Index

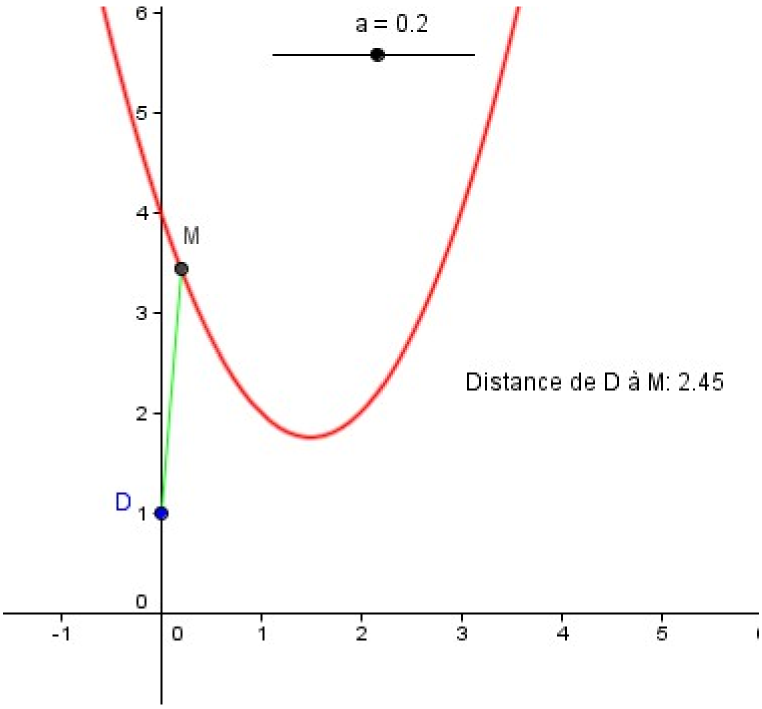
TP2 page 110

Le repère est orthonormé.

f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 3x + 4$ représentée par la parabole $\mathscr{P}$.

$D(0 ; 1)$.

A) Logiciel ....



B) Calcul :

$M(x ; f(x))$ puisque $M \in \mathscr{P}$.

1- $DM^2 = (x - 0)^2 + (x^2 - 3x + 4 - 1)^2 = x^2 + (x^2 - 3x + 3)^2$,

d'où, $DM^2 = x^2 + x^4 + 9x^2 + 9 - 6x^3 + 6x^2 - 18x = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$

$DM = \sqrt{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9}$

2) $d(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$

a) Une condition nécessaire (et non suffisante) pour que $d(x)$ soit minimale : d étant dérivable sur ℝ, $d'(x) = 0$.

b) $d'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18$

Par identification des coefficients :
$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

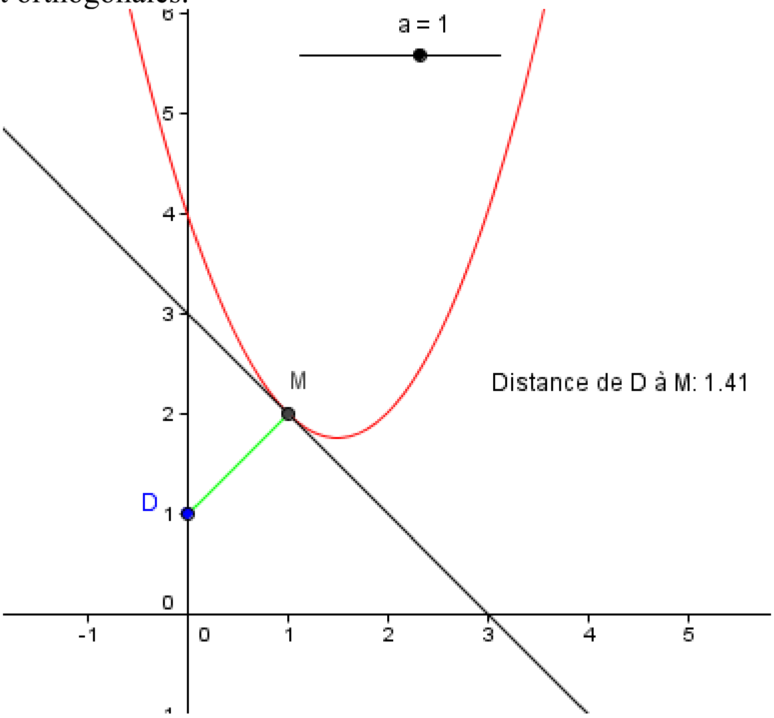
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c = 4x^3-18x^2+32x-18$ si et seulement si $\begin{cases} a=4 \\ b-a=-18 \\ c-b=32 \\ -c=-18 \end{cases}$.

On obtient : $a = 4$, $b = -14$, $c = 18$.
$d'(x) = 4x^3-18x^2+32x-18 = (x-1)(4x^2-14x+18)$
3) Étude de $4x^2-14x+18 = 2(2x^2-7x+9)$ $\Delta = 49-72 = -23$
Puisque $\Delta < 0$, le trinôme $4x^2-14x+18$ est du signe du coefficient de x^2, donc strictement positif, pour tout réel x.
$d'(x)$ est donc du signe de $x-1$.
$x-1$ s'annule **en changeant de signe** lorsque $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

min = $d(1) = 2$
Comme $DM = \sqrt{d(x)}$ et que les fonctions de la forme $\sqrt{u}$ où $u > 0$ ont les mêmes variations que u, on en déduit que DM est minimale lorsque $x = 1$.
$M_0(1\,;f(1))$, soit : $M_0(1\,;2)$, et, $DM_0 = \sqrt{2}$.

4) Un vecteur directeur de la droite (DM) : $\overrightarrow{DM} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
Le coefficient directeur de T, tangente à $\mathscr{P}$ en M_0 est : $f'(1)$.
Comme $f'(x) = 2x-3$, on a : $f'(1) = -1$. Un vecteur directeur de T est $\vec{t} \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Les droites (DM) et T sont orthogonales.



18 page 115

Méthode :

La justification est faite par le tableau complet de variations.

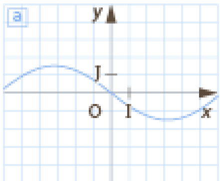
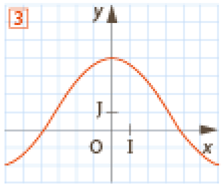
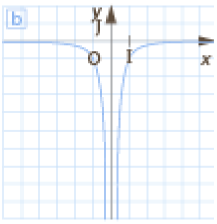
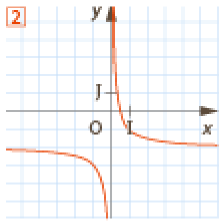
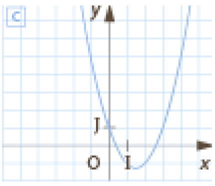
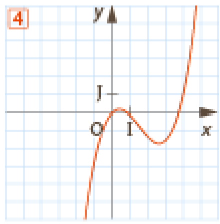
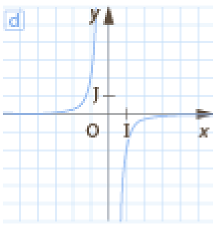
Ne pas oublier les doubles-barres lorsqu'une fonction n'est pas définie en une valeur.

