Index

1- Reprendre contact avec les calculs page 125

1) a) la somme de 9 termes égaux à 13 est égale à 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = 9×13 = 117

b) le produit de 9 facteurs égaux à 2 est $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^9 = 512$

2) a) $2^7 \times 2^8 = 2^{15}$

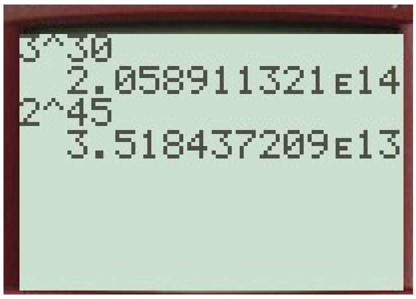
b) $5^3 \times 5 = 5^4$

c) $10^6 \times 10^{-3} = 10^3$

3) a) 0,0047 = $4{,}7 \times 10^{-3}$

b) 256,34 millions = $256{,}34 \times 10^6 = 2{,}5634 \times 10^8$

4) $3^{30} > 2^{45}$



$3^{30} \approx 2 \times 10^{14} \approx 20 \times 10^{13}$ et $2^{45} \approx 3 \times 10^{13}$

5) a) Une quantité qui augmente de 20 % est multipliée par 1,2

Une quantité qui augmente de 8 % est multipliée par 1,08

Une quantité qui augmente de 0,3 % est multipliée par 1,003

Preuve : Soit une quantité *x* qui augmente de *t* %

La nouvelle quantité *y* est égale à $x + \frac{t}{100} \times x = x\left(1 + \frac{t}{100}\right)$

b) Une quantité qui diminue de 20 % est multipliée par 0,8

Une quantité qui diminue de 8 % est multipliée par 0,92

Une quantité qui diminue de 0,3 % est multipliée par 0,997

Preuve : Soit une quantité *x* qui diminue de *t* %

La nouvelle quantité *y* est égale à $x - \frac{t}{100} \times x = x\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ lh

---

3- Reprendre contact avec l'algorithmique page 125

Algorithme 1 : on ajoute 50 à chaque boucle.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  S PREND_LA_VALEUR 200
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+50
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

Console

```
***Algorithme lancé***
700
***Algorithme terminé***
```

La dernière valeur de S affichée est : S = 200 + 10×50 = 700

Algorithme 2 : on multiplie par 1,3 à chaque boucle.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  S PREND_LA_VALEUR 200
  POUR n ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S*1.3
    FIN_POUR
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Résultats

Console

```
***Algorithme lancé***
2757.1698
***Algorithme terminé***
```

La dernière valeur de S affichée est : S = $200\times1{,}3^{10}$ = 2 757,169 837 (valeur tronquée)

---

2 page 126 Notion de suite

listes de nombres suivantes :

a) 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19

b) 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64

c) 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49

d) 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34

Partie A/ des règles de construction

1) 2) Liste a) : on obtient un terme de la liste en ajoutant 3 à celui qui précède,

les quatre termes suivants sont : 22 ; 25 ; 28 ; 31

Liste b) : on obtient un terme de la liste en multipliant par 2 à celui qui précède,
les quatre termes suivants sont : 128 ; 256 ; 512 ; 1024

(Autre façon de construire la liste b) : ce sont les puissances consécutives de 2 : 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ….)

Liste c) : On a la liste des carrés : 1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; ….

les quatre termes suivants sont : $8^2 = 64$; $9^2 = 81$; $10^2 = 100$; $11^2 = 121$

Liste d) : on obtient à partir du 3ème terme le terme suivant en ajoutant les deux précédents :

les quatre termes suivants sont : 21 +34 = 55 ; 34+ 55 = 89 ; 55 + 89 = 144 ; 89 + 144 = 233

3) pour calculer le 18ème terme ….

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a)	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
b)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072
c)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324
d)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}						

ou encore

liste a), comme on ajoute 3 à chaque fois, il suffit de calculer le nombre de fois qu'on ajoute 3 :

du rang 1 au rang 18, on a ajouté 17 fois 3, d'où, le 18 ième terme est : $1 + 17\times3 = 52$

Liste b), comme on multiplie par 2, il suffit de calculer le nombre de fois qu'on multiplie par 2 :

du rang 1 au rang 18, on a multiplié 17 fois par 2, d'où, le 18 ième terme est : $1\times2^{17} = 131\,072$

Liste c), le 18 ième terme est : $18^2 = 324$

4) D'après les remarques précédentes :

Liste a), le 100ième terme est : $1 + 99\times3 = 298$

Liste b), le 100ième terme est : 1×2^{99}

Liste c), le 100ième terme est : $100^2 = 10\,000$

B- une notation

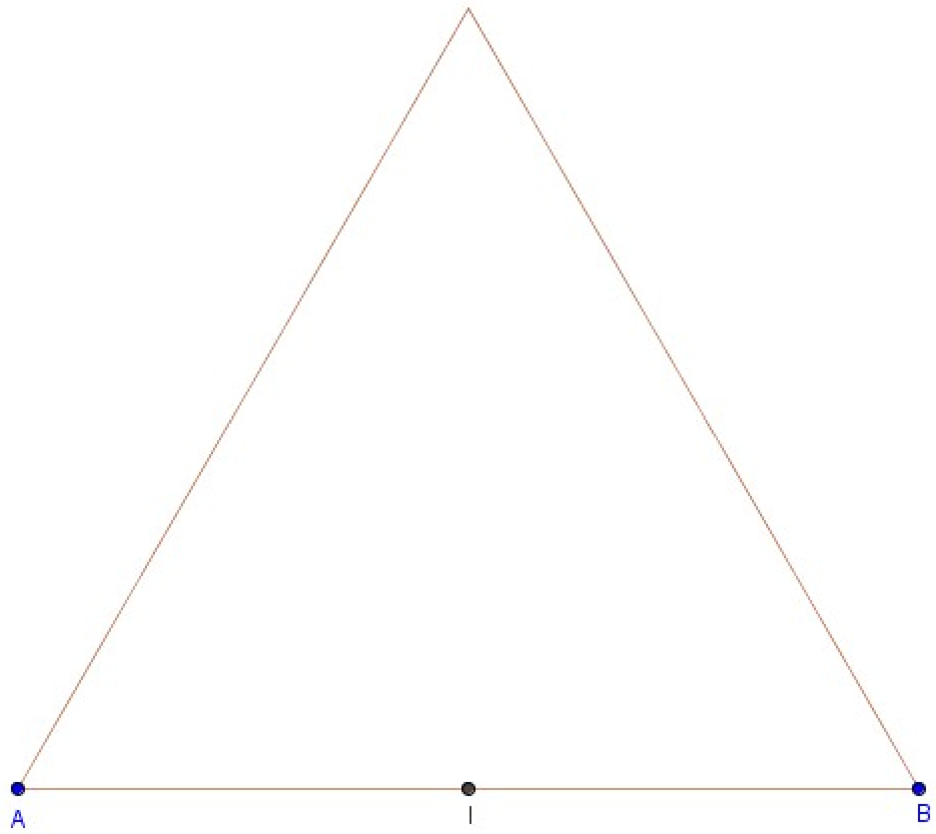
1) En notant u_0 le premier terme, u_1 le deuxième, …

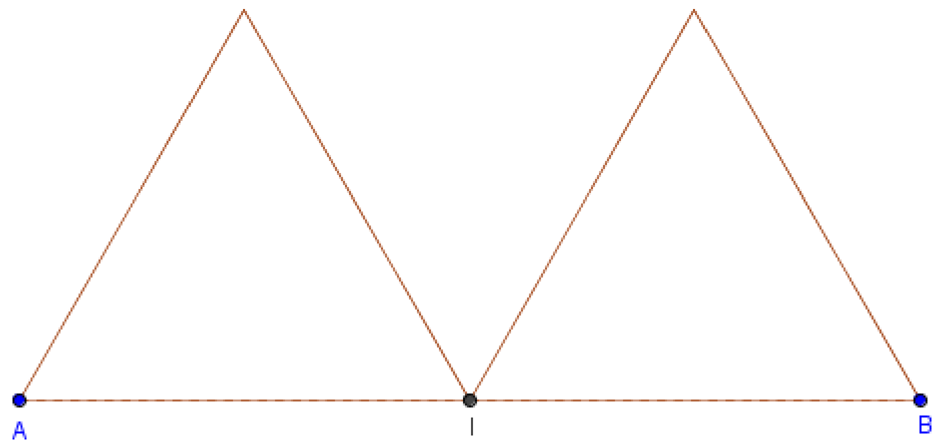
u_7 est le terme de rang 8 dans le tableau du A/
le 100ème terme est alors écrit : u_{99}

