Index

reprendre contact : 4 page 73

Droites	coefficient directeur	ordonnée à l'origine	équation réduite
d_1	2	0	$y = 2x$
d_2	–3	2	$y = -3x + 2$
d_3	0	3	$y = 3$
d_4	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$ (voir au-dessous la justification)	$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
d_5	XXXXXXXXXXXXXX	XXXXXXXXXXXX	$x = -2$

Pour d_4 , on sait que l'équation réduite est de la forme : $y = \frac{2}{3}x + b$ et que le point de coordonnées (1 ; –1) est sur la droite, d'où, $b = -1 - \frac{2}{3} \times 1 = -\frac{5}{3}$

TP5 page 87

La fonction racine carrée en 0.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.

Soit $h > 0$, $\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ car, puisque $h > 0$, $h = \sqrt{h} \times \sqrt{h}$

Si $h = 10^{-1}$ alors $\tau(10^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-1}}} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$

Si $h = 10^{-2}$ alors $\tau(10^{-2}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-2}}} = 10$

Si $h = 10^{-3}$ alors $\tau(10^{-3}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}}} = 10\sqrt{10}$

Si $h = 10^{-4}$ alors $\tau(10^{-4}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-4}}} = 100$

Si $h = 10^{-8}$ alors $\tau(10^{-8}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} = 10\ 000$

Si $h = 10^{-10}$ alors $\tau(10^{-10}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-10}}} = 100\ 000$

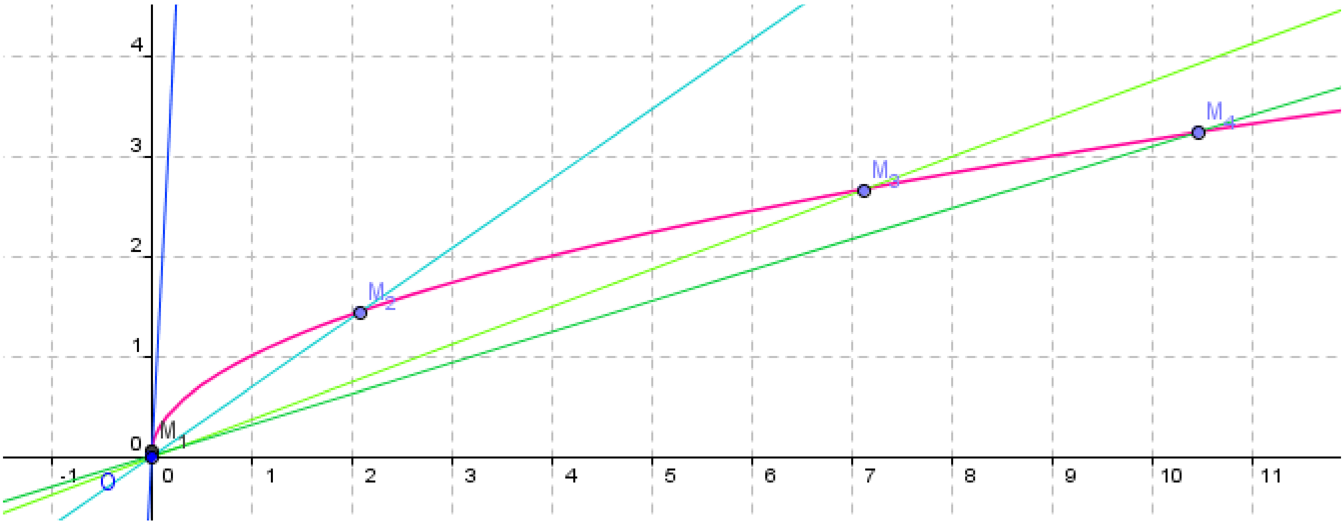
2) $\tau(h) > 10^4$ dès que $\frac{1}{\sqrt{h}} > 10^4$

dès que $\sqrt{h} < 10^{-4}$ (car fonction inverse décroissante sur $]0; +\infty[$

dès que $0 < h < 10^{-8}$ (car fonction carré croissante sur $]0; +\infty[$

$\tau(h) > 10^6$ dès que $0 < h < 10^{-12}$
$\tau(h) > 10^{50}$ dès que $0 < h < 10^{-100}$
3) Quand h tend vers 0, ce rapport $\tau(h)$ prend des valeurs de plus en plus grandes indéfiniment et positives.
On écrit : $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = +\infty$.
f n'est pas dérivable en 0 car $\tau(h)$ ne tend pas un nombre réel quand h tend vers 0.
4) Le rapport $\tau(h)$ représente le coefficient directeur de la droite (OM). Cette droite tend vers l'axe des ordonnées lorsque M se rapproche de O

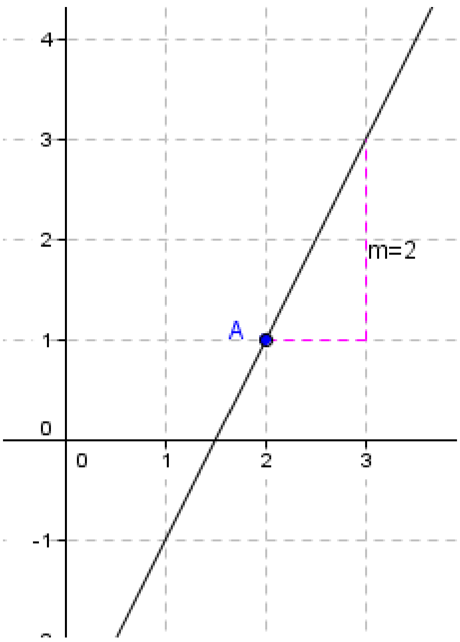
Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

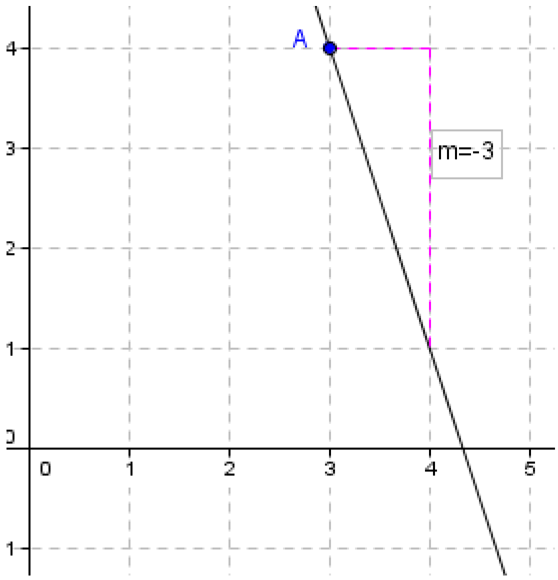


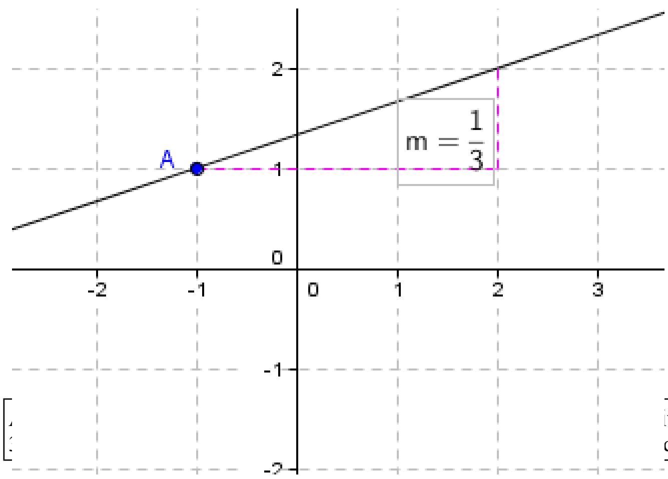
17 page 88

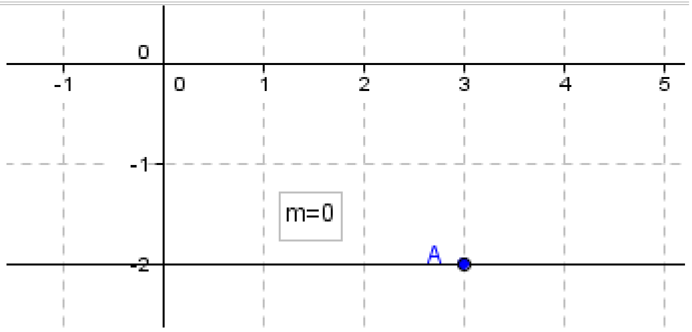
Droites	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
Coefficient directeur	2	-1	0	$-\dfrac{1}{3}$	XXXX	$\dfrac{1}{6}$

18 page 88









19 page 88

La droite D passe par le point $A(3 ; 1)$ et a pour coefficient directeur 4.

L'ordonnée du point P de D d'abscisse 5 est : $4\times(5-3)+1=9$

L'ordonnée du point Q de D d'abscisse 3,7 est : $4\times(3{,}7-3)+1=3{,}8$

L'ordonnée du point R de D d'abscisse 2,6 est : $4\times(2{,}6-3)+1=-0{,}6$

21 page 89

Loi horaire :

$d(t)=t^2+5t$ t en secondes $d(t)$ en mètres

1 a) Soit $h>0$, $\dfrac{d(h)-d(0)}{h}=\dfrac{h^2+5h}{h}=h+5$

b) Lorsque h tend vers 0, le rapport tend vers 5 . On a donc : $d'(0)=5$

La vitesse instantanée au temps $t=0$ est 5 m.sec^{-1}

2) Vitesse instantanée au temps $t=10$ sec.

On calcule : $\dfrac{d(10+h)-d(10)}{h}$ pour $h\neq 0$

$$\frac{d(10+h)-d(10)}{h}=\frac{100+20h+h^2+50+5h-150}{h}=25+h.$$

Quand h tend vers 0, ce rapport tend vers 25.