Si f n'est pas définie en la valeur x_0, alors la dérivée $f\,'$ ne peut pas être définie en cette valeur x_0.

Une courbe de la fonction f étant donnée, on connaît ses variations et par conséquent, on connaît le signe de la dérivée.

Une courbe de la fonction dérivée $f\,'$ étant donnée, on connaît le signe de $f\,'(x)$ et par conséquent, les variations de la fonction f.

L'exercice est construit de façon à ne pas avoir d'ambiguïté

<table>
<tr><th>courbe de $f\,'$</th><th>Tableau de variations</th><th>Courbe de f</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f\,'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f\,'(x)$</td><td></td><td>–</td><td>‖</td><td>–</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↘</td><td>‖</td><td>↘</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0,5</td><td></td><td>2,5</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f\,'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td><td>↗</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f\,'(x)$</td><td></td><td>+</td><td>‖</td><td>–</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↗</td><td>‖</td><td>↘</td><td></td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

19 page 115

a) $f(x) = x^3$ sur ℝ.

f est la fonction cube (dans la famille des polynômes du troisième degré)

f est définie et dérivable sur ℝ, et, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
Comme $3x^2 > 0$ pour $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$, la fonction f est strictement croissante sur ℝ.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 +
$f(x)$	↗ 0 ↗

b) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ sur ℝ.
(Évidemment, il est possible d'appliquer les propriétés du second degré et de ne pas appliquer la dérivation pour cette étude).
f est un trinôme du second degré (dans la famille des polynômes)
f est définie et dérivable sur ℝ, et, pour tout réel x, $f'(x) = 3\times 2x - 4 = 2(3x - 2)$

Comme $3x - 2 < 0$ si et seulement si $x < \dfrac{2}{3}$

Comme $3x - 2 > 0$ si et seulement si $x > \dfrac{2}{3}$, et ,

que $f'\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$

la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{2}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2}{3} ; +\infty\right[$.

Calcul du minimum : $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3\times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4\times \dfrac{2}{3} + 2 = \dfrac{4-8+6}{3} = \dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$ 2/3 $+\infty$
$f'(x)$	– 0 +
$f(x)$	↘ 2/3 ↗

21 page 115

a) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + 5$ sur ℝ.

f est une fonction polynôme du quatrième degré.
f est définie et dérivable sur ℝ, et, pour tout réel x, $f'(x) = -4x^3 - 4x = -4x(x^2 + 1)$
Comme $x^2 + 1 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x$, c'est-à-dire, le signe opposé de celui de x.
la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ et strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.
Calcul du maximum : $f(0) = 5$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 –
$f(x)$	↗ 5 ↘

b) $f(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 4x^2 + 2$ sur ℝ.

f est une fonction polynôme du quatrième degré.

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x, $f'(x) = -2x^3 + 8x = -2x(x^2 - 4) = -2x(x-2)(x+2)$

Tableau de signes de f ' (x) :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty ; -2]$ et sur $[0;2]$, et, elle est strictement décroissante sur $[-2 ; 0]$ et sur $[2 ; +\infty[$.

Calcul des extremums locaux : $f(-2) = 10$, $f(0) = 2$ et $f(2) = 10$

Tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	10	$\searrow$	2	$\nearrow$	10	$\searrow$	

---

22 page 115

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$

f est une fonction homographique dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et sur $]1 ; +\infty[$

Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{1\times(x-1)-1\times(x-3)}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{(x-1)^2}$

$f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 1$, d'où,

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

---

b) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

f est une fonction rationnelle dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{-1\times x^2-2x(1-x)}{(x^2)^2} = \dfrac{x^2-2x}{x^4} = \dfrac{x(x-2)}{x^4} = \dfrac{x-2}{x^3}$

Le minimum local (sur $]0 ; +\infty[$) vaut $f(2) = \dfrac{1-2}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

---

25 page 115

a) $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{2x+4}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$. (Il y aura donc une double barre en -2).
f est une fonction rationnelle (quotient de polynômes) dérivable sur chaque intervalle $]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$.

f est la somme de u et v définies par $u(x) = x + 2$ et $v(x) = \dfrac{1}{2x+4}$.

v est l'inverse d'une fonction w, d'où, $v' = \left(\dfrac{1}{w}\right)' = \dfrac{-w'}{w^2}$.

Pour tout $x \neq -2$, on a : $f'(x) = 1 + \dfrac{-2}{(2x+4)^2} = \dfrac{(2x+4)^2-2}{(2x+4)^2} = \dfrac{(2x+4-\sqrt{2})(2x+4+\sqrt{2})}{(2x+4)^2}$

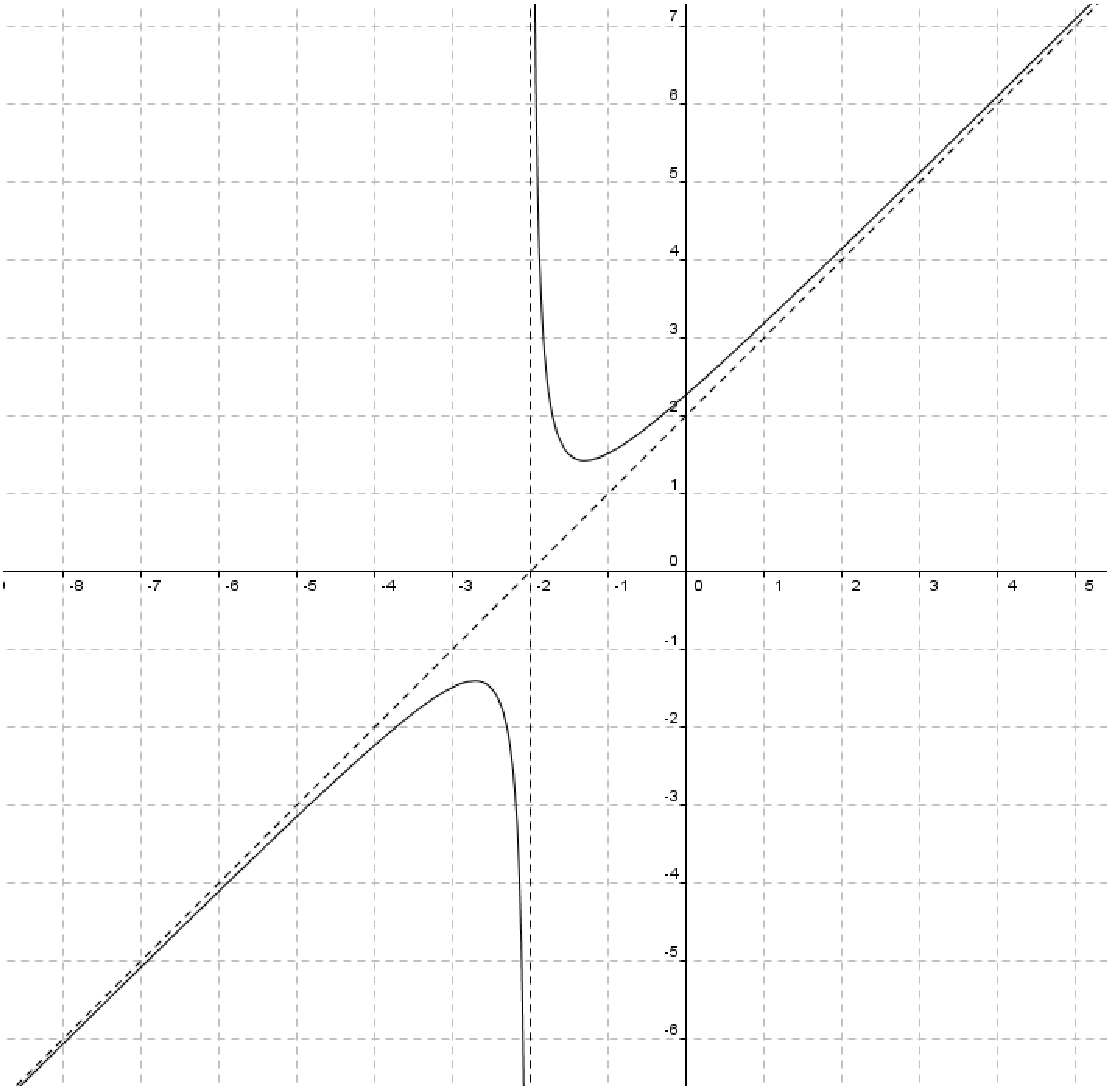
Comme $(2x+4)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, on étudie le signe du produit au numérateur.