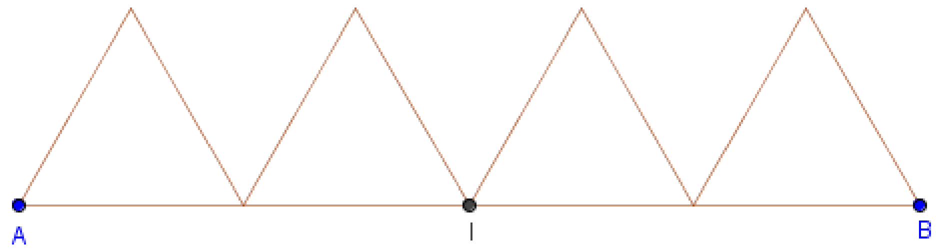
2) $v_n = 3\times n$ d'où :

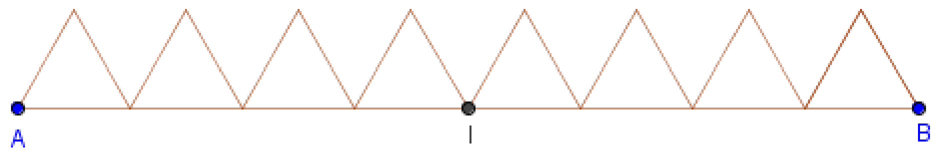
$v_0 = 3\times0 = 0$, $v_1 = 3\times1 = 3$, $v_2 = 3\times2 = 6$, $v_3 = 3\times3 = 9$,
$v_4 = 3\times4 = 12$, $v_5 = 3\times5 = 15$, $v_6 = 3\times6 = 18$, $v_7 = 3\times7 = 21$

Activité 3 page 127 Écrire une formule de récurrence



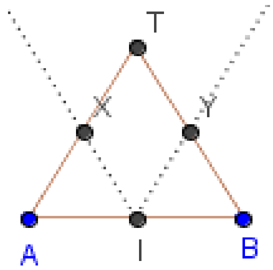






Remarque : pour une cohérence avec la plupart des notations utilisées lors des créations de suite à partir d'un état initial (étape 0), on peut partir du triangle équilatéral de côté 1 et considérer la ligne brisée de longueur 2.

Passage d'une étape à l'autre :
Chaque segment d'une ligne brisée est remplacée par deux segments ayant pour longueur la moitié du précédent.
Justification :



Le nom des sommets n'a pas d'importance … seule, la situation des points est importante.
Soit la ligne brisée [A, T, B], et, I le milieu de [AB].
Les triangles étant équilatéraux, les angles font 60°, et, les demi-droites issues de I sont respectivement parallèles aux segments [AT] et [BT]. (Angles correspondants égaux).
Ainsi, elles coupent respectivement les côtés [AT] et [BT] en leur milieu X et Y.
Le segment [AT] (resp. [BT]) est remplacé par deux segments [AX] et [XI] (resp. [IY] et [YB]) de longueur $\frac{1}{2}\text{AT}$

1) 2)a)b)c)

À chaque étape, le nombre de segments est multiplié par 2 et la longueur d'un segment est multipliée par $\frac{1}{2}$ et la longueur de la ligne brisée est constante.

	A	B	C	D	E	F	G
1	étape	nombre de segments	longueur d'un segment	longueur de la ligne brisée			
2	1	4	0,5	2			
3	2	8	0,25	2	En A3 : =A2+1	En B3 : =B2*2	En C3 : =C2/2
4	3	16	0,125	2			
5	4	32	0,0625	2			
6	5	64	0,03125	2			
7	6	128	0,015625	2			
8	7	256	0,0078125	2			
9	8	512	0,00390625	2			
10	9	1024	0,001953125	2			
11							

À la ligne 8 : A8 contient la formule A7+ 1, B8 contient la formule B7×2, C8 contient C7/2
À la ligne 37 : A37 contient la formule A36+ 1, B37 contient la formule B36×2, C37 contient C36/2
Complément : on peut ajouter une colonne D où on calcule le produit B*C pour obtenir la longueur de la ligne brisée.
3) a)b)c)
n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, l'étape suivant l'étape n est l'étape $n + 1$.
Le nombre de segments à l'étape n+1 est noté : s_{n+1},
la longueur d'un segment est notée l_{n+1},
et, on a les relations suivantes : $s_{n+1} = 2\times s_n$ et $l_{n+1} = \frac{1}{2}\ l_n$.

N° de l'étape	*Nombre de segments*	*Longueur d'un segment*
n	s_n	l_n
$n + 1$	$s_{n+1} = 2\times s_n$	$l_{n+1} = \frac{1}{2}\ l_n$

TP1 page 136 La suite de Syracuse (conjecture de Collatz)

$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n+1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$, le premier terme $u_1 = a$ avec a entier supérieur ou égal à 1 et $n \geqslant 1$.

1) ***Premier cas : a = 1***.

$u_1 = 1$.
1 étant impair, $u_2 = 3\times 1 + 1 = 4$,

u_2 étant pair, $u_3 = \frac{4}{2} = 2$,

u_3 étant pair, $u_4 = \frac{2}{2} = 1$.
On retrouve le terme 1, le cycle recommence.
Lorsque $a = 1$, (1 ; 4 ; 2 ; 1 ; 4 ; 2 ; 1 ; …).
Il suffit donc de s'arrêter quand un terme vaut 1 pour connaître tous les termes de la suite.

Deuxième cas : a = 2

$u_1 = 2$.
u_1 étant pair, $u_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

Troisième cas : a = 3

$u_1 = 3$.
3 étant impair, $u_2 = 3\times3 + 1 = 10$,
u_2 étant pair, $u_3 = \dfrac{10}{2} = 5$,
u_3 étant impair, $u_4 = 3\times5 + 1 = 16$
Puis on a successivement, 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Quatrième cas : a = 4

$u_1 = 4$.
4 est pair, on a successivement : 4 ; 2 ; 1.

Cinquième cas : a = 5

$u_1 = 5$, $u_2 = 16$, puis, 8 ; 4 ; 2 ; 1.

Dès qu'un des termes est une puissance de 2, on aura successivement les puissances décroissantes de 2, et, on s'arrête lorsque l'un des termes est 1.

Cas où a = 11
$u_1 = 11$; $u_2 = 34$; $\boldsymbol{u_3 = 17}$; $u_4 = 52$; $u_5 = 26$; $u_6 = 13$; $u_7 = 40$; $u_8 = 20$; $u_9 = 10$; $u_{10} = 5$; puis cas précédent.

