorsque $M = O$ ou que $M = S$, les triangles OBC sont réduits à un segment et que l'aire est nulle).



2) (Le maximum de la fonction f est la valeur maximale de l'aire de OBC.)

Le maximum m de f semble être égal à 2 lorsque le triangle OBC est un triangle rectangle isocèle en O.

3) L'aire $f(x)$ de OBC est : $f(x) = \dfrac{OM \times BC}{2} = OM \times BM$.

Or, $BM^2 = OB^2 - OM^2 = 4 - x^2$

Conclusion : $f(x) = x\ \sqrt{4-x^2}$

4a) $f(x) - 2 = x\ \sqrt{4-x^2}\ - 2$ Or, $x \geqslant 0$, d'où, $x = \sqrt{x^2}$.

Comme pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, on obtient :

$f(x) - 2 = x\ \sqrt{4-x^2}\ - 2 = \sqrt{x^2(4-x)}\ - 2 = \sqrt{4x^2-x^4}\ - 2$

b) $\sqrt{4x^2-x^4}\ - 2 = \dfrac{(\sqrt{4x^2-x^4}-2)(\sqrt{4x^2-x^4}+2)}{\sqrt{4x^2-x^4}+2} = \dfrac{4x^2-x^4-4}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}$

Le dénominateur est strictement positif (somme d'un nombre positif et de 2)

Étude du signe de $-x^4 + 4x^2 - 4$

En posant $t = x^2$, on ramène l'étude à : $-t^2 + 4t - 4 = -(t^2 - 4t + 4) = -(t - 2)^2$

On a donc : $-x^4 + 4x^2 - 4 = -(x^2 - 2)^2$; soit : $f(x) - 2 = \dfrac{4x^2-x^4-4}{\sqrt{4x^2-x^4}+2} = \dfrac{-(x^2-2)^2}{\sqrt{4x^2-x^4}+2}$

L'expression $(x^2 - 2)^2$ est positive ou nulle. (C'est un carré)

Son opposé est par conséquent négative ou nulle.

Conclusion : Pour tout x de I, $f(x) - 2 \leqslant 0$ et $f(x) = 2$ lorsque $x^2 = 2$.
Comme $0 \leqslant x \leqslant 2$, $f(x) = 2$ lorsque $x = \sqrt{2}$

c) Puisque $f(x) \leqslant 2$ et que $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$, l'aire maximale vaut 2.
En ce cas, le point M est tel que $OM = \sqrt{2}$.
Comme $OB^2 = 4$, $OC^2 = 4$ et $BC^2 = 4$ $BM^2 = 4(4-2) = 8$,
le triangle OBM est rectangle (réciproque du théorème de Pythagore) et isocèle en O.

Complément :
Si m n'est pas connu, on peut chercher pour quelle valeur de m, on a :

pour $x \in [0 ; 2]$, $f(x) - m \leqslant 0$.

m est nécessairement un réel positif (aire)

$$f(x) - m = x\sqrt{4-x^2} - m = \sqrt{4x^2-x^4} - m = \frac{(\sqrt{4x^2-x^4}-m)(\sqrt{4x^2-x^4}+m)}{\sqrt{4x^2-x^4}+m} = \frac{4x^2-x^4-m^2}{\sqrt{4x^2-x^4}+m}$$

En posant : $t = x^2$, on est amené à chercher la forme canonique de $-t^2 + 4t - m^2$, soit : $-(t-2)^2 + m^2 - 4$

Lorsque $m^2 - 4 = 0$ et $m \geqslant 0$, on est assuré d'avoir un réel négatif ou nul. $m = 2$

---

107 page 71

f la fonction racine carrée et g définie par $g(x) = \sqrt{x+1}$ pour $x \geqslant -1$.