x	$-\infty$		$-2-\frac{\sqrt{2}}{2}$		-2		$-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x+4+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x+4-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

Le maximum sur $]-\infty\ ; -2[$ est $f\left(-2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

Le minimum sur $]-\infty\ ; -2[$ est $f\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

La représentation graphique permet de confirmer l'étude :



b) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$

f est définie sur $[0\,;+\infty[$.

f est le produit d'un polynôme et de la fonction $\sqrt{}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc, f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$,

d'où, pour tout $x > 0$, on a : $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1) = \dfrac{4x^2 + x^2 - 1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{5}\,x-1)(\sqrt{5}\,x+1)}{2\sqrt{x}}$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe du facteur $\sqrt{5}\,x - 1$ (les autres facteurs sont strictement positifs)

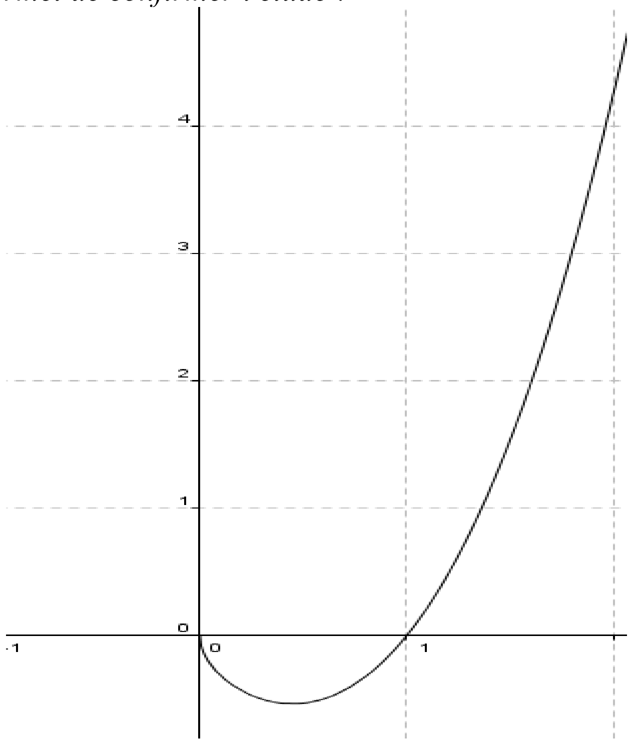
Ce facteur s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Comme le coefficient $\sqrt{5}$ de x est positif, on a :

x	0		$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	?

Le minimum vaut $f(\frac{\sqrt{5}}{5}) = -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{5}}$

La représentation graphique permet de confirmer l'étude :



---

32 page 116

La fonction f a le tableau de variations suivant :

x	–8		–3		0		10
$f(x)$	–3	↗	2	↘	–5	↗	–1

1) Sur l'intervalle [–8 ; –3], la fonction f est strictement croissante (et continue).
Pour $-8 < x < -3$, on a : $f(-8) < f(x) < f(-3)$.
Comme $f(-8) = -3$ et $f(-3) = 2$ et que $0 \in]-3 ; 2[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]-8 ; -3[$.
Sur l'intervalle [–3 ; 0], la fonction f est strictement décroissante (et continue).
Pour $-3 < x < 0$, on a : $f(0) < f(x) < f(-3)$.
Comme $f(0) = -5$ et $f(-3) = 2$ et que $0 \in]-5 ; 2[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\beta \in]-3 ; 0[$.

Sur l'intervalle [0 ; 10], la fonction f est strictement croissante et a pour maximum $f(10) = -1$;
Comme $-1 < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

Conclusion : Il existe deux réels et deux seulement α et β tels que $-8 < \alpha < -3 < \beta < 0$ solutions de l'équation $f(x) = 0$

2/ L'étude des variations du 1/ montre que
$f(x) < 0$ sur $]-8 ; \alpha[$, sur $]\beta ; 10]$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; \beta[$

3/ **En supposant que *f* est dérivable :**

$f'(x) \geqslant 0$ sur [–8 ; –3] et sur [0 ; 10]

$f'(x) < 0$ sur [–3 ; 0]

Résumé dans un tableau :

x	–8		α		–3		β		0		10
$f'(x)$		+		+	0	–		–	0	+	
$f(x)$	–3	↗	0	↗	2	↘	0	↘	–5	↗	–1
Signe de $f(x)$		–	0	+		+	0	–		–	

34 page 116

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 2$

1) f, étant un polynôme, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et,

pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{1}{4} \times 4x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$,

or,

$$\begin{aligned}(x-1)(x+2)^2 &= (x-1)(x^2+4x+4)\\ &= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4\\ &= x^3 + 3x^2 - 4 = f'(x).\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x réel, $f'(x) = (x-1)(x+2)^2$

2) Pour tout x réel, $(x+2)^2 \geqslant 0$, d'où le signe $f'(x)$ est celui de $x - 1$, on obtient :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

avec $f(-2) = 6$ et $f(1) = -\dfrac{3}{4}$.

3) Puisque f est décroissante sur $]-\infty\ ; -2]$, on a : pour $x \leqslant -2$, $f(x) \geqslant f(-2)$, donc, $f(x) > 0$.