Cas où a = 28
$u_1 = 14$; $u_2 = 7$; $u_3 = 22$; $\boldsymbol{u_4 = 11}$ puis cas précédent

2 a) Un algorithme :
Lire a
Tant que $a > 1$ faire
    Si a est pair alors
        a prend la valeur $a/2$
        sinon
        a prend la valeur $3\times a + 1$
    FinSi
    Afficher a
Fin TantQue

b) Avec Algobox

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  AFFICHER a
  TANT_QUE (a>1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI ((a/2)-floor(a/2)==0) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR a/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR 3*a+1
        FIN_SINON
    AFFICHER a
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 21
21
64
32
16
8
4
2
1

***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 42
42
21
64
32
16
8
4
2
1

***Algorithme terminé***
```

c) A priori, ce programme peut ne pas s'arrêter … il n'est pas prouvé que un des termes prendra la valeur 1.

3a) Modification du programme.
" Durée de vol " : c'est un compteur, à chaque passage dans la boucle " Tant que " on incrémente une variable de 1.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  compteur PREND_LA_VALEUR 1
  AFFICHER a
  TANT_QUE (a>1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI ((a/2)-floor(a/2)==0) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR a/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR 3*a+1
        FIN_SINON
    compteur PREND_LA_VALEUR compteur+1
    AFFICHER a
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "la durée de vol est:   "
  AFFICHER compteur
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 26
26
13
40
20
10
5
16
8
4
2
1
la durée de vol est:   11
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer a : 27
27
82
41
124
62
31
94
47
142
71
214
107
```

```
3644
1822
911
2734
1367
4102
2051
6154
3077
9232
4616
2308
1154
577
1732
```

```
106
53
160
80
40
20
10
5
16
8
4
2
1
la durée de vol est:    112
***Algorithme terminé***
```

Pour $a = 26$, la durée de vol est 11 et l'altitude maximale est: 40
Pour $a = 27$, la durée de vol est 112 et l'altitude maximale est: 9 232

TP4 page 137

1) Chacun des segments : $[A_i ; A_{i+1}]$ a pour longueur l.

La distance parcourue depuis A_0 jusqu'au point A_n est donc : $n \times l$

L'angle θ_{n-1} est l'angle $\widehat{A_n A_{n-1} x}$ où $[A_{n-1} x)$ est la demi-droite opposée à la demi-droite $[A_{n-1} A_{n-2})$

On a donc : $\theta_{n-1} = n\theta_0$.

La suite (θ_n) est donc une suite arithmétique de raison θ_0 , puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$\theta_n - \theta_{n-1} = (n+1)\ \theta_0 - n\theta_0 = \theta_0$.

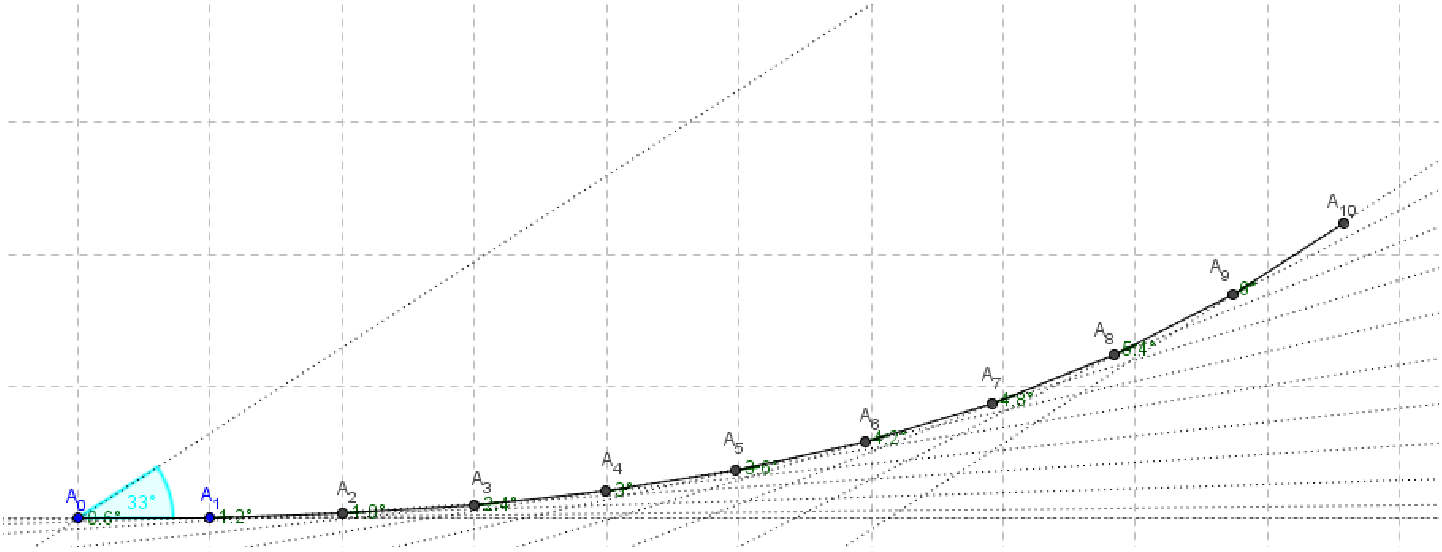
2) La somme θ des angles de θ_0 à θ_{n-1} est donc la somme de *n* termes d'une suite arithmétique :

on obtient : $\theta = \dfrac{(\theta_0 + \theta_{n-1}) \times n}{2} = \dfrac{n(n+1) \times \theta_0}{2}$

Pour avoir cette somme égale à l'angle voulu α, il faut choisir : $\theta_0 = \dfrac{2\alpha}{n(n+1)}$.

3) Application numérique :

$n = 10$, $\alpha = 33°$, donc, $\theta_0 = \dfrac{2 \times 33}{110} = 0{,}6°$



étapes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
angles	0,6°	1,2°	1,8°	2,4°	3,0°	3,6°	4,2°	4,8°	5,4°	6°
somme des angles	0,6°	1,8°	3,6°	6°	9°	12,6°	16,8°	21,6°	27°	33°

TP7 page 140

Division euclidienne :

Définition :

a et b sont des entiers non nuls.
la division euclidienne est la recherche du couple d'entiers (q, r) tels que $a = bq + r$ ET $0 \leqslant r < b$

Vocabulaire :

dividende = diviseur×quotient + reste.

Partie A :

$u_n = 8n^2 + n$ $\qquad$ $d_n = 4n + 1$

Première méthode ***sans respecter la démarche proposée***.

On cherche " combien de fois " on a : $4n + 1$ dans $8n^2 + n$.

Il est immédiat que $2n \times 4n = 8n^2$, on cherche donc à multiplier d_n par $2n$, soit : $2n(4n + 1) = 8n^2 + 2n$.

On a donc : $8n^2 + n = 2n(4n + 1) - n$

Mais, $-n < 0$, (ce n'est pas le reste dans la division euclidienne), on a donc dans $2n$ au moins " une fois de trop "

Soit : $8n^2 + n = (2n - 1)(4n + 1) - n + 4n + 1 = (2n - 1)(4n + 1) + 3n + 1$

Comme $0 \leqslant 3n + 1 < 4n + 1$ lorsque $n \geqslant 1$, on a ainsi la division euclidienne de u_n par d_n

La suite (q_n) est définie par : $q_n = 2n - 1$ et la suite (r_n) par $r_n = 3n + 1$

Deuxième méthode : celle proposée dans le TP.

On cherche pour les premiers termes une relation possible …

n	u_n	d_n	***division euclidienne***	q_n	r_n
1	9	5	$9 = 5 \times 1 + 4$	1	4
2	34	9	$34 = 9 \times 3 + 7$	3	7
3	75	13	$75 = 13 \times 5 + 10$	5	10
4	132	17	$132 = 17 \times 7 + 13$	7	13
...					

(d_n) est une suite arithmétique de premier terme $d_1 = 5$ et de raison 4 (par définition de d_n)

Conjecture :

Il semble que (q_n) est une suite arithmétique de premier terme $q_1 = 1$ et de raison 2, donc, $q_n = 1 + (n-1)\times 2$

$= 2n - 1$

Il semble que (r_n) est une suite arithmétique de premier terme $r_1 = 4$ et de raison 3, donc, $r_n = 4 + (n-1)\times 3$

$= 3n + 1$

Preuve :

Pour tout $n \geqslant 1$,

$u_n = 8n^2 + n$ par définition
Évaluons : $(4n + 1)\times(2n - 1) + (3n + 1)$
on développe, on réduit, …. et on trouve u_n.
Comme $0 \leqslant 3n + 1 < 4n + 1$
On a montré : $u_n = d_n\times q_n + r_n$ et $0 \leqslant r_n < d_n$
ce qui est la définition de la division euclidienne de u_n par d_n.
La preuve de la conjecture est ainsi faite.