La vitesse instantanée au temps $t=10$ sec est 25m.sec^{-1}

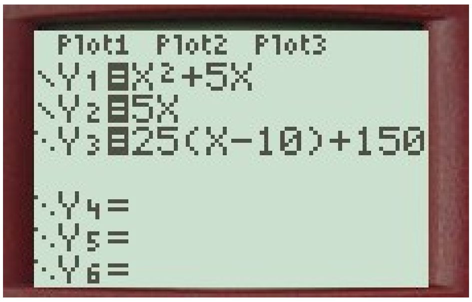
3) Calculatrice :

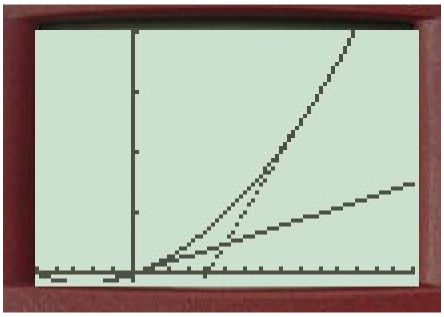
Graphiquement, le coefficient directeur des tangentes à la courbe représentative de d est :

*** 5 au point O(0 ; 0)

*** 25 au point (10 ; 150)

On construit la parabole représentant d d'équation $y=x^2+5x$ et les droites d'équation $y=5x$ et $y=5(x-10)+150$





Menu Math Math nDeriv(

Syntaxe : nDeriv(Fonction,Variable,Nombre)

---

24 page 89

1) En développant $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$, il vient :

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

2 a) Comme $8 = 2^3$, on a en appliquant l'identité démontrée au 1/ :

$(2 + h)^3 - 8 = [(2 + h) - 2][(2 + h)^2 + 2\times(2 + h) + 2^2] = h(12 + 6h + h^2)$

remarque :

le trinôme du second degré $h^2 + 6h + 12$ ne se factorise pas en facteurs de premier degré puisque $\Delta = -12$

b) Soit f la fonction $x \mapsto x^3$

Évaluons pour $h \neq 0$, le quotient : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^3-2^3}{h}$

D'après le 2a), $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 12 + 6h + h^2$

Quand h tend vers 0, ce rapport tend vers 12.
Le nombre dérivé de la fonction cube en 2 vaut 12.
$f'(2) = 12$

---

25 page 89

1 a)b) $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point D d'abscisse 3 : on lit : $f'(3) = 3$

2) $f'(-5) = 4$; $f'(-3) = 0$, $f'(0) = -1$

---

26 page 89

$g'(0) = 3$; $g'(2) = -1$; $g'(-3) = -3$; $g'(4{,}5) = 0$

30 page 90

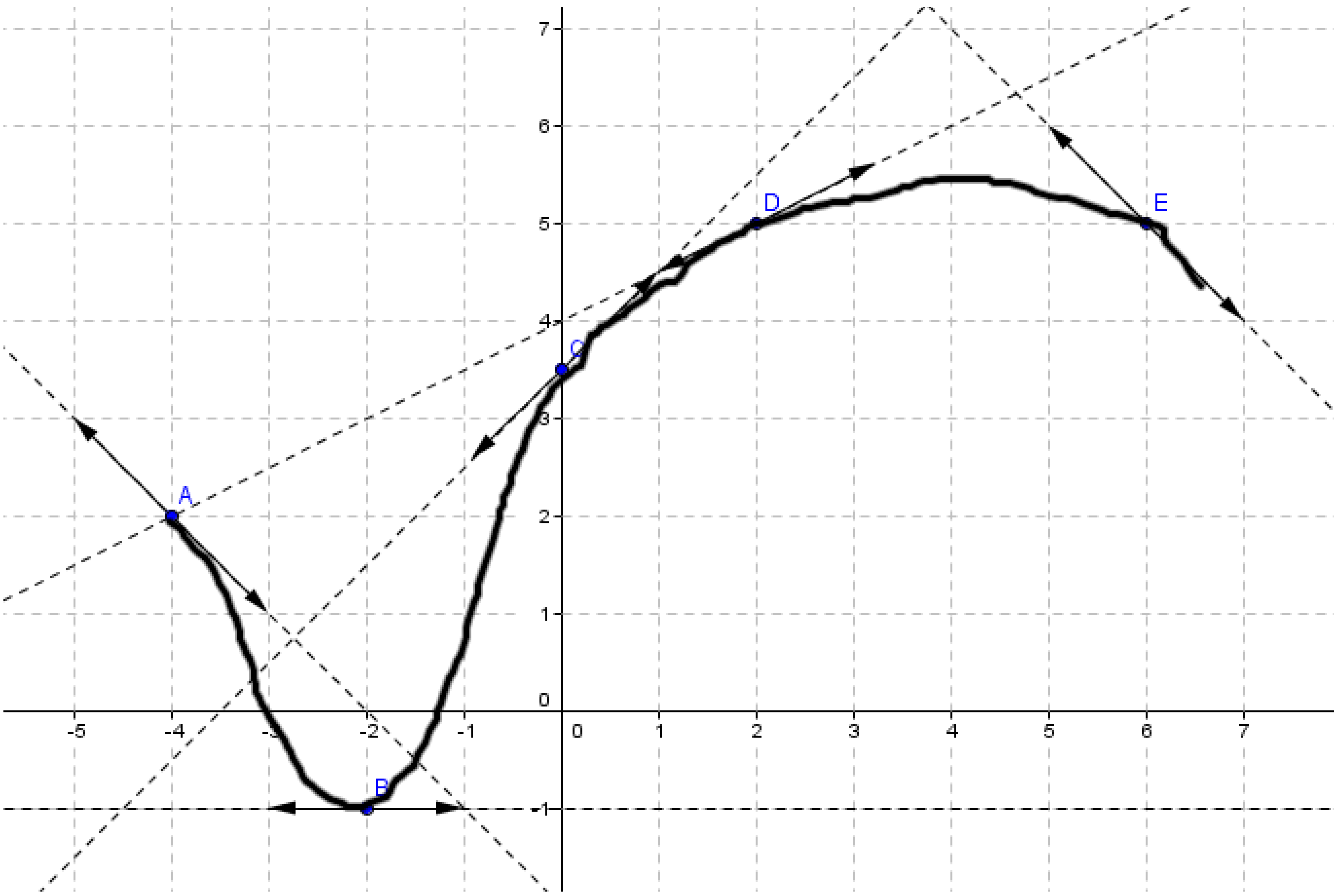
On donne le tableau suivant :

a	–4	–2	**0**	**2**	**6**
$f(a)$	2	–1	3,5	5	5
$f'(a)$	–1	0	1	0,5	–1

On place les points A(–4 ; 2), B(–2 ; –1), C(0 ; 3,5), D(2 ; 5), E(6 ; 5)

On trace les droites passant par ces points de coefficients directeurs respectifs : –1 ; 0 ; 1 ; 0,5 ; –1.

Au voisinage de ces points, on suit la tangente … Ailleurs, aucune information.



33 page 90

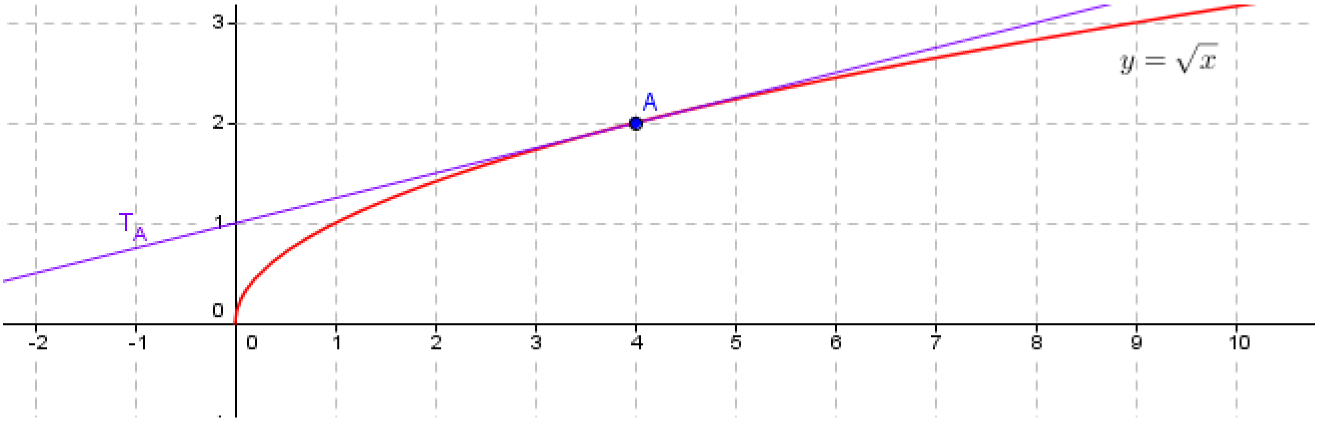
$f : x \mapsto \sqrt{x}$ et sa courbe $\mathscr{C}$.

1) Comme $f'(4) = \dfrac{1}{4}$, le coefficient directeur de T_A à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 4 est :

$y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2 = \dfrac{1}{4}x + 1$

Preuve : pour tout point $M(x\,;y) \in T_A$, et, distinct de A, on a : $\dfrac{y-y_A}{x-x_A} = f'(4)$

Or, $y_A = \sqrt{4} = 2$



Après développement, on obtient l'équation réduite $y = \dfrac{1}{4}x + 1$

---

42 page 91

1) Tracé de H.
2) Le point A(1 ; 1) est un point de H.

La dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est donnée pour $x \neq 0$ par $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Le nombre dérivé en 1 est $f'(1) = -1$, d'où, une équation de T est : $y = -(x-1)+1 = -x+2$.

3) $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ avec $a \neq 0$

a) Une équation de la tangente T en A est : $y = \dfrac{-1}{a^2}(x-a)+\dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

b) Cette tangente T coupe l'axe des abscisses en P. On a donc : $0 = \dfrac{-1}{a^2}x_P + \dfrac{2}{a}$ soit : $x_P = 2a$.

c) On place A, on place en abscisse N de même abscisse que A et on place P telle que OP = 2ON et la droite (AP) est la tangente cherchée.

---

45 page 91

a) $f(x) = x^2 + 1$

f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 2x$.

b) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$
f est définie sur $[0\,;+\infty[$ (fonction $\sqrt{\ }$)
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (En mettant au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$)

c) $f(x) = x^3 + x$

f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 1$

d) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 3$
f est définie sur $]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$
f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\ ; 0[$ et $]0\ ; +\infty[$.
Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$. (En mettant au même dénominateur : $f'(x) = \frac{2x^3-1}{x^2}$)

---

46 page 91
a) $f(x) = 4x$
f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 4$

b) $f(x) = 5x^2$
f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 5\times 2x = 10x$.

c) $f(x) = -3\sqrt{x}$.
f est définie sur $[0\ ; +\infty[$ (fonction $\sqrt{\ }$)
f est dérivable sur $]0\ ; +\infty[$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -3\times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{-2}{x} = -2\times \frac{1}{x}$
f est définie sur $]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$
f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\ ; 0[$ et $]0\ ; +\infty[$.
Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -2\times(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x^2}$.

---

47 page 91
a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 4x + 3$

b) $f(x) = 2x + 1$
f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 2$

c) $f(x) = -4x + 6$
f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = -4$

d) $f(x) = 2x^2 - 5x$
f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.
Pour tout x réel, $f'(x) = 2\times 2x - 5 = 4x - 5$

e) $f(x) = -x + 4$

f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.

Pour tout x réel, $f'(x) = -1$

f) $f(x) = 3x^5 - 2x^2$

f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.

Pour tout x réel, $f'(x) = 3\times5x^4 - 2\times2x = 15x^4 - 4x$

g) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x$

f est définie sur $[0 ; +\infty[$ (fonction $\sqrt{\ }$)

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} + 4 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 4$ (En mettant au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{1+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$)

h) $f(x) = -x^3 + x^2\sqrt{2} + 4x$

f est un polynôme défini et dérivable sur ℝ.