Puisque f est décroissante sur $[-2\ ; 1]$, on a : pour $-2 \leqslant x \leqslant 1$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(-2)$, donc, $-\dfrac{3}{4} \leqslant f(x) \leqslant 6$

On peut calculer $f(2) = 4$,

Puisque f est croissante sur $[1; 2]$, on a : pour $1 \leqslant x \leqslant 2$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$, donc, $-\dfrac{3}{4} \leqslant f(x) \leqslant 4$

Si $x \geqslant 2$, on obtient : $f(x) \geqslant f(2)$, donc, $f(x) > 0$

l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions :

l'une dans l'intervalle $[1\ ; 2]$, l'autre dans l'intervalle $[-2\ ; 1]$.

4) Si $m < -\dfrac{3}{4}$ (minimum de f), l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.

Si $m = -\dfrac{3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ a une seule solution qui vaut 1

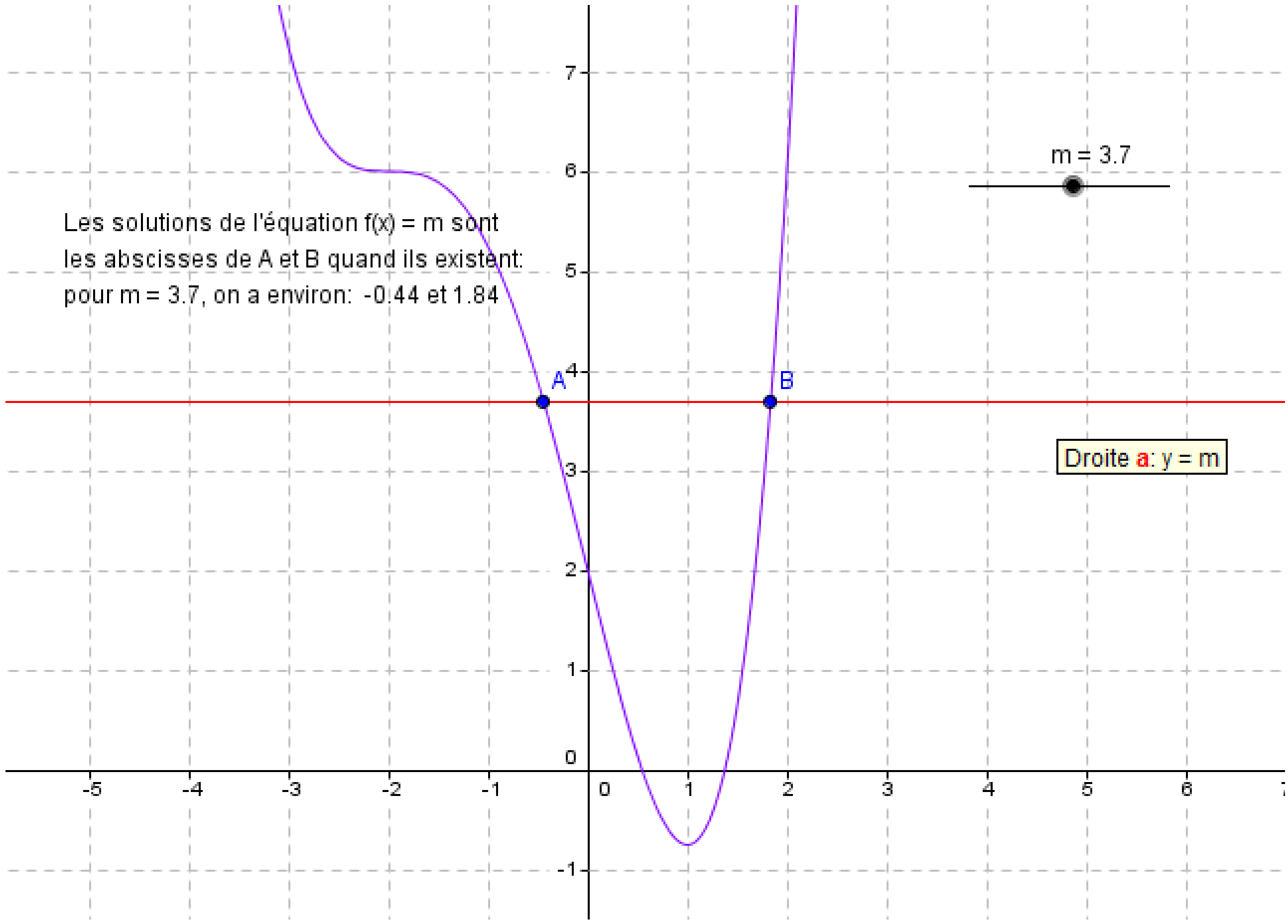
Si $m > \dfrac{-3}{4}$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.

Interprétation graphique :

Représenter C_f et la droite Δ d'équation $y = m$ où m est un nombre réel que l'on peut déplacer sur l'axe des ordonnées.

Le nombre de solutions est donné par le nombre de points d'intersection de C_f et de Δ.

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*



48 page 119

1) **Commencer par désigner un triangle rectangle :**

D'après la propriété de Pythagore, $h^2 + r^2 = 15^2$, d'où, $r^2 = 225 - h^2$, soit, puisque $r > 0$, $r = \sqrt{225-h^2}$

2) h est une longueur d'où $h \geqslant 0$

h est un côté perpendiculaire d'un triangle rectangle d'hypoténuse de longueur 15, donc, $h \leqslant 15$

$h \in [0 ; 15]$

le volume du cône est $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, d'où, $\mathcal{V}(h) = \frac{1}{3}\pi(225 - h^2)\times h = 75\pi h - \frac{1}{3}\pi h^3$

3) La fonction $\mathcal{V}$ est un polynôme défini sur [0 ; 15], donc, $\mathcal{V}$ est dérivable et pour tout h de [0 ; 15], on a :

$\mathcal{V}'(h) = 75\pi - \frac{1}{3}\pi(3h^2) = \pi(75 - h^2) = \pi(5\sqrt{3} - h)(5\sqrt{3} + h)$

4) Comme $h \geqslant 0$, la dérivée est du signe du facteur $5\sqrt{3} - h$, d'où, le tableau de variations suivant :

h	0		$5\sqrt{3}$		15
$\mathcal{V}'(h)$		+	0	–	
$\mathcal{V}(h)$	0	↗	max	↘	0

Le volume est maximal lorsque $h = 5\sqrt{3}$ cm, ce volume vaut alors : $\mathcal{V}(5\sqrt{3}) = 75\pi \times 5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \times (5\sqrt{3})^3 =$

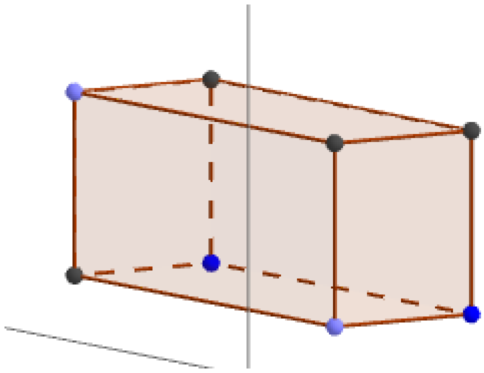
$$375\sqrt{3}\,\pi - \frac{1}{3}\,125 \times 3 \times \sqrt{3}\,\pi = 250\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^3.$$

Le demi-angle α au sommet vérifie $\cos\alpha = \frac{h}{15} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

À la calculatrice, $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$ donne $\alpha \approx 55°$ à 1° près par excès.