1) ***Cours : reconnaître*** $\sqrt{u}$

g est de la forme $\sqrt{u}$ où u est la fonction affine $x \mapsto x + 1$

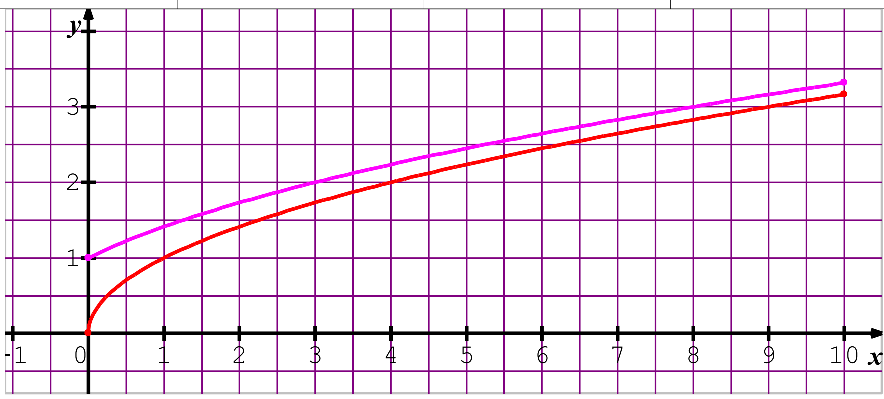
Comme le coefficient 1 de x est strictement positif, la fonction u est strictement croissante.

La fonction $g = \sqrt{u}$ est donc strictement croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

2) Tracer de C_f et C_g sur $[0 ; 10]$

Tableau de valeurs :

x	0	3	4	8	9
$f(x)$	0		2		3
$g(x)$	1	2		3	



Respecter les unités

b) Position respective de C_f et C_g.

Comme la fonction racine carrée est strictement croissante sur [0 ; +∞[, et que pour tout $x \geqslant 0$,

on a : $x < x + 1$, on obtient : $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$.

Par conséquent : $f(x) < g(x)$.

C_f est strictement au-dessous de C_g.
c) Pour de " grandes valeurs " de x , les nombres $f(x)$ et $g(x)$ sont très proches. (Mais, ils restent distincts)

3) L'écart entre les points de C_f et C_g d'abscisse 20 est $\sqrt{21} - \sqrt{20} \approx 0{,}110$ par défaut.

Comme 0,11 > 0,05, on peut distinguer les deux points.

L'écart entre les points de C_f et C_g d'abscisse 100 est $\sqrt{101} - \sqrt{100} \approx 0{,}0498$ par défaut.
Comme 0,0498 < 0,05, on ne peut pas distinguer les deux points.

L'écart entre les points de C_f et C_g d'abscisse 200 est $\sqrt{201} - \sqrt{200} \approx 0{,}035$ par défaut.
Comme 0,035 < 0,05, on ne peut pas distinguer les deux points.

4 a) Pour $x \geqslant 0$, $g(x) - f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Or, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Conclusion : $g(x) - f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

b) Pour $x > 0$, on sait : (voir 2.b/) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

En ajoutant $\sqrt{x}$ aux deux membres de l'inégalité, il vient : $2\sqrt{x} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

Or, la fonction inverse est strictement décroissante sur]0 ; +∞[, d'où : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

Conclusion : Pour tout $x > 0$, $g(x) - f(x) < \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

c) On est sûr de ne plus distinguer sur le graphique les points de C_f et C_g d'abscisse x dès que $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < 0{,}05$

Soit : $2\sqrt{x} > \dfrac{1}{0{,}05}$, soit : $\sqrt{x} > \dfrac{20}{2}$ c-à-d : $\sqrt{x} > 10$

Comme $x > 0$, on obtient : $x > 100$

---

110 page 72

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} \;\frac{+\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \ldots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99} = 10 - 1 = 9$$

De façon générale : $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - 1.$$

Notation : $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=100} \dfrac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}$

$$\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sum_{i=1}^{i=n} \dfrac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}$$