Pour tout x réel, $f'(x) = -3x^2 + \sqrt{2}\times2x + 4 = -3x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4$

---

48 page 91

a) $f(x) = \dfrac{4x-1}{3} = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{3}$

f, étant une fonction affine, est une fonction définie et dérivable sur ℝ $f'(x) = \dfrac{4}{3}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$

f, étant une fonction polynôme du second degré, est une fonction définie et dérivable sur ℝ

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\times2x + \dfrac{1}{2} = x + \dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 2x + 5$

f, étant une fonction polynôme du second degré, est une fonction définie et dérivable sur ℝ

$f'(x) = \dfrac{1}{4}\times2x - 2 = \dfrac{1}{2}x - 2$

d) $f(x) = \dfrac{x^4+3x^2-5x}{4} = \dfrac{1}{4}(x^4 + 3x^2 - 5x)$

f, étant une fonction polynôme de degré 4, est une fonction définie et dérivable sur ℝ

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(4x^3 + 3\times2x - 5) = x^3 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{4}$

---

49 page 91

a) $f(x) = x\sqrt{x}$

f est définie sur $[0 ; +\infty[$ (fonction $\sqrt{\ }$)

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1\times\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times x = \sqrt{x} + \dfrac{x}{2\sqrt{x}}$ En remarquant que, pour $x > 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$,

on a : $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

b) $f(x) = x^2(2x+4)$

f est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $f'(x) = 2x(2x+4) + 2\times x^2 = 6x^2 + 8x = 2x(3x+4)$

c) $f(x) = 4x(x-5)$

f est un polynôme défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $f'(x) = 4(x-5) + 1\times 4x = 8x - 20$

d) $f(x) = x^3(x - \sqrt{x})$

f est définie sur $[0\,;+\infty[$ (fonction $\sqrt{\ }$)

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3x^2(x - \sqrt{x}) + \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\times x^3 =$

$$= 3x^3 - 3x^2\sqrt{x} + x^3 - \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

$$= 4x^3 - 3x^2\sqrt{x} - \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

En remarquant que, pour $x > 0$, $\dfrac{x^3}{\sqrt{x}} = x^2\sqrt{x}$, on a : $f'(x) = 4x^3 - \dfrac{7}{2}x^2\sqrt{x}$.

---

50 page 91

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ f est l'inverse de la fonction affine $v : x \mapsto x-3$ $v(x) = 0$ si et seulement si $x = 3$

$v'(x) = 1$

f est définie sur $]-\infty\,;3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;3[$ et $]3\,;+\infty[$

Pour tout $x \neq 3$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ f est l'inverse de la fonction du second degré $v : x \mapsto x^2-1$

$v(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $x = 1$

$v'(x) = 2x$

f est définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$; $]-1\,;1[$; $]1\,;+\infty[$

Pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 1$, on a : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{x+4} = 2\times\dfrac{1}{x+4}$ $x + 4 = 0$ si et seulement si $x \neq -4$.

f est définie sur $]-\infty\,;-4[\,\cup\,]-4\,;+\infty[$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-4[$ et $]-4\,;+\infty[$

Pour tout $x \neq -4$, on a : $f'(x) = 2\times \dfrac{-1}{(x+4)^2} = \dfrac{-2}{(x+4)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{-5}{x^2+1} = -5\times \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout x réel, d'où,

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = -5\times \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$

---

51 page 91

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ $\qquad$ f est le quotient de u par v avec $\begin{cases} u(x)=2x+1, \text{ d'où } u'(x)=2 \\ v(x)=x-3, \text{ d'où } v'(x)=1 \end{cases}$

$v(x) = 0$ si et seulement si $x = 3$

f est définie sur $]-\infty\ ;3[\ \cup\ ]3\ ;+\infty[$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;3[$ et $]3\ ;+\infty[$

Pour tout $x \neq 3$, on a : $f'(x) = \dfrac{2(x-3)-1(2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+3}$ $\qquad$ f est le quotient de u par v avec $\begin{cases} u(x)=2x^2, \text{ d'où } u'(x)=4x \\ v(x)=x+3, \text{ d'où } v'(x)=1 \end{cases}$

$v(x) = 0$ si et seulement si $x = -3$

f est définie sur $]-\infty\ ;-3[\ \cup\ ]-3\ ;+\infty[$ et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;-3[$ et $]-3\ ;+\infty[$

Pour tout $x \neq -3$, on a : $f'(x) = \dfrac{4x(x+3)-1(2x^2)}{(x+3)^2} = \dfrac{2x^2+12x}{(x+3)^2} = \dfrac{2x(x+6)}{(x+3)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$ $\qquad$ f est le quotient de u par v avec $\begin{cases} u(x)=2x^2+5x+1, \text{ d'où } u'(x)=4x+5 \\ v(x)=x^2+1, \text{ d'où } v'(x)=2x \end{cases}$

$x^2 + 1 \neq 0$ pour tout x réel, d'où,

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = \dfrac{(4x+5)(x^2+1)-2x(2x^2+5x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-5x^2+2x+5}{(x^2+1)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+3}{x}$ $\qquad$ f est le quotient de u par v avec $\begin{cases} u(x)=2\sqrt{x}+3, \text{ d'où } u'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ v(x)=x, \text{ d'où } v'(x)=1 \end{cases}$

" u est définie si et seulement si $x \geqslant 0$ " ET " $v(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ "

donc, f est définie si et seulement si $x > 0$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0\ ;+\infty[$, d'où,

f est définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times x-1\times(2\sqrt{x}+3)}{x^2}$ $\qquad$ En remarquant que pour $x > 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, on a :

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3}{x^2} = \dfrac{-\sqrt{x}-3}{x^2}$.

---

52 page 91

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme du second degré) $f'(x) = 2\times 2x - 5 = 4x - 5$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ f une fonction rationnelle (**quotient** de deux polynômes) et plus précisément, f est une fonction homographique (quotient de deux fonctions affines).

f est donc dérivable sur chaque intervalle $]-\infty\ ;\ 2[$ et sur $]2\ ;\ +\infty[$

On peut écrire $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=2x+3 \\ v(x)=x-2 \end{cases}$ d'où, $\begin{cases} u'(x)=2 \\ v'(x)=1 \end{cases}$

Comme $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}$, on obtient : $f'(x) = \dfrac{2(x-2)-1\times(2x+3)}{(x-2)^2} = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$

c) $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$

f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

f est le produit d'une fonction affine $u : x \mapsto 2-x$ par la fonction $v = \sqrt{\ }$ dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$

f est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Comme $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ avec $\begin{cases} u(x)=2-x \\ v(x)=\sqrt{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x)=-1 \\ v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$, on obtient :

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -1\times\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2-x) = \dfrac{-2x+2-x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$

f est l'inverse de la fonction $v : x \mapsto x^2 + 2$

Comme $v(x) > 0$, pour tout x et que v est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $f = \dfrac{1}{v}$ d'où, $f'(x) = \dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$ avec $v(x) = x^2 + 2$ et $v'(x) = 2x$.

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}$

---

53 page 91

a) $f(x) = (2x + 1)^2$

Posons $u(x) = 2x + 1$ u est une fonction affine, sa dérivée u' est définie par : $u'(x) = 2$

On a alors le produit de u par lui-même.

On a alors : $(u^2)' = 2u'u$

Conclusion : $f'(x) = 2\times 2(2x + 1) = 4(2x + 1)$

b) $f(x) = x^2(x + 3)$

f est le produit de u et v avec $\begin{cases} u(x)=x^2 \\ v(x)=x+3 \end{cases}$, d'où, $\begin{cases} u'(x)=2x \\ v'(x)=1 \end{cases}$.

$f'(x) = 2x(x + 3) + 1\times x^2 = 3x^2 + 6x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2$.

Pour $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-2}{x^3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 3x^2 + \dfrac{x}{5} - 3 = \dfrac{1}{4}x^4 - 3x^2 + \dfrac{1}{5}x - 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{4} \times 4x^3 - 3 \times 2x + \dfrac{1}{5} = x^3 - 6x + \dfrac{1}{5}$

---

54 page 91

a) $f(x) = x^3\sqrt{x}$ est le produit des fonctions u et v définies par $x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$

Comme v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et u dérivable sur $\mathbb{R}$,
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$f'(x) = 3x^2 \times \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times x^3$

b) $f(x) = 2 - \dfrac{x}{x+6}$

f est la somme d'une fonction constante et d'une fonction homographique $u : x \mapsto -\dfrac{x}{x+6}$ définie et dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;-6[$ et $]-6\,;+\infty[$.

Pour tout $x \neq -6$, on a : $f'(x) = 0 - \dfrac{1\times(x+6)-1\times x}{(x+6)^2} = -\dfrac{6}{(x+6)^2}$

c) $f(x) = -\dfrac{3}{2x+3} = -3 \times \dfrac{1}{2x+3}$

f est donc de la forme $k \times \dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 2x + 3$

f est donc dérivable sur les intervalles $]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}[$ et $]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty[$.

$f'(x) = -3 \times \dfrac{-2}{(2x+3)^2} = \dfrac{6}{(2x+3)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3}$

f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $]-\infty\,;-\sqrt{3}[\,\cup\,]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,;+\infty[$