---

74 page 122



1) Schéma :

Pour $1 \leqslant x \leqslant 2$ (en cm), le parallélépipède rectangle ayant pour dimensions x, y et $2x$ a pour volume :

$V = 2x^2y = 12$ (en cm^3)

On en déduit : $y = \frac{6}{x^2}$.

2) a) Le parallélépipède possède : 2 faces rectangulaires de dimensions x, y, 2 faces rectangulaires de dimensions x, $2x$ et 2 faces rectangulaires de dimensions $2x$, y.

L'aire totale est : $2(xy) + 2(2x^2) + 2(2xy) = 4x^2 + 6xy$.

Comme $y = \frac{6}{x^2}$, il vient : $S(x) = 4x^2 + 6x \times \frac{6}{x^2} = 4x^2 + \frac{36}{x}$. (en cm²)

b) $S'(x) = 4 \times 2x + 36 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{8x^3 - 36}{x^2} = \frac{8}{x^2}(x^3 - \frac{9}{2})$ avec $x \in [1 ; 2]$.

Comme $\frac{8}{x^2} > 0$, le signe de $S'(x)$ est celui de $x^3 - \frac{9}{2}$.

3) ***Étude d'une fonction auxiliaire :***

a) Soit u définie sur $[1 ; 2]$ par $u(x) = x^3 - \frac{9}{2}$.

Comme $u'(x) = 3x^2$ est strictement positif pour tout réel de $(1 ; 2]$, la fonction u est strictement croissante sur $[1 ; 2]$.

b) $u(1) = 1 - \frac{9}{2} = \frac{-7}{2}$ et $u(2) = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$.

Comme $\frac{-7}{2} < 0 < \frac{7}{2}$ et u strictement croissante sur $[1 ; 2]$, il existe un réel $\alpha \in [1 ; 2]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

x	1		α		2
$u'(x)$		$+$		$+$	
$u(x)$	$\frac{-7}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$
signe $u(x)$		$-$	0	$+$	

On lit sur la calculatrice : $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$ puisque $u(1{,}6) < 0 < u(1{,}7)$.

c) Si $1 \leqslant x < \alpha$, on a alors : $u(x) < 0$

et si $\alpha < x < 2$, on a : $u(x) > 0$.

4) Comme le signe de $S'(x)$ est celui de $u(x)$, on obtient :

S est strictement décroissante sur $[1 ; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha ; 2]$.

5) S est donc minimale lorsque $x = \alpha$ (cm).

---

76 page 119 Fonctions homographiques

Une fonction est une fonction homographique lorsqu'elle est le quotient de deux fonctions affines.

Soit $h : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $x \neq -\frac{d}{c}$ et $ad - bc \neq 0$

Commentaires : Si $c = 0$ et $d \neq 0$, h est une fonction affine.

Si $c \neq 0$ et $x = -\frac{d}{c}$ alors $cx + d = 0$ et la fonction h n'est pas définie

Si $c \neq 0$ et $ad - bc = 0$ alors les suites $(a ; b)$ et $(c ; d)$ sont proportionnelles et il existe un réel k non nul tel que $c = ka$ et $d = kb$. On a alors $h(x) = \frac{1}{k}$.

1) Dérivée d'un quotient :

$$h'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

2) Comme le dénominateur est strictement positif, le signe de la dérivée est celui du réel $ad - bc$. (Non nul par hypothèse)

2 cas : ***$ad-bc < 0$***

x	$-\infty$	$-d/c$	$+\infty$
$h'(x)$ ($ad-bc<0$)	$-$	‖	$-$
$h(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

ad–bc > 0

x	$-\infty$	$-d/c$	$+\infty$
$h'(x)$ $ad-bc>0$	$+$	‖	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

3) Un exemple : la fonction $k : x \mapsto \dfrac{4x-1}{2x+4}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ est telle que $ad - bc = 4\times4 - (-1)\times2 = 18$

Puisque $18 > 0$, la fonction k est strictement croissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$.

4) **Lien avec la fonction inverse**

Les fonctions homographiques se déduisent de la fonction inverse par une succession d'opérations " usuelles ".

a) On cherche à déterminer les réels α et β tels que $\dfrac{4x-1}{2x+4} = \alpha + \dfrac{\beta}{2x+4}$

Or, $\alpha + \dfrac{\beta}{2x+4} = \dfrac{\alpha(2x+4)+\beta}{2x+4} = \dfrac{2\alpha x+4\alpha+\beta}{2x+4}$

On veut alors l'égalité : $\dfrac{2\alpha x+4\alpha+\beta}{2x+4} = \dfrac{4x-1}{2x+4}$

Les deux expressions sont égales pour tout réel $x \neq -2$ si et seulement si $\begin{cases} 2\alpha=4 \\ 4\alpha+\beta=-1 \end{cases}$

Ce système a un unique couple (α ; β) solution : α = 2 et β = –9

$k(x) = 2 + \dfrac{-9}{2x+4}$

b) La forme obtenue est la forme canonique de la fonction k.

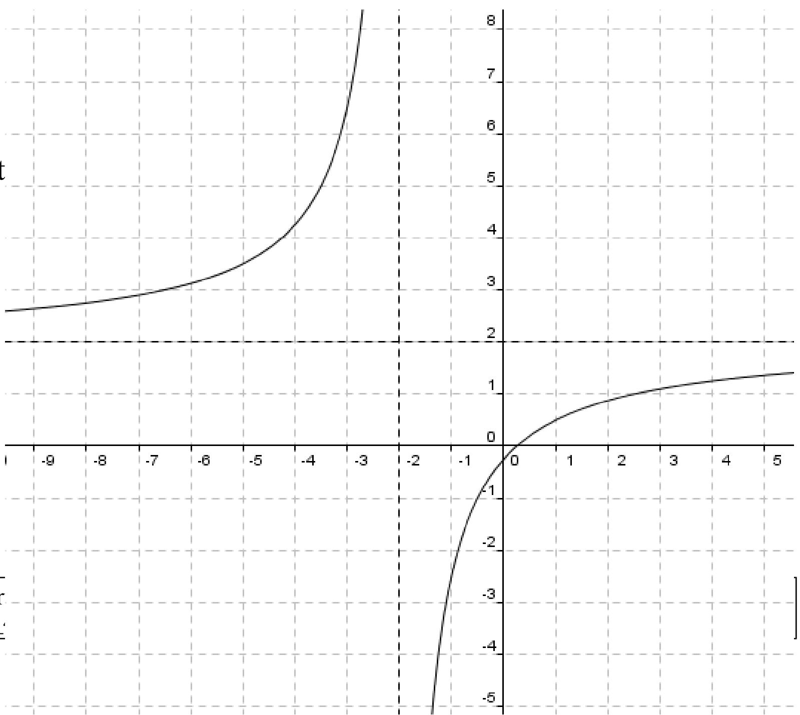
c) La fonction $x \mapsto 2x + 4$ est une fonction strictement croissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$.