Partie B :

$u_n = 3n^2 - n + 1$ $\qquad$ $d_n = 2n - 1$

On cherche pour les premiers termes une relation possible …

n	u_n	d_n	***division euclidienne***	q_n	r_n
1	3	1	$3 = 1\times 3 + 0$	3	0
2	11	3	$11 = 3\times 3 + 2$	3	2
3	25	5	$25 = 5\times 5 + 0$	5	0
4	45	7	$45 = 7\times 6 + 3$	6	3
5	71	9	$71 = 9\times 7 + 8$	7	8
6	103	11	$103 = 11\times 9 + 4$	9	4
7	141	13	$141 = 13\times 10 + 11$	10	11
8	185	15	$185 = 15\times 12 + 5$	12	5
9				13	14
…					

(d_n) est une suite arithmétique de premier terme $d_1 = 1$ et de raison 2 (par définition de d_n)

Conjecture :

Il semble que

- on doit distinguer deux " formules " pour la même suite selon la parité des indices.

On introduit deux suites extraites de la suite (r_n) et deux suites extraites de la suite (q_n).

On commence par r_n

Si *n* est pair et $n \geqslant 2$, on a : (r_n) est une suite arithmétique de premier terme $r_2 = 2$ et de raison 1.

Nouveau tableau en ne prenant que les indices pairs :

n	***p***	u_n	d_n	***division euclidienne***	q_n	w_p	r_n	v_p
2	1	11	3	$11 = 3\times3 + 2$	3	3	2	2
4	2	45	7	$45 = 7\times6 + 3$	6	6	3	3
6	3	103	11	$103 = 11\times9 + 4$	9	9	4	4
8	4	185	15	$185 = 15\times12 + 5$	12	12	5	5
...								

Il semble qu'on puisse écrire $r_n = \dfrac{n}{2} + 1$

Puisque n est pair, on peut écrire : $n = 2p$, ainsi, $r_{2p} = p + 1$

le prochain terme est $r_{2p+2} = r_{2(p+1)} = r_{2p} + 1$

On pose : pour $p \geqslant 1$, $v_p = r_{2p} = p + 1$

$v_{p+1} = v_p + 1$

Si *n* est impair et $n \geqslant 5$, on a : (r_n) est une suite arithmétique de premier terme $r_5 = 8$ et de raison 3.

Nouveau tableau en ne prenant que les indices impairs :

n	***p***	u_n	d_n	***division euclidienne***	q_n	t_p	r_n	s_p
1	0	3	1	$3 = 1\times3 + 0$	3	3	0	0
3	1	25	5	$25 = 5\times5 + 0$	5	5	0	0
5	2	71	9	$71 = 9\times7 + 8$	7	7	8	8
7	3	141	13	$141 = 13\times10 + 11$	10	10	11	11
9	4				13	13	14	14
...								

recherche d'une écriture de r_n dans ce cas.

On pose $n = 2p + 1$, le premier terme est $r_5 = r_{2\times2+1} = 8$ $(p = 2)$

$r_{2p+3} = r_{2(p+1)+1} = r_{2p+1} + 3$

On pose pour $p \geqslant 2$, $s_p = r_{2p+1}$

$s_{p+1} = r_{2(p+1)+1}$

On passe de l'indice p à l'indice $p + 1$ en ajoutant 3.

De 2 à p, on a : $p - 2$ étapes.

$s_p = s_2 + (p - 2)\times3 = 8 + 3p - 6 = 3p + 2$

(*autrement dit* : $r_{2p+1} = r_{2\times2+1} + (p - 2)\times3 = 8 + 3p - 6 = 3p + 2$)

(Avec r_n et n impair, on a : $r_n = \dfrac{3(n-1)}{2} + 2$).

Étude de la suite(q_n)

Si *n* est pair et $n \geqslant 2$, on a : (q_n) est une suite arithmétique de premier terme $q_2 = 3$ et de raison 3.

(voir tableau avec indice pair)

On peut écrire : $q_{2p} = 3 + (p-1)\times 3 = 3p$

ou encore : $q_n = 3\times \dfrac{n}{2}$ si n est pair et $n \geqslant 2$.

En posant pour $p \geqslant 1$: $w_p = q_{2p} = 3p$

Si *n* est impair et $n \geqslant 5$, on a : (q_n) est une suite arithmétique de premier terme $q_5 = 7$ et de raison 3.

(voir tableau avec indice impair).

On pose pour $p \geqslant 2$, $t_p = q_{2p+1}$

$t_{p+1} = q_{2(p+1)+1}$

On passe de l'indice p à l'indice $p + 1$ en ajoutant 3.

De 2 à p, on a : $p - 2$ étapes.

$t_p = t_2 + (p-2)\times 3 = 7 + 3p - 6 = 3p + 1$

(*autrement dit* : $q_{2p+1} = q_{2\times 2+1} + (p-2)\times 3 = 7 + 3p - 6 = 3p + 1$)

ou encore : $q_n = \dfrac{3(n-1)}{2} + 1$ si n est impair et $n \geqslant 5$.

Preuve :

On distingue les deux cas, n pair et n impair, et, on fait les calculs avec les suites extraites selon la parité.

Si *n* est pair : $n \geqslant 2$

on pose $n = 2p$. (donc $p \geqslant 1$)

$u_{2p} = 3(2p)^2 - (2p) + 1 = 12p^2 - 2p + 1$

$d_{2p} = 2(2p) - 1 = 4p - 1$ $q_{2p} = 3p$ $r_{2p} = p + 1$

On calcule : $d_{2p}\times q_{2p} + r_{2p}$

$(4p-1)\times 3p + p + 1 = 12p^2 - 3p + p + 1 = 12p^2 - 2p + 1 = u_{2p}$

et $p + 1 < 4p - 1$ est vraie lorsque $p \geqslant 1$.

La preuve de la conjecture est ainsi faite lorsque n est pair.

Si *n* est impair : $n \geqslant 5$

on pose $n = 2p + 1$. (donc $p \geqslant 2$)

$u_{2p+1} = 3(2p+1)^2 - (2p+1) + 1 = 12p^2 + 12p + 3 - 2p - 1 + 1 = 12p^2 + 10p + 3$

$d_{2p+1} = 2(2p+1) - 1 = 4p + 1$ $q_{2p+1} = 3p + 1$ $r_{2p+1} = 3p + 2$

On calcule : $d_{2p+1}\times q_{2p+1} + r_{2p+1}$

$(4p+1)\times (3p+1) + 3p + 2 = 12p^2 + 4p + 3p + 1 + 3p + 2 = 12p^2 + 10p + 3 = u_{2p+1}$

et $3p + 2 < 4p + 1$ est vraie lorsque $p \geqslant 2$

La preuve de la conjecture est ainsi faite lorsque n est impair.

---

19 page 141

(v_n) définie par $v : n \mapsto 3n - 4$

1) $v(n+1) = 3(n+1) - 4 = 3n - 1$

$v(n-1) = 3(n-1) - 4 = 3n - 7$

$v(n) + 1 = 3n - 4 + 1 = 3n - 3$

$v(n) - 1 = 3n - 4 - 1 = 3n - 5$

2) Avec l'écriture indicielle :
$v_{n+1} = 3n - 1$, $v_{n-1} = 3n - 7$, $v_n + 1 = 3n - 3$, $v_n - 1 = 3n - 5$.