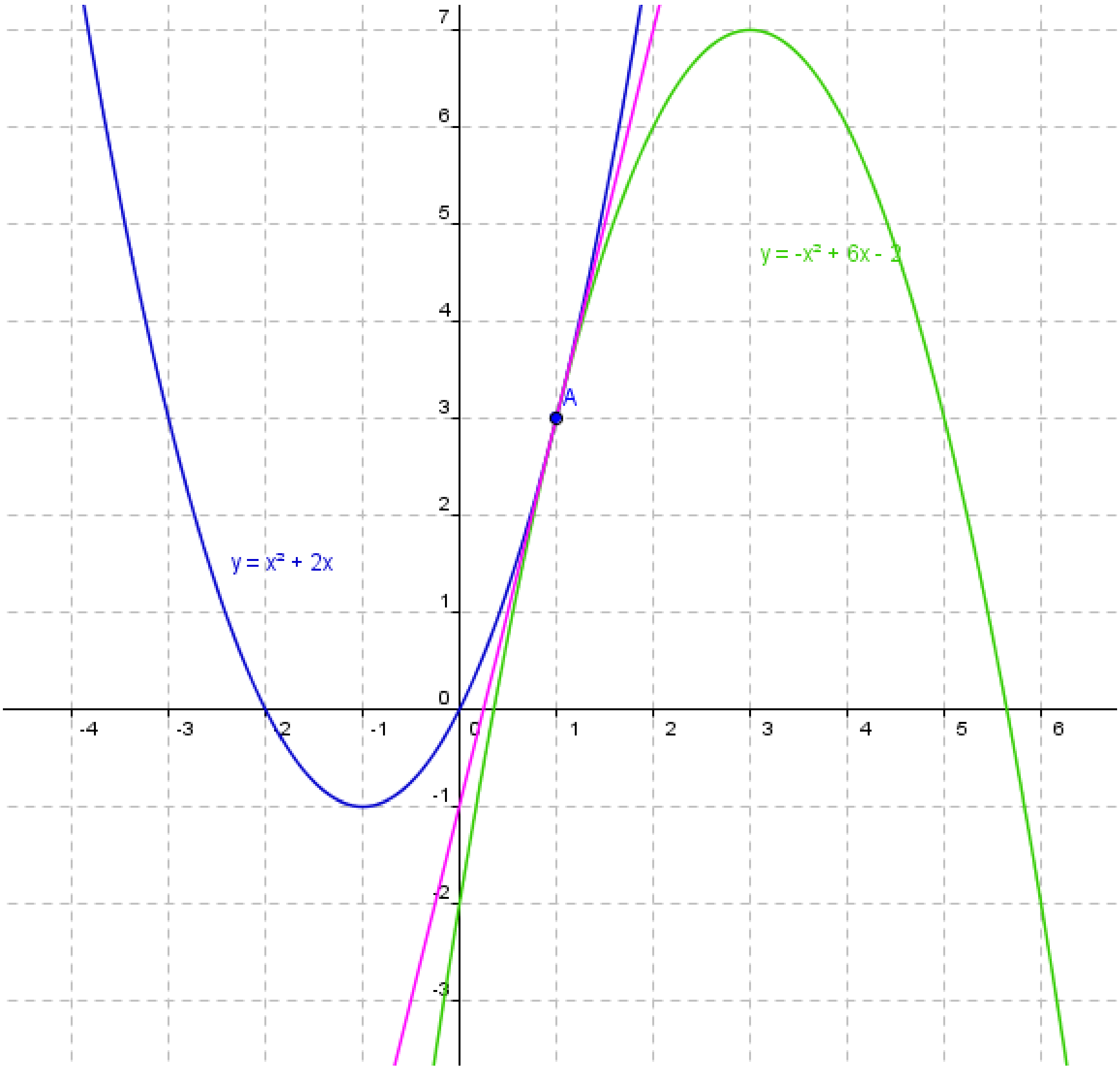
Pour tout $x \neq -\sqrt{3}$ et $x \neq \sqrt{3}$, on a : $f'(x) = \dfrac{1(x^2-3)-2x(x+1)}{(x^2-3)^2} = \dfrac{-x^2-2x-3}{(x^2-3)^2}$

---

57 page 92

$\mathscr{C}_1 : y = x^2 + 2x$, $\mathscr{C}_2 : y = -x^2 + 6x - 2$

1) Tracer



2) Les coordonnées des points communs sont les solutions du système $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

On en tire l'équation : $x^2 + 2x = -x^2 + 6x - 2$ qui est équivalente à $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$2x^2 - 4x + 2 = 0$ équivaut à $2(x-1)^2 = 0$ équivaut à $x = 1$

Les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont pour unique point commun le point $A(1 ; 3)$

3) On pose $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -x^2 + 6x - 2$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_1$ en A est $f'(1)$

Or, $f'(x) = 2x + 2$, d'où, $f'(1) = 4$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_2$ en A est $g'(1)$

Or, $g'(x) = -2x + 6$, d'où, $g'(1) = 4$

Les deux droites ayant le même coefficient directeur 4 et un point commun A sont confondues.

58 page 92 vitesse instantanée

Quelques rappels :

Soit deux dates t_1 et t_2 . On peut poser $t_2 = t_1 + h$ (on a : $h = t_2 - t_1 = \Delta t$)

la fonction $t \mapsto d(t)$ donne la distance parcourue à la date t .

La vitesse moyenne entre les deux dates t_1 et t_2 est : $V_{moyenne} = \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \dfrac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$

La vitesse instantanée à la date t_1 est la limite quand t_2 tend vers t_1 (ou quand h tend vers 0) de la vitesse moyenne ;

on a alors : $v(t_1) = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h} = d'(t_1)$

Savoir : d étant une loi horaire (d est une fonction donnant la distance parcourue en fonction de la durée),

la fonction v " vitesse instantanée " est la dérivée de la fonction d.

$v(t) = d'(t)$

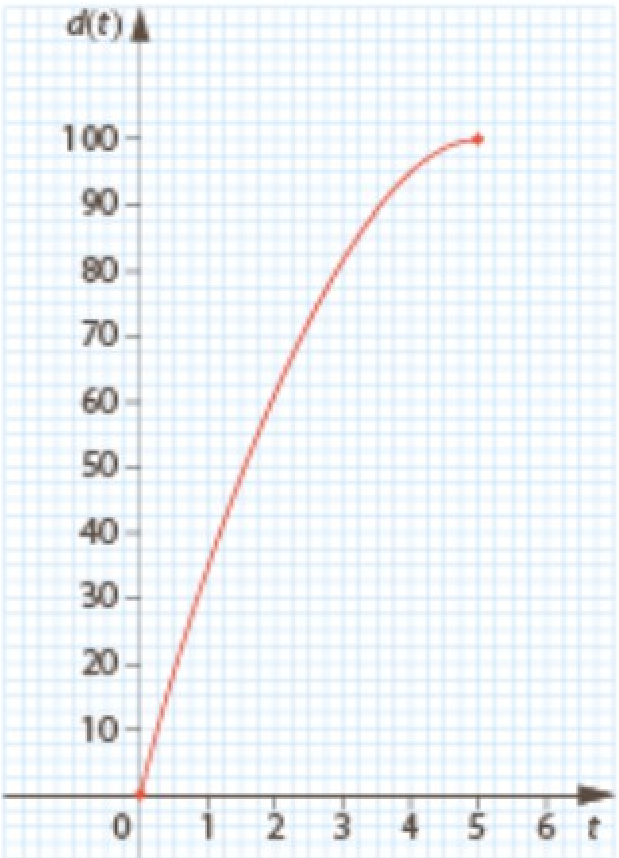
Complément :

La vitesse de la vitesse est l'accélération du mouvement …

La fonction a " accélération " est la dérivée de la fonction vitesse.

On a : $a(t) = v'(t) = d''(t)$ (dérivée seconde de la fonction d

énoncé :



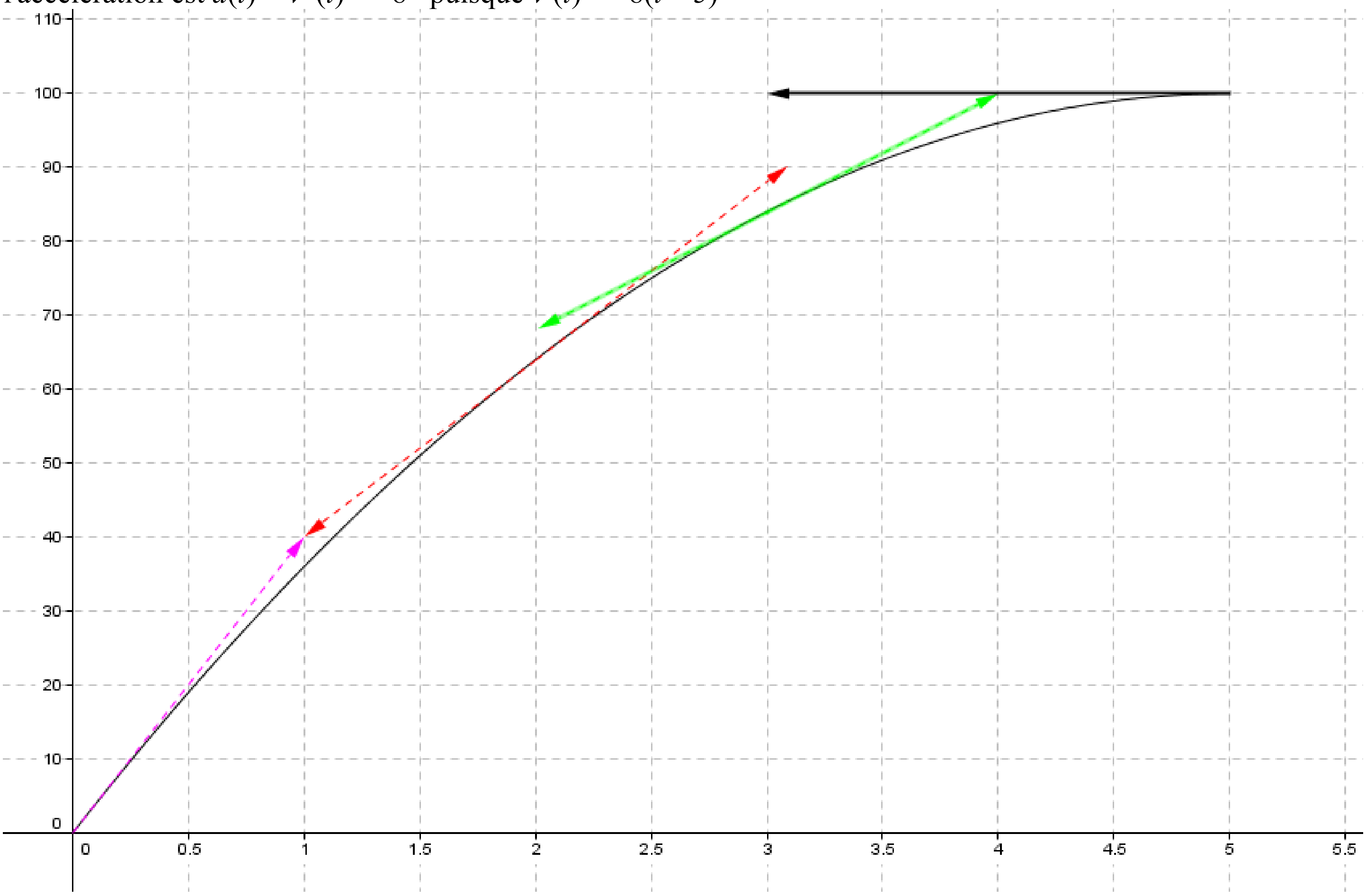
1) **Lecture graphique :**

Pour estimer la vitesse instantanée, on lit le coefficient directeur de la tangente à la date demandée :

Les résultats seront nécessairement approchés.