Comme $2x + 4 < 0$ sur $]-\infty\ ; -2[$ et $2x + 4 > 0$ sur $]-2\ ; +\infty[$ et que la fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty\ ; 0[$ et $]0\ ; +\infty[$, on a :

$x \mapsto \dfrac{1}{2x+4}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$.

En multipliant par $-9 < 0$, on obtient :

$x \mapsto \dfrac{-9}{2x+4}$ est strictement croissante sur $]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$.



En ajoutant 2, il vient :
$x \mapsto 2 + \dfrac{-9}{2x+4}$ est strictement croissante sur
$]-\infty\ ; -2[$ et sur $]-2\ ; +\infty[$.

---

81 page 123
f est la fonction définie par $f(x) = |x^2-4x-9|$
1) Étude du signe de $x^2 - 4x - 9$
Il s'agit d'une expression du second degré.
Factorisation en facteurs du premier degré :
Une méthode : à partir de la forme canonique :
$x^2 - 4x - 9 = (x-2)^2 - 4 - 9 = (x-2)^2 - (\sqrt{13})^2 = (x - 2 - \sqrt{13})(x - 2 + \sqrt{13})$
Autre méthode : à partir du calcul des racines.
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times(-9) = 16 + 36 = 52 = 4\times13$
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)-2\sqrt{13}}{2\times1} = 2 - \sqrt{13}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)+2\sqrt{13}}{2\times1} = 2 + \sqrt{13}$

D'où : $x^2 - 4x - 9 = 1\times(x-(2-\sqrt{13}))((x-(2+\sqrt{13})) = (x - 2 + \sqrt{13})(x - 2 - \sqrt{13})$

Conclusion :

L'expression $x^2 - 4x - 9 > 0$ si et seulement si $x \in\ ]-\infty\ ; 2-\sqrt{13}[\ \cup\ ]2+\sqrt{13}\ ; +\infty[$

L'expression $x^2 - 4x - 9 < 0$ si et seulement si $x \in\ ]\,2-\sqrt{13}\ ; 2+\sqrt{13}\,[$

L'expression $x^2 - 4x - 9 = 0$ si et seulement si $x = 2 - \sqrt{13}$ ou $x = 2 + \sqrt{13}$

2 a) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 9$

Étude des variations de g.
Une méthode : à partir de la forme canonique :
$x^2 - 4x - 9 = (x-2)^2 - 13$
Le coefficient 1 de x^2 est positif, d'où, g est décroissante sur $]-\infty\ ; 2]$ et croissante sur $[2\ ; +\infty[$.
Elle admet un minimum en 2 qui vaut –13.

Autre méthode : à partir du signe de la dérivée :
Le polynôme du second degré g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$
Le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 2$, d'où,

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(2) = 2^2 - 4\times 2 - 9 = 4 - 8 - 9 = -13$

c) La courbe de g est une parabole de sommet $S(2 ; -13)$, d'axe de symétrie d'équation $x = 2$, ... quelques points particuliers ... (Voir fin de l'exercice)

3a) D'après le 1), on sait :
$f(x) = g(x)$ si et seulement si i $x \in]-\infty ; 2 - \sqrt{13}] \cup [2 + \sqrt{13} ; +\infty[$
$f(x) = -g(x)$ si et seulement si $x \in [2 - \sqrt{13} ; 2 + \sqrt{13}]$.

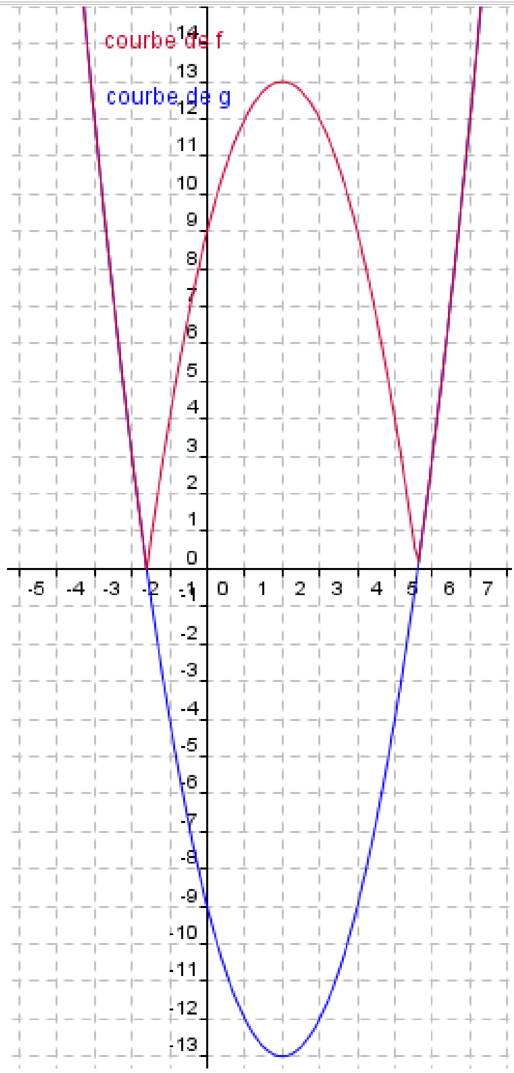
b) La courbe de f et la courbe de g sont confondues sur les intervalles $]-\infty ; 2 - \sqrt{13}]$ et $[2 + \sqrt{13} ; +\infty[$.
La courbe de f est la symétrique de celle de g par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle $[2 - \sqrt{13} ; 2 + \sqrt{13}]$ (Voir fin de l'exercice)

c) Les variations de f sont celles de g sur chacun des intervalles $]-\infty ; 2 - \sqrt{13}]$ et $[2 + \sqrt{13} ; +\infty[$.
Les variations de f sont opposées à celles de g sur chacun des intervalles $[2 - \sqrt{13} ; 2]$ et $[2 ; 2 + \sqrt{13}]$.
En notant x_1 et x_2 les racines de $g(x)$, on a :

x	$-\infty$		x_1		2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	13	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

À remarquer, f n'est pas dérivable en x_1 et en x_2 .

d) Le minimum de f est 0 atteint en x_1 et en x_2 .
f possède un maximum local sur $[x_1 ; x_2]$ qui vaut 13 atteint en 2



82 page 124

1) **Lecture et traduction des données :**

P est un polynôme de degré 3, d'où, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$.