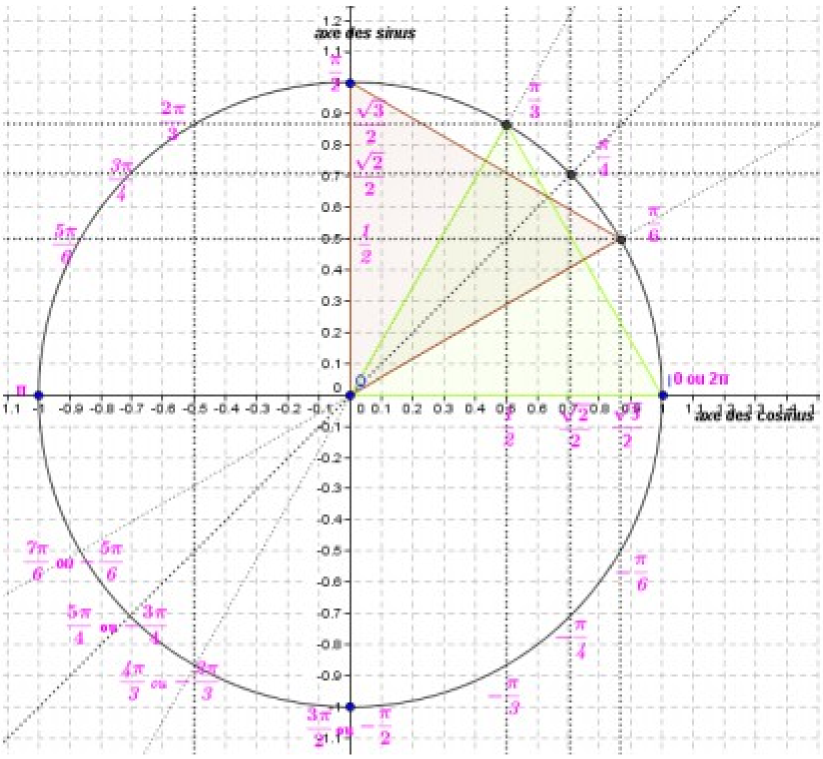
Remarque : (v_n) est une suite arithmétique de raison 3

20 page 141 **Suite explicite (fonction de *n*) *u*(n)= *f*(*n*)**

Indices	$u_n = 4n + 5$	$u_n = n^2$	$u_n = (-2)^n$	$u_n = \frac{n-1}{n+2}$
0	$u_0 = 5$	$u_0 = 0$	$u_0 = 1$	$u_0 = -\frac{1}{2}$
1	$u_1 = 9$	$u_1 = 1$	$u_1 = -2$	$u_1 = 0$
2	$u_2 = 13$	$u_2 = 4$	$u_2 = 4$	$u_2 = \frac{1}{4}$
3	$u_3 = 17$	$u_3 = 9$	$u_3 = -8$	$u_3 = \frac{2}{5}$
4	$u_4 = 21$	$u_4 = 16$	$u_4 = 16$	$u_4 = \frac{1}{2}$
10	$u_{10} = 45$	$u_{10} = 100$	$u_{10} = 1024$	$u_{10} = \frac{3}{4}$.
Remarques	suite arithmétique de raison 4		suite géométrique de raison –2	

21 page 141

$\frac{\pi}{2}$ est un réel auquel on peut associer sur le cercle trigonométrique le point de coordonnées (0 ; 1) ; l'axe des abscisses est l'axe où on lit le cosinus et l'axe ds ordonnées, l'axe où on lit les sinus.



$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

si $n = 0$, $\sin(0) = 0$, (Point de coordonnées (1, 0) associé à 0)

si $n = 1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, (Point de coordonnées (0, 1) associé à $\frac{\pi}{2}$)

si $n = 2$, $\sin\pi = 0$, (Point de coordonnées (–1, 0) associé à π)

si $n = 3$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, (Point de coordonnées (0, –1) associé à $\frac{3\pi}{2}$)

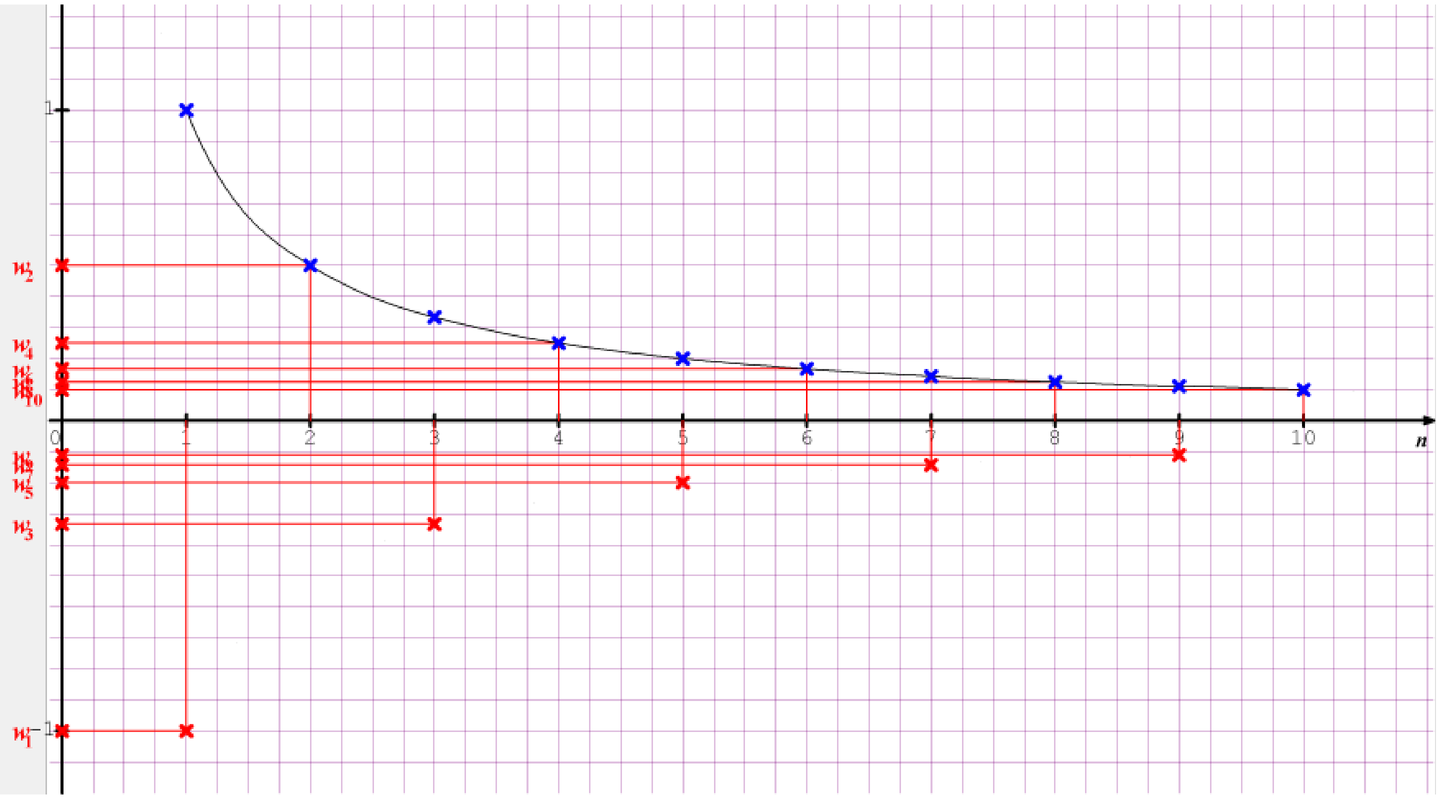
si $n = 4$, $\sin 2\pi = 1$, (Point de coordonnées (1, 0) associé à 2π)

si $n = 100$, $\sin 50\pi = 1$, (Point de coordonnées (1, 0) associé à 50π) (25 tours).