$t = 5$ sec, on lit : $v(5) = 0$ m.s^{-1}
$t = 0$ sec, on lit : $v(0) \approx 40$ m.s^{-1} (toute valeur entre 30 et 50 ...)
$t = 2$ sec, on lit : $v(2) \approx 25$ m.s^{-1}
Quand $d(t) = 84$ m, on lit : $t \approx 3$ sec et $v(3) \approx 15$ m.s^{-1}
2) par le calcul :
$d(t) = -4(t-5)^2 + 100$ pour $t \in [0 ; 5]$
$v(t) = d'(t) = -4 \times 2 \times 1 \times (t-5)$
$v(5) = 0$ m.s^{-1}
$v(0) = 40$ m.s^{-1}
$v(2) = 24$ m.s^{-1}
$d(t) = 84$ lorsque $-4(t-5)^2 + 100 = 84$, soit : $(t-5)^2 = 4$
$t - 5 = -2$ ou $t - 5 = 2$
Comme $0 \leqslant t \leqslant 5$, on a : $t = 3$, et, $v(3) = 16$ m.s^{-1}

Complément :
l'accélération est $a(t) = v'(t) = -8$ puisque $v(t) = -8(t-5)$



64 page 93 vitesse de dilatation
Par dilatation, le diamètre de la plaque augmente de 0,1 mm par minute

(vitesse de dilatation en longueur : 0,1 mm.min^{-1})

1) À la date $t = 0$ min, le diamètre vaut 50 mm.

À la date t, le diamètre vaut $50 + 0{,}1t$ (mm)
Pour une durée de t minutes, le diamètre s'est dilaté de $0{,}1t$.
Aire de la plaque circulaire :
$\mathcal{A}(t) = \dfrac{\pi\times(50+0{,}1t)^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}\times(50 + 0{,}1t)^2$ (en mm²)
2) La vitesse instantanée d'augmentation de l'aire à la date t est l'image de t par la dérivée de la fonction $\mathcal{A}$, soit : $\mathcal{A}'(t)$
Calcul de $\mathcal{A}'(t)$
La fonction $\mathcal{A}$ est de la forme ku^2 où $k = \dfrac{\pi}{4}$ et $u(t) = 50 + 0{,}1t$ d'où $u'(t) = 0{,}1$
d'autre part : $(u^2)' = 2u'u$
$\mathcal{A}'(t) = \dfrac{\pi}{4}\times2\times0{,}1\times(50 + 0{,}1t) = \dfrac{\pi}{2}\times0{,}1\times(50 + 0{,}1t)$ (en mm².min^{-1})
le diamètre vaut 52 mm lorsque $50 + 0{,}1t = 52$, soit $t = 20$ min.
$\mathcal{A}'(20) = \dfrac{\pi}{4}\times2\times0{,}1\times(50 + 0{,}1\times20) = \dfrac{\pi}{2}\times0{,}1\times52 = 2{,}6\pi$ (en mm².min^{-1})
Remarque :
En développant : $\mathcal{A}(t) = \dfrac{\pi}{4}\times(2\,500 + 10\,t + 0{,}01t^2)$
$\mathcal{A}'(t) = \dfrac{\pi}{4}\times(10 + 0{,}02t)$ et $\mathcal{A}'(20) = \dfrac{\pi}{4}\times(10 + 0{,}02\times20) = \dfrac{10{,}4\,\pi}{4} = 2{,}6\pi$

---

65 page 93
$\mathcal{P}$: $y = 2x^2 - 3x + 1$ et $\mathcal{P}'$: $y = x^2 - 3x + 2$.

Méthode 1 : (les coordonnées d'un point commun sont connues)

On nous donne les coordonnées d'un point commun, il suffit donc de vérifier pour chaque équation :

$A(1\,;\,0)$, comme $2\times1^2 - 3\times1 + 1 = 0$ et $1^2 - 3\times1 + 2 = 0$.

les deux équations sont vérifiées, $A \in \mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}'$.

Méthode 2 : (les coordonnées des points communs ne sont pas connues)

Les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système : $\begin{cases} y=2x^2-3x+1 \\ y=x^2-3x+2 \end{cases}$

On résout : $2x^2 - 3x + 1 = x^2 - 3x + 2$, soit : $x^2 - 1 = 0$.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont deux points d'intersection, l'un d'abscisse 1 et d'ordonnée : $1^2 - 3 + 2 = 0$,

l'autre d'abscisse -1 et d'ordonnée : $(-1)^2 + 3 + 2 = 6$.

$A(1\,;\,0)$ est un des points communs à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{P}$:

soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

$f'(x) = 4x - 3$
$f'(1) = 1$ est le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{P}$:

Coefficient directeur de la tangente en A à $\mathcal{P}$ ⍰

Soit $g(x) = x^2 - 3x + 2$.
$g'(x) = 2x - 3$

$g'(1) = -1$ est le coefficient directeur de la tangente en A à $\mathscr{P}$ ◻

Les deux tangentes sont orthogonales dans un repère orthonormal.
En effet, le point $B(2 ; 1)$ et le point $C(2 ; -1)$ sont des points de chaque tangente et le triangle ABC est rectangle en A.
$BC^2 = 4$, $AB^2 = 2$ et $AC^2 = 2$, la réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure.
(On verra dans le chapitre " produit scalaire " comment déterminer des vecteurs orthogonaux)

---

90 page 96

$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont les représentations graphiques des fonctions f, g, h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 1$,

$g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{1}{2}$ et $h(x) = -x^2 + 4x - 1$

1) Le tableau de variations de f se déduit de celui de la fonction carré puisqu'on ajoute une constante 1.

Comme le coefficient $\dfrac{1}{2}$ de x^2 est positif, la fonction g admet un minimum en -1 qui vaut $g(-1) = 0$.

Comme le coefficient -1 de x^2 est négatif, la fonction h admet un maximum en 2 qui vaut $h(2) = 3$

2) a) Comme $f(1) = 1^2 + 1 = 2$, $g(1) = \dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} = 2$ et $h(1) = -1 + 4 - 1 = 2$,

les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ont en commun le point $A(1 ; 2)$

b) Les tangentes respectives à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ en A ont pour coefficients directeurs respectifs $f'(1)$, $g'(1)$, $h'(1)$.

Or, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x + 1 = x + 1$ et $h'(x) = -2x + 4$

$f'(1) = 2$, $g'(1) = 2$, $h'(1) = 2$.

Les trois tangentes ont le même coefficient directeur et ont un point commun A, elles sont donc confondues.

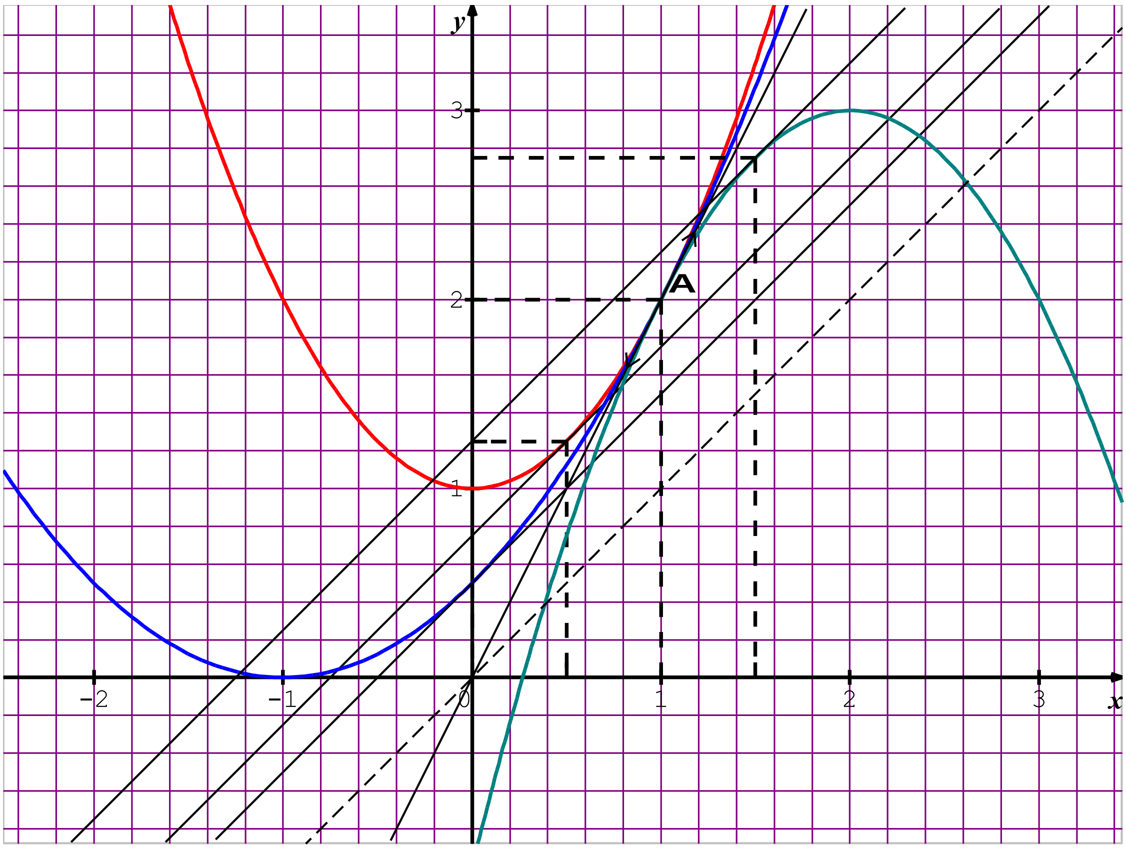
3) Une équation de T, c'est-à-dire, une équation de la droite passant par $A(1 ; 2)$ et de coefficient directeur 2.

On a donc : $\dfrac{y-2}{x-1} = 2$, soit : $y = 2x$ est une équation de T.

4) On place les sommets et leurs tangentes horizontales.

On place le point A et on trace T.

On affine le tracé par quelques points choisis judicieusement en respectant les tableaux de variations.



5) On obtient une droite parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si cette droite a pour coefficient directeur 1.

On résout donc : (pour trouver l'abscisse du point de contact)

$f'(x) = 1$, soit : $x = \dfrac{1}{2}$

$g'(x) = 1$, soit : $x = 0$

$h'(x) = 1$, soit : $x = \dfrac{3}{2}$

Coordonnées des points de contact (ordonnée est l'image par la fonction .... représentée par la courbe) et équations des tangentes (on connaît le coefficient directeur 1 et un point de la tangente) :

T_1 tangente à $\mathscr{C}_1$ en $B\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{4}\right)$ et d'équation : $y = x + \dfrac{3}{4}$

T_2 tangente à $\mathscr{C}_2$ en $C\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et d'équation : $y = x + \dfrac{1}{2}$

T_3 tangente à $\mathscr{C}_3$ en $D\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{11}{4}\right)$ et d'équation : $y = x + \dfrac{5}{4}$

---

91 page 96

1- Il semble que deux tangentes à $\mathscr{C}$ passent par le point S.

2) a un réel.

Le point $A \in \mathscr{C}$, d'où, les coordonnées de $A(a\ ;\ a^2)$.