$P(-1) = 9$, d'où, $-a + b - c + d = 9$

$P(2) = -18$, d'où, $8a + 4b + 2c + d = -18$

P est un polynôme, donc, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et P a un maximum local en -1, donc, $P'(-1) = 0$

et P a un minimum local en 2, donc, $P'(2) = 0$

Or, $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, d'où, $3a - 2b + c = 0$ et $12a + 4b + c = 0$

On obtient le système $\begin{cases} -a+b-c+d=9 \\ 8a+4b+2c+d=-18 \\ 3a-2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{pmatrix}$

Résolution du système :

En faisant $L2 - L1$, on obtient, le nouveau système

$\begin{cases} -a+b-c+d=9 \\ 9a+3b+3c=-27 \\ 3a-2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases}$ et en simplifiant par 3, la ligne 2, on a : $\begin{cases} -a+b-c+d=9 \\ 3a+b+c=-9 \\ 3a-2b+c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \\ L4 \end{pmatrix}$

En faisant $L2 - L3$, on a : $3b = -9$, d'où, $b = -3$, ce qui permet de réduire le système :

$\begin{cases} -a-c+d=12 \\ 3a+c=-6 \\ 12a+c=12 \end{cases} \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ L3 \end{pmatrix}$. En faisant $L3$ – L2, il vient : $9a = 18$, soit $a = 2$, puis, $c = -6 - 6 = -12$

et enfin, $d = 12 + 2 - 12 = 2$.

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

Autre méthode :

La dérivée d'un polynôme du 3 ème degré est un polynôme du second degré :

on sait que les racines du polynôme sont 2 et –1.

On peut donc écrire $P'(x) = A(x-2)(x+1)$ où A est le coefficient de x^2 .

$P'(x) = A(x-2)(x+1) = A(x^2 - x - 2) = Ax^2 - Ax - 2A$.

Or, $A = 3a$ d'après le calcul de la dérivée.

$P'(x) = 3ax^2 - 3ax - 6a$

Or : $3ax^2$ s'obtient en dérivant x^3 , $3ax$ s'obtient en dérivant $3a\ \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3a}{2}x^2$, $6a$ s'obtient en dérivant $6ax + d$.

$P(x) = ax^3 - \dfrac{3a}{2}x^2 - 6ax + d$

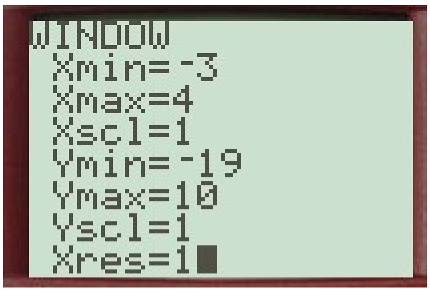
Comme $P(-1) = 9$, on a : $-a - \dfrac{3a}{2} + 6a + d = 9$, soit : $\dfrac{7}{2}a + d = 9$

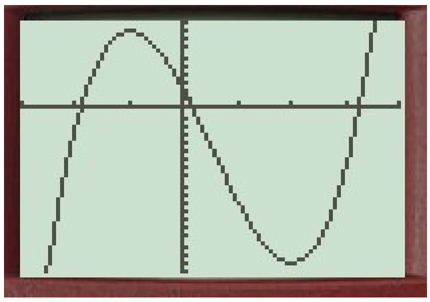
Comme $P(2) = -18$, on a : $8a - 6a - 12a + d = -18$, soit : $-10a + d = -18$

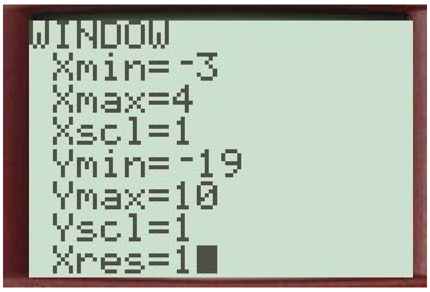
Par différence : $\dfrac{27}{2}a = 27$, d'où, $a = 2$, puis : $d = -18 + 20 = 2$

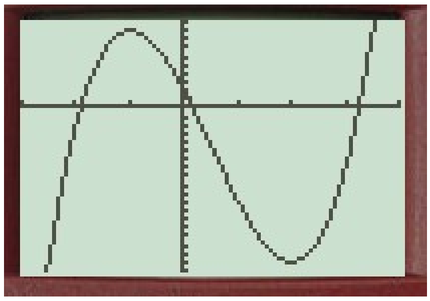
On retrouve : $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

2) Prendre une fenêtre graphique qui permet de visualiser le minimum local –18 en 2 et le maximum local 9 en – 1.









84 page 124

Les données :

repère orthonormé (O ; I, J)

$a \geqslant 0$.

A(0 ; 1)

d droite de coefficient directeur a passant par A.

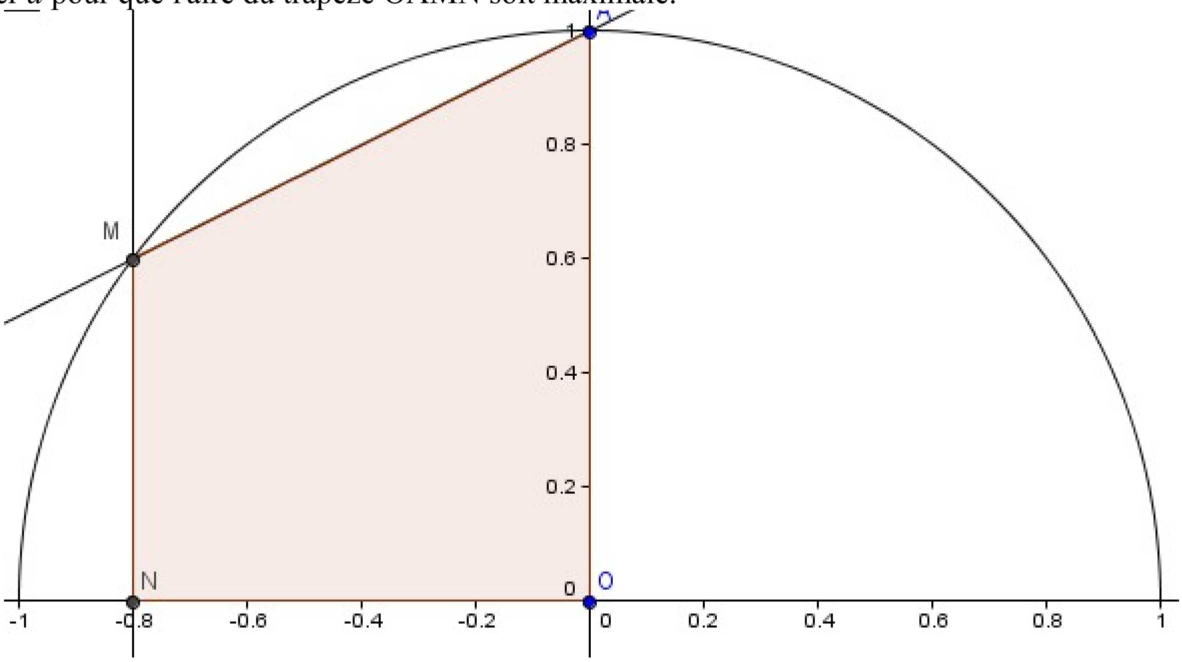
$\mathscr{C}$ demi-cercle de centre O, de rayon 1, situé au dessus de l'axe des abscisses.

M deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ et d.

N projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

Objectif :

Déterminer a pour que l'aire du trapèze OAMN soit maximale.



Traduction des données en géométrie analytique :

Équation de d : coefficient directeur a, ordonnée à l'origine : 1, d'où, $y = ax + 1$ $(a \geqslant 0)$

Équation de $\mathscr{C}$: $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geqslant 0$.