Suites	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_{100}
$u_n = 4^n - 3n$	1	1	10	55	244	4^{100} - 300
$u_n = 1{,}05^n$	1	1,05	1,1	1,157625	1,215 …	131,501 ...
$u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	–1	0	0
$u_n = 2 + (-1)^n$	3	1	3	1	3	3

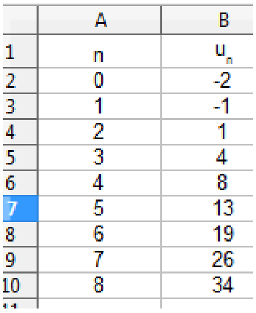
22 page 142

Représentation graphique des dix premiers termes de la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}$ et de la suite w définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$

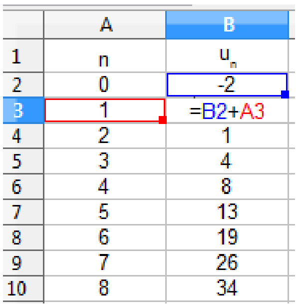


28 page 142

a) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

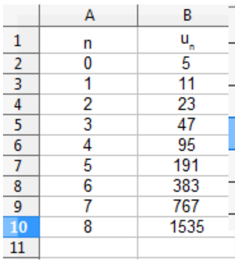


	A	B
1	n	u_n
2	0	-2
3	1	-1
4	2	1
5	3	4
6	4	8
7	5	13
8	6	19
9	7	26
10	8	34

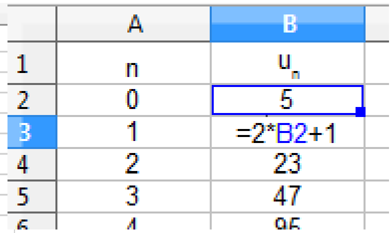


	A	B
1	n	u_n
2	0	-2
3	1	=B2+A3
4	2	1
5	3	4
6	4	8
7	5	13
8	6	19
9	7	26
10	8	34

b) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n - 1 \end{cases}$



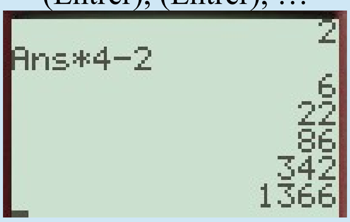
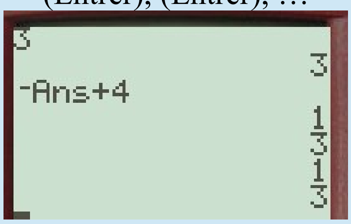
	A	B
1	n	u_n
2	0	5
3	1	11
4	2	23
5	3	47
6	4	95
7	5	191
8	6	383
9	7	767
10	8	1535
11		



	A	B
1	n	u_n
2	0	5
3	1	=2*B2+1
4	2	23
5	3	47

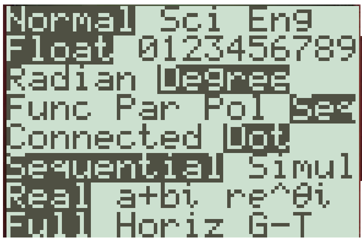
---

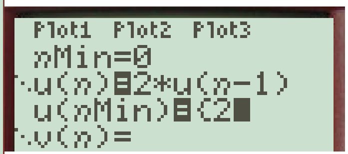
29 page 142 Suite définie par récurrence *u(0) donné et u(n+1) = f(u$_n$)*

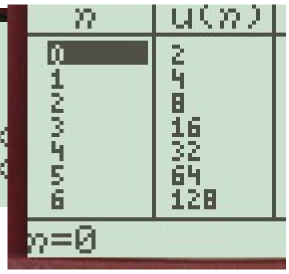
Indices	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 2 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n + 4 \end{cases}$	$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{n+1} \end{cases}$
0	$u_0 = 2$	$u_0 = 3$	$u_0 = 0$
1	$u_1 = 4\times2 - 2 = 6$	$u_1 = 1$	$u_1 = 0^2 + \dfrac{3}{0+1} = 3$
2	$u_2 = 4\times6 - 2 = 22$	$u_2 = 3$	$u_2 = 3^2 + \dfrac{3}{1+1} = \dfrac{21}{2}$
3	$u_3 = 4\times22 - 2 = 86$	$u_3 = 1$	$u_3 = \left(\dfrac{21}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2+1} = \dfrac{445}{4}$
4	$u_4 = 4\times86 - 2 = 342$	$u_4 = 3$	$u_4 = \left(\dfrac{445}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{198037}{16}$
5	$u_5 = 4\times342 - 2 = 1366$	$u_5 = 1$	$u_5 = \left(\dfrac{198037}{16}\right)^2 + \dfrac{3}{4+1} = \dfrac{196093267613}{1280}$
Programmation rapide à la calculatrice :	On entre 2 (Entrer) On entre la formule de récurrence : Rép*4-2 (Entrer), (Entrer), … 	On entre 3 (Entrer) On entre la formule de récurrence : (-)Rép+4 (Entrer), (Entrer), … 	XXXXXXXXXXX

30 page 142

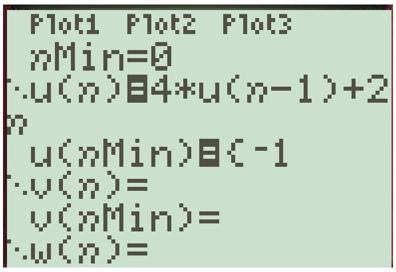
a) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=2\times u_{n-1} \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$. $u_1 = 4$, $u_2 = 8$, $u_3 = 16$, $u_4 = 32$, $u_5 = 64$

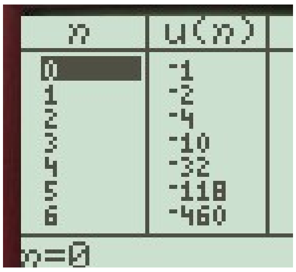






b) $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_n=4u_{n-1}+2n \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$. $u_1 = -2$, $u_2 = -4$, $u_3 = -10$, $u_4 = -32$, $u_5 = -118$





c) $\begin{cases} u_0=3 \\ u_n=2u_{n-1}-3 \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$. $u_1 = 3$, $u_2 = 3$, $u_3 = 3$, $u_4 = 3$, $u_5 = 3$

---

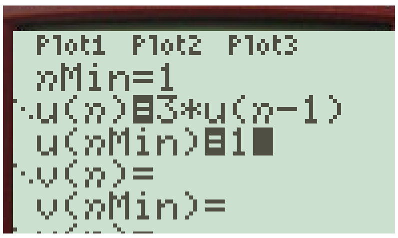
31 page 142

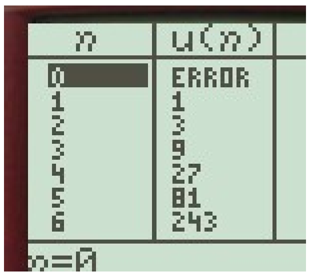
a)

$\begin{cases} u_0=0 \\ u_1=1 \\ u_{n+2}=3u_{n+1} \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$.

Si $n = 0$, on a : $u_2 = 3u_1 = 3$, puis, $u_3 = 3u_2 = 9$, $u_4 = 27$, $u_5 = 81$ La relation de récurrence n'est pas définie pour u_1 en fonction de u_0.

Sur la calculatrice, il faut commencer à $u_1 = 1$.





b) $\begin{cases} u_0=0 \\ u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \end{cases}$ Utiliser un tableur … $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$ (Suite de Fibonacci)

---

32 page 142

1) Suites de l'exercice 29, en remplaçant n par $n - 1$,

$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=4u_n-2 \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$ devient $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=4u_{n-1}-2 \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$

$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=-u_n+4 \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$ devient $\begin{cases} u_0=3 \\ u_n=-u_{n-1}+4 \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$

$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=u_n^2+\dfrac{3}{n+1} \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$ devient $\begin{cases} u_0=0 \\ u_n=u_{n-1}^2+\dfrac{3}{n} \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$

2) Suites de l'exercice 30

a) $\begin{cases} u_0=2 \\ u_n=2\times u_{n-1} \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$ devient $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=2\times u_n \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$.

b) $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_n=4u_{n-1}+2n \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$ devient $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=4\times u_n+2(n+1) \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$.

c) $\begin{cases} u_0=3 \\ u_n=2u_{n-1}-3 \end{cases}$ pour $n \geqslant 1$ devient $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=2\times u_n-3 \end{cases}$ pour $n \geqslant 0$.

37 page 143

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 2$, d'où,
$u_n = -3 + 2n$.
$u_0 = -3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$

38 page 143

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 2$, d'où,
$u_n = 10 + 2n$.
$u_{50} = 110$.