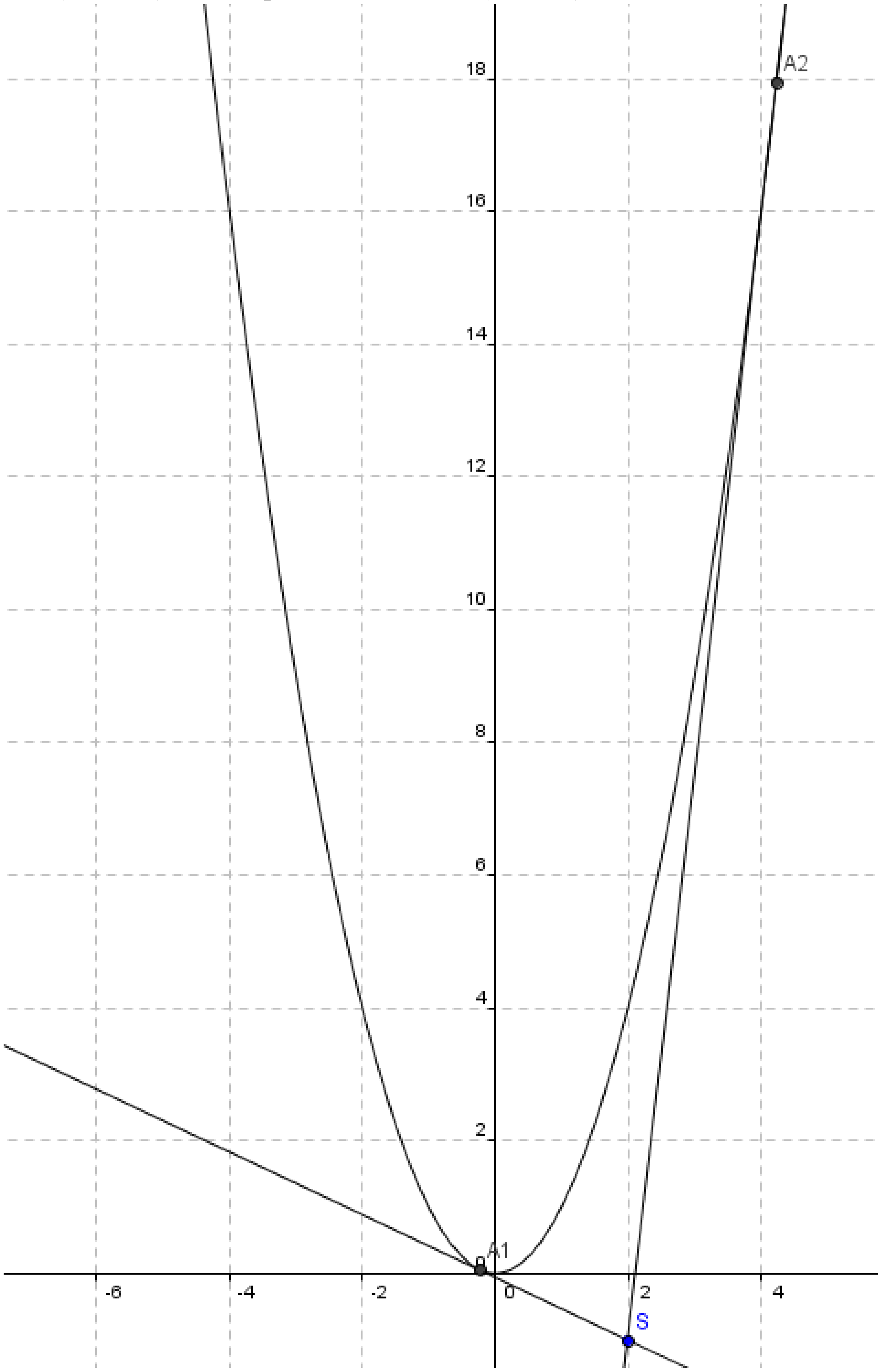
Le coefficient directeur de la tangente en a est $f'(a)$ où $f(x) = x^2$.

On a donc : $f'(a) = 2a$.

Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ passant par A est : $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$.

3) Le point $S(2\ ;\ -1)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $-1 = 2a \times 2 - a^2$, soit :

$a^2 - 4a - 1 = 0$
Cette équation du second degré a deux solutions : $a_1 = 2 - \sqrt{5}$ et $a_2 = 2 + \sqrt{5}$. (refaire les calculs)
Graphiquement :
A_1 a pour coordonnées $(a_1\ ,\ a_1^2)$ et A_2 a pour coordonnées $(a_2\ ,\ a_2^2)$



92 page 96

Soit H_a l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ avec $a > 0$.

Dans la suite M_0 désigne un point de H_a d'abscisse x_0 où x_0 est un réel non nul.

1) Désignons par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{a}{x}$.

Une équation de la tangente T à H_a au point M_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Or, $f'(x) = \frac{-a}{x^2}$, d'où, une équation de T est : $y = \frac{-a}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{a}{x_0}$

Soit : $y = \frac{-a}{x_0^2}x + \frac{2a}{x_0}$

2) Soit $P(\alpha\ ;\beta)$ un point du plan. $x_0 \neq 0$

a) $P(\alpha\ ;\beta) \in T \Leftrightarrow \beta = \frac{-a}{x_0^2}\alpha + \frac{2a}{x_0}$ Comme x_0 est un réel non nul, on garde l'égalité en multipliant par x_0^2.

$P(\alpha\ ;\beta) \in T \Leftrightarrow \beta\ x_0^2 - 2ax_0 + a\alpha = 0$ (On reconnaît une équation du second degré d'inconnue x_0)

b) Étude de l'équation $\beta\ x_0^2 - 2ax_0 + a\alpha = 0$

Cas où $\beta = 0$, l'équation est du premier degré : $-2ax_0 + a\alpha = 0$ qui a pour solution $x_0 = \frac{\alpha}{2}$.

Lorsque le point P est sur l'axe des abscisses (sauf en O) il existe une et une seule tangente passant par P.

Cette tangente est tangente au point $M_0(\frac{\alpha}{2}, \frac{2a}{\alpha})$

Cas où $\beta \neq 0$, l'équation est du second degré, et,

$$\Delta = (-2a)^2 - 4\beta(a\alpha) = 4a^2 - 4a\alpha\beta = 4a(a - \alpha\beta).$$

On a ainsi : trois possibilités $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$

Première possibilité : $\Delta > 0$

L'équation précédente a deux solutions distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif.

Comme $4a > 0$, $\Delta > 0$ si et seulement si $a > \alpha\beta$.
Il existe donc deux tangentes possibles issues de P lorsque $\alpha\beta < a$.
Trois cas :

Si $\alpha = 0$, alors $\Delta > 0$ est vérifié, et, le point $P(0\ ;\beta)$ est sur l'axe des ordonnées.

L'équation devient : $\beta\ x_0^2 - 2ax_0 = 0$ qui a pour solutions 0 (exclu) et $x_0 = \frac{2a}{\beta}$.

Lorsque le point P est sur l'axe des ordonnées, il existe une seule tangente passant par P.

Le point de tangence est $M_0(\frac{2a}{\beta}\ ;\ \frac{\beta}{2})$

Si $\alpha > 0$ alors $\beta < \frac{a}{\alpha}$, et, en ce cas, le point P est en ce cas au-dessous de l'hyperbole ; (Intervalle $]0\ ;+\infty[$)

Si $\alpha < 0$ alors $\beta > \frac{a}{\alpha}$, et, en ce cas, le point P est en ce cas au-dessus de l'hyperbole ; (Intervalle $]-\infty\ ;0[$)

Deuxième possibilité : $\Delta = 0$

L'équation a une et une seule solution si et seulement si son discriminant est nul.

Comme $4a > 0$, $\Delta = 0$ si et seulement si $a = \alpha\beta$.

On a alors : $\beta = \dfrac{a}{\alpha}$.

Le point P est sur l'hyperbole (on peut vérifier que dans ce cas, $x_0 = \dfrac{-(-2a)}{2\beta} = \dfrac{a}{\beta} = \alpha$.

il existe une seule tangente passant en P.

Troisième possibilité : $\Delta < 0$

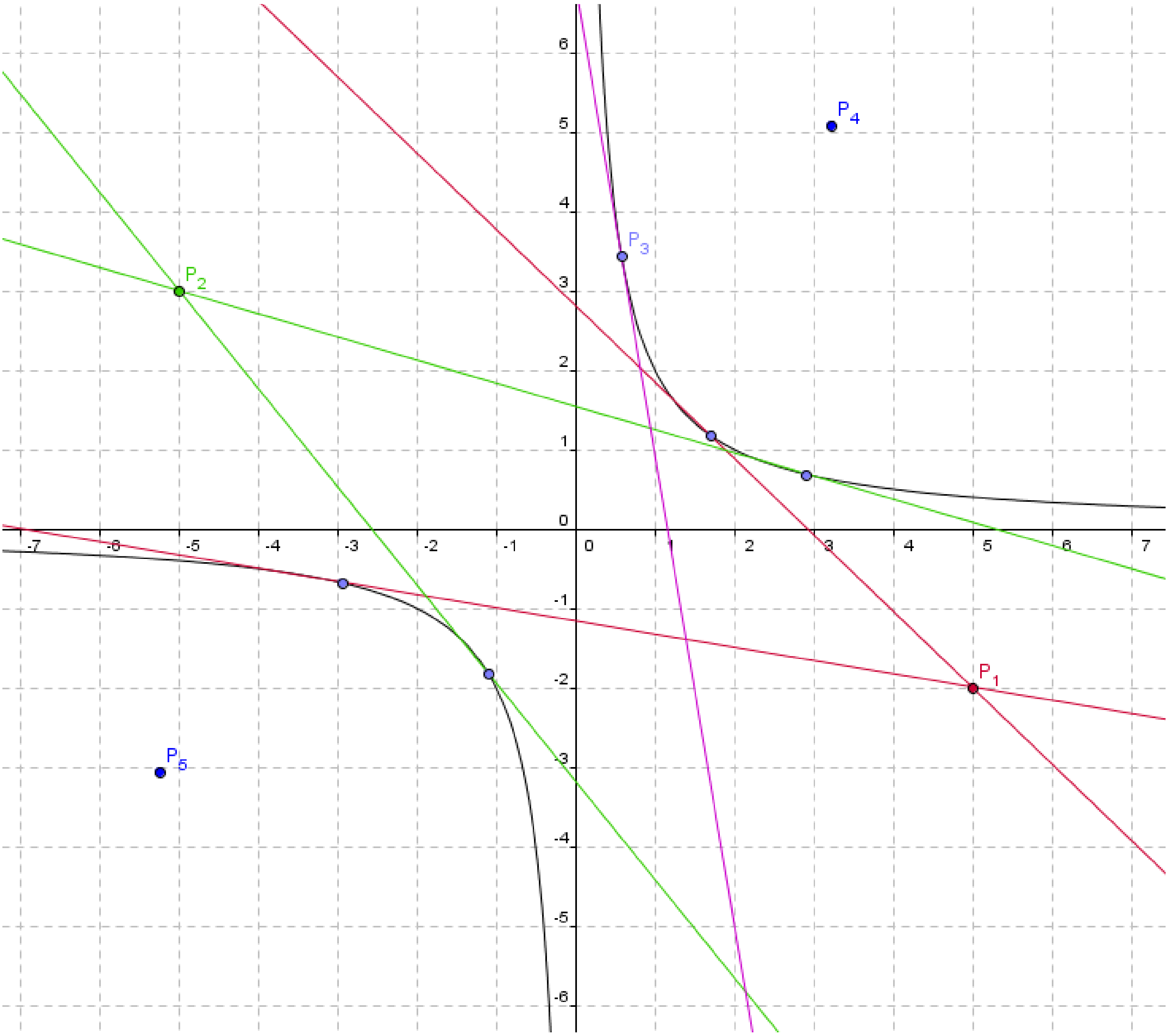
L'équation n'a aucune solution si et seulement si $\alpha\beta > a$.