Le couple (x_M ; y_M) coordonnées de M est solution du système : $\begin{cases} y = ax+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ (avec les conditions sur a et y).

N(x_M ; 0) (l'abscisse de N est celle de M et son ordonnée est 0).

Remarque : le point M existe si et seulement si $0 < a \leqslant 1$

La méthode :

La variable est a.

Calculer l'aire $\mathscr{A}(a)$ du trapèze et étudier les variations de la fonction $\mathscr{A}$.

Les calculs :

$\mathscr{A}(a) = \dfrac{(\text{OA}+\text{MN})\times\text{ON}}{2}$ avec OA = 1, MN = y_M ($y_\text{M} \geqslant 0$ par définition de $\mathscr{C}$), ON = $|x_M|$).

Calcul des coordonnées de M en fonction de a.

Résolution du système : $\begin{cases} y=ax+1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$,

en remplaçant y par $ax + 1$ dans la deuxième équation : $x^2 + (ax + 1)^2 = 1$, soit : $x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 = 1$

en réduisant et factorisant x : $x[(a^2 + 1)x + 2a] = 0$.

Cette équation a deux solutions : $x = 0$ (le point A), et $x = \dfrac{-2a}{a^2+1}$

L'abscisse de M vaut : $x_\text{M} = \dfrac{-2a}{a^2+1}$ et l'ordonnée de M vaut : $y_\text{M} = a\times\dfrac{-2a}{a^2+1} + 1 = \dfrac{-2a^2+a^2+1}{a^2+1} = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$.

Comme $a \geqslant 0$ et $y_\text{M} \geqslant 0$, on doit avoir : $\begin{cases} a\geqslant 0 \\ 1-a^2\geqslant 0 \end{cases}$, d'où, $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Détermination de l'expression algébrique définissant la fonction $\mathscr{A}$:

MN = $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ et ON = $|x_M| = \dfrac{2a}{1+a^2}$ avec $0 \leqslant a \leqslant 1$.

$\mathscr{A}(a) = \dfrac{(\text{OA}+\text{MN})\times\text{ON}}{2} = \dfrac{1}{2}\times\left(1+\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)\times\dfrac{2a}{1+a^2} = \dfrac{(1+a^2+1-a^2)\times a}{(1+a^2)^2} = \dfrac{2a}{(1+a^2)^2}$.

Étude des variations de $\mathscr{A}$.

Dérivée de $\mathscr{A}$:

$\mathscr{A}$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(a)=2a \\ v(a)=(1+a^2)^2 \end{cases}$ d'où, $\begin{cases} u'(a)=2 \\ v'(a)=2\times 2a\times(1+a^2)=4a\times(1+a^2) \end{cases}$

On a alors : $\mathscr{A}'(a) = \dfrac{2(1+a^2)^2-4a(1+a^2)\times 2a}{(1+a^2)^4}$

Après factorisation de $2(1 + a^2)$ et réduction par $(1 + a^2)$, on obtient :

$\mathscr{A}'(a) = \dfrac{2(1+a^2-4a^2)}{(1+a^2)^3} = \dfrac{2(1-3a^2)}{(1+a^2)^3}$

Signe de la dérivée :

$1 + a^2$ étant strictement positif, le signe de $\mathscr{A}'(a)$ est celui de $1 - 3a^2$

Or, $1 - 3a^2 > 0 \Leftrightarrow 3a^2 < 1 \Leftrightarrow a^2 < \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{1}{3}} < a < \sqrt{\dfrac{1}{3}}$. $\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $0 < \dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1$

Tableau de variation de $\mathscr{A}$:

a	0		$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		1
$\mathscr{A}'(a)$		$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(a)$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$

L'aire du trapèze est maximale lorsque $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

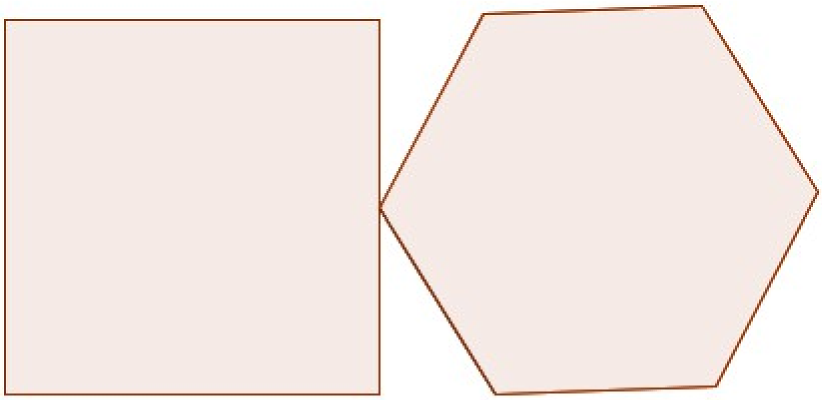
L'aire vaut alors: $\mathcal{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

---

85 page 124

Les données :

Un carré et un hexagone régulier dont la somme des périmètres est égale à 100.



Traduction des données :

Si x est la longueur d'un côté du carré et a celle d'un côté de l'hexagone, on a : $4x + 6a = 100$

Objectif :
Longueur du côté du carré qui rend la somme des aires minimale.
On choisit donc de tout exprimer en fonction de la variable x.

Les calculs :
$0 \leqslant x \leqslant 25$
$a = \frac{100-4x}{6} = \frac{2(25-x)}{3}$

Aire du carré : $\mathcal{A}_1(x) = x^2$.
Aire de l'hexagone : $\mathcal{A}_2(x)$

Soit h la hauteur d'un des triangles équilatéraux : $h = a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathcal{A}_2(x) = 6\times\frac{a\times h}{2} = 3ah = \frac{3\sqrt{3}}{2}\times a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2(25-x)}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}(25-x)^2$

La somme des aires :
$\mathcal{A}(x) = x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}(25-x)^2$

Étude des variations de $\mathcal{A}$.
Dérivée de $\mathcal{A}$:
$\mathcal{A}$ est la somme de deux fonctions du second degré

$\mathcal{A}'(x) = 2x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 \times (-1) \times (25 - x) = (2 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3})x - \dfrac{100\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}x - \dfrac{100\sqrt{3}}{3}$.

Signe de la dérivée :

L'expression de $\mathcal{A}'(x)$ est du premier degré, elle s'annule en changeant de signe lorsque $x = \dfrac{100\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{3}{6+4\sqrt{3}}$

Simplification par 2 et par 3, puis, on multiple numérateur et dénominateur par $2\sqrt{3} - 3$.

$x = \dfrac{50\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \dfrac{50\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3)(2\sqrt{3}-3)} = \dfrac{300-150\sqrt{3}}{3} = 100 - 50\sqrt{3}$.

Tableau de variation de $\mathcal{A}$:

x	0		$100 - 50\sqrt{3}$		25
$\mathcal{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}(x)$	$\dfrac{1250\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	625

La somme des aires est minimale lorsque la longueur du côté est égale à $100 - 50\sqrt{3}$.