39 page 143

(u_n) est la suite définie par $u_1 = -6$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 5$,
(u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $u_1 = -6$ et de raison $r = 5$
$u_n = -6 + (n - 1)\times 5$.
$u_{20} = 89$

40 page 143

a) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{20} = 10$ et $u_{34} = -18$.
Or, $u_{34} = u_{20} + (34 - 20)r$;
On en déduit: $r = \dfrac{-18-10}{14} = -2$
Le premier terme $u_0 = u_{20} + (0 - 20)\times(-2) = 10 + 40 = 50$
(ou bien : $u_0 = u_{34} + (0 - 34)\times(-2) = -18 + 68 = 50$)

b) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_{12} = 8$ et $u_4 = -12$.
Or, $u_{12} = u_4 + (12 - 4)r$;
On en déduit: $r = \dfrac{8-(-12)}{8} = \dfrac{5}{2}$.
Le premier terme $u_0 = u_{12} + (0 - 12)\times(\dfrac{5}{2}) = 8 - 30 = -22$

(ou bien : $u_0 = u_4 + (0-4)\times(\frac{5}{2}) = -12 - 10 = -22$)

---

43 page 143

a) $u_n = -5n + 7$

$u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 7 + 5n - 7 = -5$

(u_n) est une suite arithmétique de raison –5.
b) $u_1 = 4$, et, pour $n \geqslant 2$, $u_n = u_{n-1} + 4$
(u_n) est une suite arithmétique de raison 4
c) $u_1 = 2$, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + n - 1$
$u_2 = 2 + 2 - 1 = 3$ et $u_3 = 3 + 3 - 1 = 5$.
Comme $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

---

44 page 143

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et raison $\frac{1}{2}$.

Les points représentatifs de (u_n) ont pour coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Ces points sont situés sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.

---

45 page 143

Graphique a/ : suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = -3$ $\qquad$ $u_n = -3 + 2n$

Graphique b/ : suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison –1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - 1$ et $u_1 = 2$ $\qquad$ $u_n = 2 + (n-1)\times(-1) = 3 - n$

Graphique c/ : suite arithmétique de premier terme $u_1 = \frac{4}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}$ et $u_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $u_n = \frac{4}{3} + (n-1)\times\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3}n$.

---

50 page 144

a) la suite d'entiers consécutifs de 1 à 25 contient 25 termes.

b) la suite d'entiers consécutifs de 0 à 15 contient 16 termes.

c) la suite d'entiers consécutifs de 5 à 21 contient 17 termes.

d) la suite d'entiers pairs consécutifs de 2 à 20 contient 10 termes.

(Si $u_0 = 2$ et $u_n = 2 + 2n$ alors $u_9 = 20$ car $20 = 2 + 9\times2$,. Or, le nombre de termes de 0 à 9 est 10)

La fonction u associe à la liste ordonnée des entiers (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9) la liste ordonnée des réels $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9) = (2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10\ ;\ 12\ ;\ 14\ ;\ 16\ ;\ 18\ ;\ 20)$

---

51 page 144

a) A = 1 + 2 + 3 + ... + 39

On pose (u_n) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 1, et, 39 = 1 + 38×1.

A est la somme de 39 termes consécutifs de cette suite arithmétique.

A = $\frac{(1+39)\times 39}{2}$ = 780 A = $\sum_{i=1}^{i=39} i$ = 780.

b) B = 2 + 4 + 6 + 8 + … + 24

On pose (u_n) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

(u_n) est une suite arithmétique de raison 2, et, 24 = 2 + 11×2.

B est la somme de 12 termes consécutifs de cette suite arithmétique.

B = $\frac{(2+24)\times 12}{2}$ = 156 B = $\sum_{i=1}^{i=12} 2i$ = 156

c) C = 100 + 101 + 102 + … + 140

On pose (u_n) $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 1, et, 140 = 100 + 40×1.

C est la somme de 41 termes consécutifs de cette suite arithmétique.

C = $\frac{(100+140)\times 41}{2}$ = 4 920 C = $\sum_{i=0}^{i=40} (100+i)$ = 100×41 + $\sum_{i=0}^{i=40} i$ = 4 100 + $\frac{(0+40)\times 41}{2}$ = 4 920

---

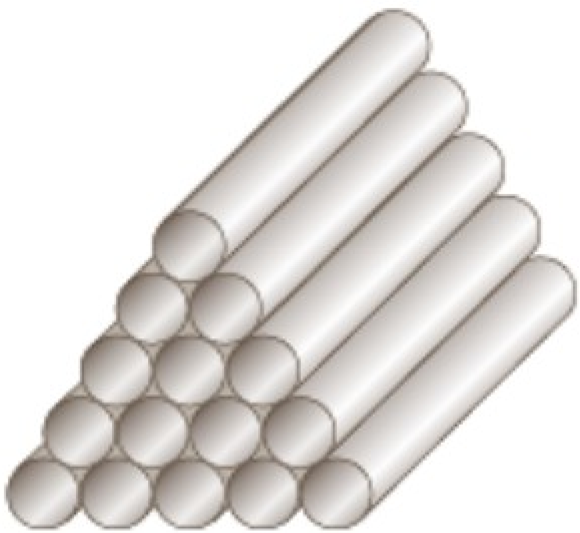
52 page 144

1) a)

Si la première rangée est formée de 10 tuyaux, on a :

10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = $\frac{(10+1)\times 10}{2}$ =

55 tuyaux



b) pour *n* tuyaux à la première rangée, on obtient la somme des *n* premiers entiers naturels :

$N = \frac{(1+n)\times n}{2}$

2) On veut empiler 136 tuyaux :

On résout : $\frac{(1+n)\times n}{2}$ = 136

Soit $n^2 + n - 272 = 0$

cette équation du second degré a deux solutions : ($\Delta = 1089 = 33^2$)

$n_1 = -17$ et $n_2 = 16$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, on obtient : la première rangée contient 16 tuyaux.

56 page 145

Analyse de méthodes sur un exemple :

Le château a 3 niveaux …

a) combien y a-t-il de cartes horizontales ?

on a : 1 + 2 = 3 cartes

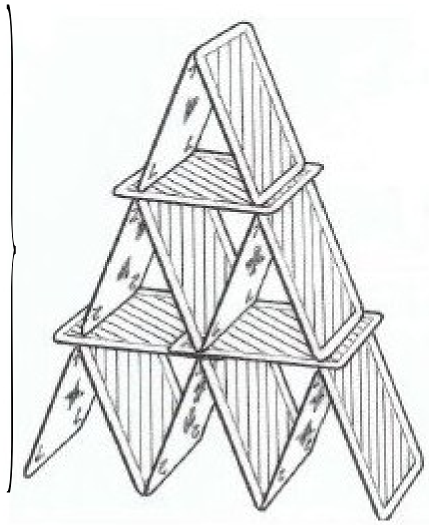
b) Combien y a-t-il de cartes obliques ?

on a : 2 + 4 + 6 = 12 cartes

niveau 1

niveau 2

niveau 3



Si on ajoute un 4ième niveau …

Combien ajoute-t-on de cartes ?

Horizontalement, on ajoute 3 cartes,

et en obliques, on ajoute 8 cartes.

Cas général :

En horizontale, on passe du niveau k au niveau $k+1$ en ajoutant k cartes. Le premier niveau comporte une seule carte horizontale.

Si le château de cartes a n niveaux, le niveau n n'a aucune carte horizontale.

Soit (h_n) la suite donnant le nombre de cartes horizontales jusqu'au niveau n.

$h_1 = 1$, $h_2 = 2$, …. , $h_{n-1} = n-1$, $h_n = 0$ (Sauf le dernier terme, suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1).

Le nombre de cartes horizontales est $S_{Horiz} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \dfrac{(1+(n-1))\times(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

En oblique, on passe du niveau k au niveau $k+1$ en ajoutant $2(k+1)$ cartes. Le premier niveau comporte deux cartes en oblique.

Soit (O_n) la suite donnant le nombre de cartes jusqu'au niveau n.