Le point P est au-dessous de l'hyperbole si $\alpha < 0$, et, est en ce cas au-dessus de l'hyperbole si $\alpha > 0$.

Illustration :

L'hyperbole représentée a pour équation $y = \dfrac{2}{x}$.

On peut considérer 5 zones (sans prendre en compte les cas particuliers des eux axes)
Les points P_1 et P_2 correspondent au cas où il y a deux tangentes.
Le point P_3 au cas où il n'y a qu'une tangente.
Les points P_4 et P_5 au cas où il n'y a aucune tangente.



94 page 96

Objectif de l'exercice :

Dans le « catalogue » des dérivées en 1S, il n'y a pas les fonctions $\sqrt{u}$.

L'objectif est par conséquent de démontrer une formule et non de l'appliquer.

Point méthode : ***(qui apparaît aux 3a), 3b) et 3c))***

En calculant de deux façons différentes une même expression, on obtient une égalité qui permet d'exprimer un des « éléments » de l'expression en fonction des autres éléments.

Énoncé :

Soit $f(x) = \sqrt{3x+4}$ pour $x \geqslant -\dfrac{4}{3}$.

1) f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x + 4$.

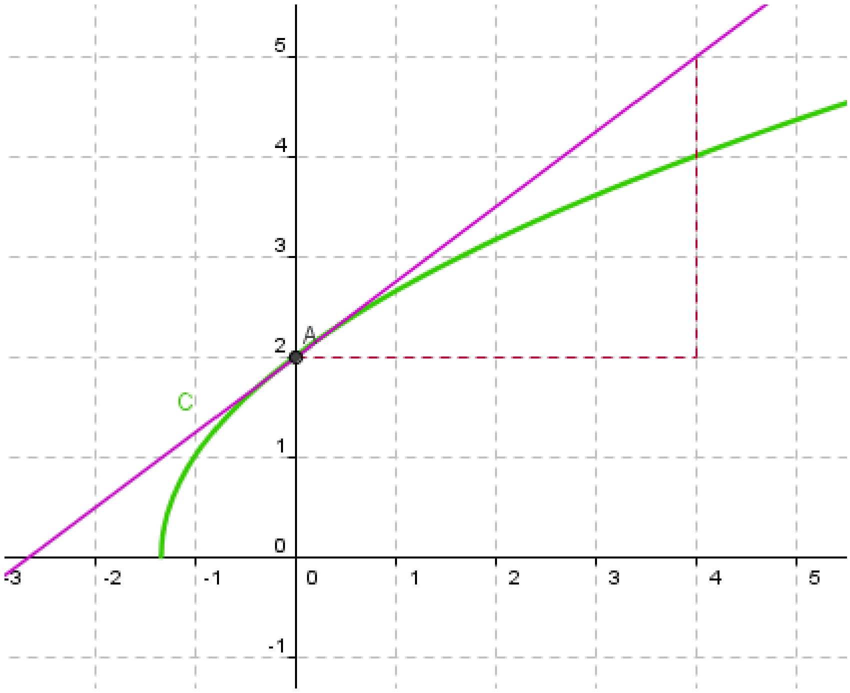
u étant une fonction affine, et, le coefficient 3 étant strictement positif, ***u est strictement croissante*** sur ℝ

$u(x) \geqslant 0$ sur $[-\frac{4}{3}\ ;+\infty[$.

Comme u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations, on en déduit que f est strictement croissante sur $[-\frac{4}{3}\ ;+\infty[$.

2) Tracé ...

Un tableau de valeurs ... quelques points ...(notamment $(-\frac{4}{3}\ ;0)$; $(-1\ ;1)$; $(0\ ;2)$) et la demi-parabole ....



3) On admet que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$

$u(x) = f(x) \times f(x)$

a) u étant le produit de deux fonctions dérivables,

on a : $u'(x) = f'(x) \times f(x) + f'(x) \times f(x) = 2f'(x) \times f(x)$ (égalité (1))

b) Or, $u(x) = 3x + 4$, d'où, $u'(x) = 3$ (égalité (2))

c) ***Par comparaison des égalités (1) et (2),***

on en déduit : $3 = 2f'(x) \times f(x)$, d'où, $f'(x) = \dfrac{3}{2f(x)} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

La tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $f'(0) = \dfrac{3}{4}$

Une équation de T est : $y = \dfrac{3}{4}(x-0) + f(0) = \dfrac{3}{4}x + 2$

Remarque :

La démarche utilisée au 3a/ et au 3b/ est valable dès que la fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

On a donc : Si $f = \sqrt{u}$ et $u > 0$ et u dérivable sur I alors f est dérivable sur I et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

95 page 96

1) Soit u fonction dérivable sur D telle que $u(x) \neq 0$ pour tout x de D.

On note f la fonction définie sur D par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

a) Soit $h \neq 0$, pour $a \in$ D et $a + h \in$ D, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{u(a+h)}-\frac{1}{u(a)}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}\right) = \frac{u(a)-u(a+h)}{h} \times \frac{1}{u(a+h)u(a)}.$$

b) On cherche la limite quand h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On sait que u est dérivable en a, donc : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ par définition du nombre dérivé de u en a.

On admet que $\lim\limits_{h\to 0} u(a+h) = u(a)$

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = -u'(a) \times \dfrac{1}{u(a)u(a)} = \dfrac{-u'(a)}{u(a)^2}$

c) En considérant le produit $u \times \dfrac{1}{v}$, on a : $\left(u \times \dfrac{1}{v}\right)' = u' \times \left(\dfrac{1}{v}\right) + \left(\dfrac{1}{v}\right)' \times u$

D'où, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = u' \times \left(\dfrac{1}{v}\right) + \dfrac{-v'}{v^2} \times u = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

---

96 page 96

Les contraintes :

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'un polynôme f du troisième degré : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Les points $A(0\,;0)$ et $B(3\,;-3)$ sont des points de $\mathscr{C}$.

En ces points, les tangentes sont (AC) et (BD) avec $C(-1\,;-5)$ et $D(5\,;1)$

Mise en équation :

$A(0\,;0) \in \mathscr{C}$ équivaut à $f(0) = 0$, d'où, $d = 0$

$B(3\,;-3) \in \mathscr{C}$ équivaut à $f(3) = -3$, d'où, $27a + 9b + 3c + d = -3$

(AC) est tangente en $A(0\,;0)$ équivaut à $f'(0)$ est le coefficient directeur de (AC)

Or, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, d'où, $f'(0) = c$, et,

le coefficient directeur de (AC) est : $\dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = 5$, d'où, $c = 5$

(BD) est tangente en $B(3\,;-3)$ équivaut à $f'(3)$ est le coefficient directeur de (BD)

Or, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, d'où, $f'(3) = 27a + 6b + c$, et,

le coefficient directeur de (BD) est : $\dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = 2$ d'où, $27a + 6b + c = 2$.

Résolution :

Soit le système : $\begin{cases} d=0 \\ 27a+9b+3c+d=-3 \\ c=5 \\ 27a+6b+c=2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} d=0 \\ c=5 \\ 27a+9b=-18 \\ 27a+6b=-3 \end{cases}$

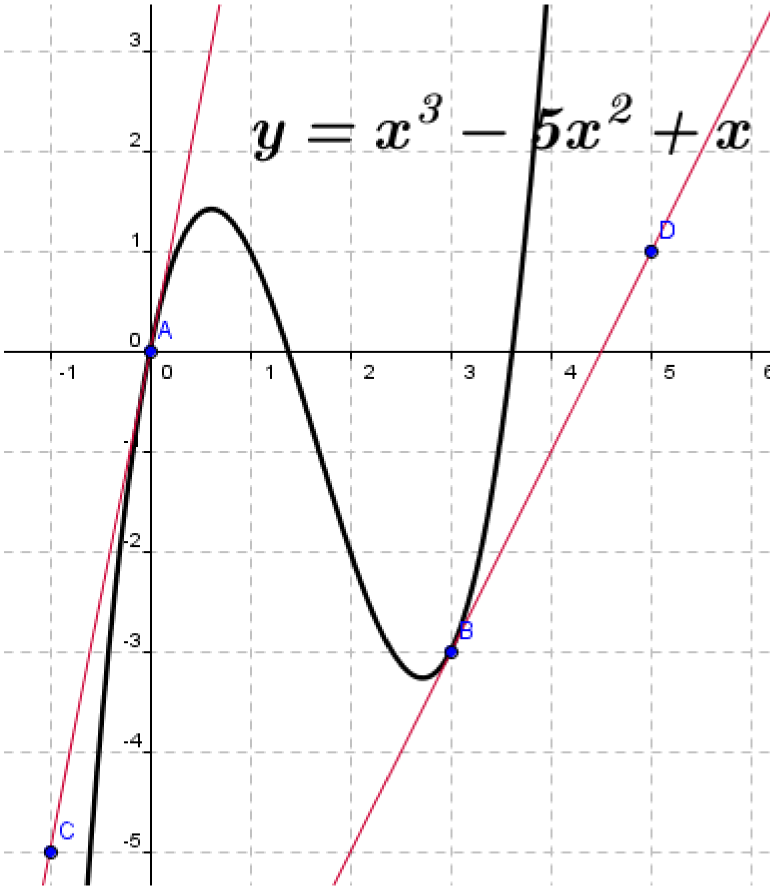
On peut simplifier par 3 les deux dernières équations et faire leur différence pour " éliminer " a, ce qui donne :

$9a + 3b - (9a + 2b) = -6 - (-1)$, soit : $b = -5$

En remplaçant b par -5, il vient : $a = 1$

$\mathscr{C}$ représente la fonction : $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 5x$.

Vérification :



97 page 97 ***(à la question 3/, lire : $f(t) = [R(t)]^3$)***

Forme : Sphère

Diamètre maximum : 90 cm

Débit : 190 litres par minute. (C'est la même notion qu'une vitesse).

Lien entre dérivée et notion de vitesse instantanée.

Soit une grandeur G(t) calculée en fonction du temps t.

Par exemple, une distance $d(t)$, un rayon $R(t)$, une aire $\mathscr{A}(t)$, un volume $\mathscr{V}(t)$, une quantité d'électricité $q(t)$, un travail d'une force $W(t)$, …

Les lettres G, d, R, $\mathscr{A}$, $\mathscr{V}$, q, W … sont pour un mathématicien des **fonctions.**

La vitesse instantanée exprime l'accroissement relatif de la valeur à l'instant t et se calcule expérimentalement en physique en faisant le rapport : $\frac{\Delta G}{\Delta t}$.

Lorsque la fonction G est dérivable et que Δt tend vers 0, on obtient l'expression de la fonction dérivée.

On note G' ou $\frac{dG}{dt}$ la fonction dérivée.

Suivant les grandeurs physiques étudiées, les noms changent : le débit est la « vitesse » pour un volume, l'intensité est la « vitesse » pour la quantité de courant, la puissance est la « vitesse » pour un travail, l'accélération est la « vitesse » pour une vitesse …

Point méthode : ***(qui apparaît aux 3a), 3b) et 3c))***

En calculant de deux façons différentes une même expression, on obtient une égalité qui permet d'exprimer un des « éléments » de l'expression en fonction des autres éléments.

Énoncé :

1) Pour calculer le volume d'une sphère, on sait : $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$ où r est le rayon de la sphère.

Unités : t date en minutes, $R(t)$ en dm.
En une minute (durée) , le ballon se remplit d'un volume de 190 litres, soit : 190 dm^3 .
À la date 0, le volume est nul.
À la date t, la durée depuis le départ est t minutes, d'où, le volume vaut $190\times t$.
On a donc : à la date t, $\frac{4}{3}\pi(R(t))^3 = 190t$.

2) Le diamètre maximal vaut 90 cm, soit : 9 dm. D'où, le rayon maximal vaut : $\frac{9}{2}$ dm.

Le volume maximal vaut : $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{9}{2}\right)^3 = \frac{243\pi}{2}$. Il est atteint lorsque $190\,t = \frac{243\pi}{2}$.

$t_{max} = \frac{243\pi}{2\times 190}$ minutes. ($t_{max} \approx 2$ min)

3)
a) Soit $t \in [0 ; t_{max}]$. On suppose la fonction R dérivable sur l'intervalle $I = [0 ; t_{max}]$.
$f(t) = (R(t))^3 = [R(t)]^2\times R(t)$.
On pose $u(t) = [R(t)]^2 = R(t)\times R(t)$ et $v(t) = R(t)$
u est le **produit de deux fonctions dérivables** sur I, donc, u est dérivable sur I.
f est donc le **produit de deux fonctions** dérivables u et v sur I, donc f est dérivable sur I.

D'où, $f'(t) = u'(t)\times v(t) + v'(t)\times u(t)$

$u(t) = [R(t)]^2$ $u(t) = R(t)\times R(t)$ d'où, $u'(t) = R'(t)\times R(t) + R'(t)\times R(t) = 2R'(t)\times R(t)$
$v(t) = R(t)$, d'où, $v'(t) = R'(t)$

Finalement : $f'(t) = 2R'(t)\times R(t)\times R(t) + R'(t)\times[R(t)]^2 = 3R'(t)\times[R(t)]^2$

Plus généralement : n entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$)
Lorsqu'une fonction u est dérivable sur un intervalle I, la dérivée de la fonction u^n est :

$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$

b) D'après le 1), on sait : $\frac{4}{3}\pi f(t) = 190\,t$, d'où, $f(t) = \frac{190\times 3}{4\pi}\,t = \frac{285}{2\pi}\,t$.

f est donc une ***fonction linéaire*** et sa dérivée est : $f' : t \mapsto \frac{285}{2\pi}$.

$f'(t) = \frac{285}{2\pi}$.

c) La vitesse instantanée d'augmentation du rayon à la date t est $R'(t)$.

Or, d'après le a), $3R'(t)\times(R(t))^2 = \frac{285}{2\pi}$.

$R'(t) = \frac{285}{2\pi\times 3(R(t))^2} = \frac{95}{2\pi}\times\frac{1}{(R(t))^2}$

d) Soit $t \in]0\,;\,t_{max}]$

La fonction qui à t associe $190t$ est une fonction strictement croissante, d'où, la fonction R^3 est une fonction strictement croissante.

Comme la fonction cube est strictement croissante, la fonction $t \mapsto R(t)$ est strictement croissante et

$R(t) \in]0\,;\,\frac{9}{2}]$.

La fonction $t \mapsto (R(t))^2$ est par conséquent strictement croissante et son inverse est strictement décroissante.

Comme $\frac{95}{2\pi}$ est un réel strictement positif, la fonction R' est strictement décroissante.

Le rayon augmente (**vitesse positive**) de plus en plus lentement (**vitesse décroissante**).

---

99 page 98 ***À la recherche de …***

$y = ax + b + \frac{c}{x-1}$ $\qquad x \neq 1$

Méthode : on cherche a, b, c, il faut donc établir trois équations non équivalentes faisant intervenir a, b et c.

Recherche : On connaît un point avec ses coordonnées …. (une première équation)

On connaît deux coefficients directeurs de tangente en des points d'abscisses connues … (deux autres équations).

On a besoin : des nombres dérivés … d'où, le calcule d'une fonction dérivée …

Résolution :

Soit f la fonction **représentée** par la courbe d'**équation** $y = ax + b + \frac{c}{x-1}$

On a donc : $f(x) = y = ax + b + \frac{c}{x-1}$, d'où, pour $x \neq 1$, $f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$

On sait : $f(3) = 2$, $f'(3) = 0$ et $f'(2) = 3$

D'où le système : $\begin{cases} 3a+b+\frac{c}{2}=2 \\ a-\frac{c}{4}=0 \\ a-c=3 \end{cases}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De (2), on tire : $c = 4a$ et dans (3), il vient : $a = -1$, d'où, $c = -4$, puis, dans (1) : $b = 7$

$y = f(x) = -x + 7 - \dfrac{4}{x-1}$

---

100 page 98

$\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$

Soit $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ et T_A la tangente en ce point :

Notons f la fonction inverse, $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Pour $x \neq 0$, on sait : $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Rappel : La tangente en $A\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ est telle que pour tout point M(x ; y) : $\dfrac{y-y_A}{x-x_A} = f'(a)$, soit :

une équation de T_A est : $y = \dfrac{-1}{a^2}(x - \text{a}) + \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$

Si $y = 0$, alors, $x = 2a$, donc $B(2a\,;0)$

Si $x = 0$, alors, $y = \dfrac{2}{a}$, donc, $C\left(0\,;\dfrac{2}{a}\right)$.

On a donc : $OB = |2a| = 2\times|a|$, et, $OC = \left|\dfrac{2}{a}\right| = \dfrac{2}{|a|}$

Dans un repère orthonormal, on a : $\mathscr{A}(\text{OBC}) = \dfrac{1}{2}\times 2\times|a|\times\dfrac{2}{|a|} = 2$ (unités au carré)

---

102 page 98

Soit a l'abscisse du Train sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ (la Gare est l'origine du repère).

On a : le Train éclaire la Maison lorsque la ligne (TrainMaison) est la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse a.

Une équation de (TM) est $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$.

En effet : le coefficient directeur est le nombre dérivé de la fonction carré en a, soit : $2a$.

Les coordonnées du Train sont (a ; a^2)

La Maison étant sur l'axe des abscisses , on a : $y_M = 0$ et $x_M = 1$

Or, M $\in$ (TM) d'où : $2a - a^2 = 0$.

On a donc : $a(2 - a) = 0$

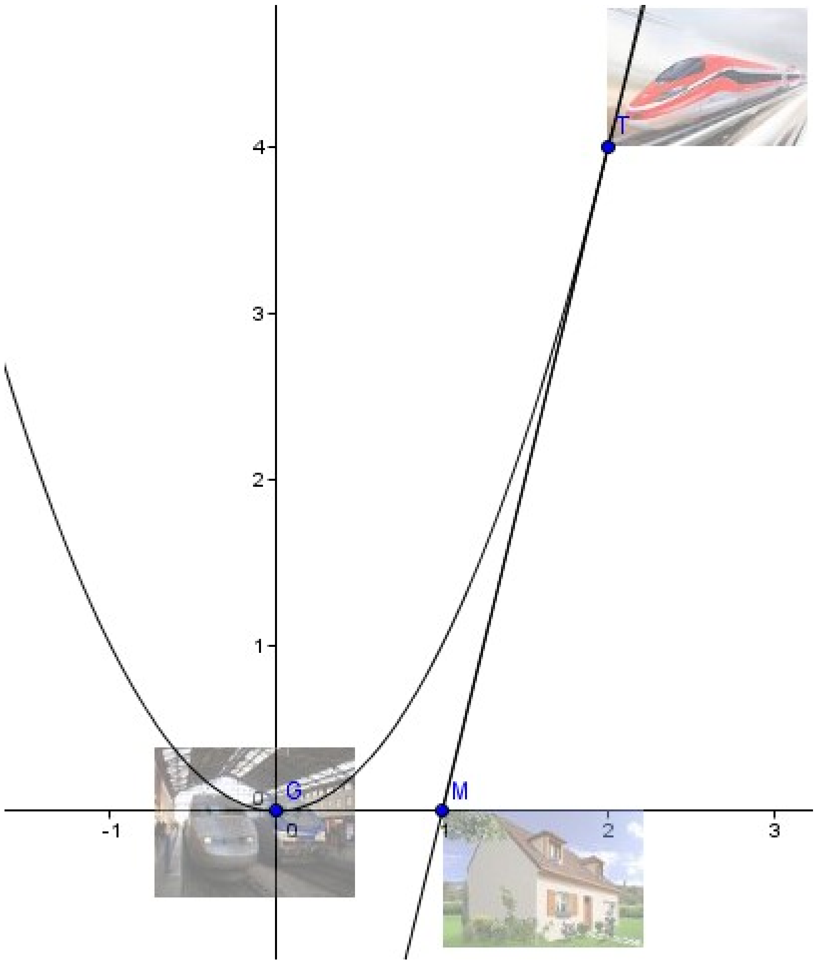
Les solutions de l'équation sont $a = 0$ (Gare) ou $a = 2$ (Train).

Il y a deux tangentes à $\mathscr{P}$ passant par M : l'axe des abscisses (GM) et la droite (TM)

Coordonnées du Train : (2 ; 4)

Coordonnées de la maison : (1 ; 0)

Distance TM = $\sqrt{(2-1)^2+(4-0)^2} = \sqrt{17}$.


T
4
3
2
1
G
M
0
-1
0
1
2
3