$O_1 = 2$, $O_2 = 4$, …. , $O_n = 2n$ (suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2)

le nombre de cartes en oblique est $S_{Oblique} = 2 + 4 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + \dots + n) = \dfrac{2\times(1+n)n}{2} = n(n+1)$

le nombre total de cartes est donc : $u_n = S_{Oblique} + S_{Horiz} = n(n+1) + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{2n^2+2n+n^2-n}{2} = \dfrac{3n^2+n}{2}$

Autre présentation :

On appelle niveau un ensemble de cartes obliques AVEC les cartes horizontales AU-DESSUS …

Au niveau n, on a des cartes horizontales et des cartes en oblique :

On note v_n le nombre de cartes horizontales et en ce cas : $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \end{cases}$.

On définit ainsi une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.

$v_n = 0 + (n-1)\times 1 = n-1$

Le nombre de cartes horizontales jusqu'au niveau n est donc : $S_{\text{horiz}} = 0 + 1 + \ldots + (n-1) = \dfrac{(0+(n-1))\times n}{2}$

On note w_n le nombre de cartes obliques et en ce cas : $\begin{cases} w_1 = 2 \\ w_{n+1} = w_n + 2 \end{cases}$

On définit ainsi une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2.

$w_n = 2 + (n-1)\times 2 = 2n$

Le nombre de cartes obliques jusqu'au niveau n est donc : $S_{\text{obl}} = 2 + 4 + \ldots + (2n) = \dfrac{(2+2n)\times n}{2}$

Le nombre u_n de cartes au total pour le château est la somme (résultat précédent).

Autre procédé **:**

On appelle niveau un ensemble de cartes obliques AVEC les cartes horizontales AU-DESSOUS …

et il faudra au dernier niveau enlever une rangée horizontale qui n'existe pas … lors de la somme.

Soit x_n le nombre de cartes au niveau n : $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = x_n + 3 \end{cases}$

Ainsi (x_n) est une suite arithmétique de raison 3 et $x_n = 3 + (n-1)\times 3 = 3n$.

Dans ce cas, $u_n = \dfrac{(3+3n)\times n}{2} - n$ (on enlève les " n " cartes horizontales comptabilisées au dernier niveau).

En développant la relation obtenue : $\dfrac{(3+3n)\times n}{2} - n = \dfrac{3n+3n^2-2n}{2} = \dfrac{3n^2+n}{2}$.

Commentaire :

Ce qu'il ne faut pas faire, commencer par un procédé et finir avec un autre …

On dispose de 500 cartes :

On résout : $\dfrac{3n^2+n}{2} = 500$, soit : $3n^2 + n - 1000 = 0$

On résout : …. (second degré)

On trouve $n = \dfrac{-1+\sqrt{12001}}{6} \approx 18, \ldots$

on a donc : 17 niveaux " complets " qui utilisent : (somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3, premier terme : $x_1 = 3$, dernier terme $x_{17} = 3 + 16\times 3 = 51$, nombre de termes : 17

d'où, $\dfrac{(3+51)\times 17}{2} = 459$ cartes.

Il reste $500 - 459 = 41$ cartes qui permettent de placer $18\times 2 = 36$ cartes au niveau 18.

On peut donc faire 18 niveaux avec 500 cartes et il reste 5 cartes.

---

58 page 145 ***" télescopique "***

Soit la suite (u_n) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) la recherche des premiers termes, $u_0 = 0$, $u_1 = 0 + 2\times0 + 1 = 1$, $u_2 = 1 + 2\times1 + 1 = 4$, $u_3 = 4 + 2\times2 + 1 = 9$

$u_4 = 16$, $u_5 = 25$ …

conjecture : $u_n = n^2$

2) le procédé indiqué ici est fréquent …

u_1	" = "	$u_0 + 2\times0 + 1$	on fait la somme membre à membre de l'égalité, on obtient une nouvelle égalité, mais, les termes u_i s'annulent pour $1 \leqslant i \leqslant n - 1$
u_2	" = "	$u_1 + 2\times1 + 1$	
u_3	" = "	$u_2 + 2\times2 + 1$	
…	" = "	…	
u_n	" = "	$u_{n-1} + 2\times(n - 1) + 1$	
———		———	
u_n	" = "	$u_0 + 2(0 + 1 + \ldots (n - 1)) + (1 + 1 + \ldots + 1)$	Somme

Or, $u_0 = 0$,

$0 + 1 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{[0+(n-1)]\times n}{2}$ (somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique)

$1 + 1 + \ldots + 1 = n$ (n lignes dans le tableau)

Finalement : $u_n = 0 + 2\times \dfrac{[0+(n-1)]\times n}{2} + n = (n - 1)n + n = n^2$

---

59 page 145

(u_n) suite géométrique de raison q.

a) $u_0 = 1$ et $q = 2$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, $u_4 = 16$, $u_5 = 32$

b) $u_0 = 1$ et $q = -2$, $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 4$, $u_3 = -8$, $u_4 = 16$, $u_5 = -32$

c) $u_0 = 1$ et $q = -1$, $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$, $u_4 = 1$, $u_5 = -1$

d) $u_0 = 1$ et $q = \dfrac{1}{2}$, $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{4}$, $u_3 = \dfrac{1}{8}$, $u_4 = \dfrac{1}{16}$, $u_5 = \dfrac{1}{32}$

---

62 page 145

Année 2010 + n, le prix de l'article est noté p_n.

Chaque année l'augmentation est de 1 %, d'où, le coefficient multiplicateur 1,01

Année	Indice	Prix = p_n	Calcul
2010	0	8,2	XXXXXX
2011	1	$p_1 = 8{,}282$	$8{,}2\times1{,}01$
2012	2	$p_2 = 8{,}36482$	$8{,}282\times1{,}01$
$2010 + n$	n	p_n	$p_{n-1}\times1{,}01$
$2010+ (n + 1)$	$n + 1$	p_{n+1}	$p_n\times1{,}01$

La suite (p_n) est donc une suite géométrique de premier terme $p_0 = 8{,}2$ et de raison 1,01

On en déduit: Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n = 8{,}2\times1{,}01^n$

En 2025, le prix est $p_{15} = 8{,}2\times1{,}01^{15} = 9{,}52$ € en arrondissant au centime le plus proche.

---

63 page 145

$C_0 = 6\ 500$ € Taux d'intérêt : 4% Intérêt capitalisé

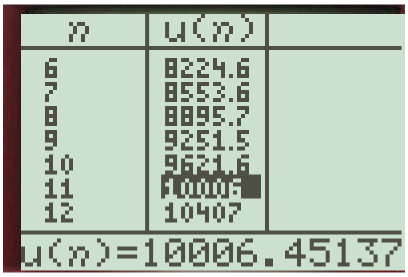
1) La n-ième année, le capital est C_n , l'année suivante, on a : $C_{n+1} = 1{,}04\times C_n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

La suite (C_n) est donc une suite géométrique de premier terme $C_0 = 6\ 500$ et de raison 1,04,

d'où, $C_n = 6\ 500\times1{,}04^n$

2) Au bout de 5 ans, le capital est : $C_5 = 6\ 500\times1{,}04^5 = 7908{,}24$ € par défaut.

3) Le capital a augmenté de 50% quand il atteint : $6\ 500\times1{,}5 = 9\ 750$



Puisque $C_{10} < 9\ 750 < C_{11}$, au bout de 11 ans, le capital a augmenté de plus de 50 %

---

66 page 146

a) $1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{20}$

$S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^{20} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$

On reconnaît la somme de 21 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3, d'où,

$S = \dfrac{3^{21}-1}{3-1} = \dfrac{3^{21}-1}{2} =$

b) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 + \dots + 1024 = (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + \dots (-2)^{10}$

On reconnaît la somme de 11 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison –2,

d'où, $S = \dfrac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = \dfrac{1+2^{11}}{3} = \dfrac{2049}{3} = 683$ car, $(-2)^{11} = -\ 2^{11} = -2048$

c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{2^{10}}$

On reconnaît la somme de 11 termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-\frac{1}{2}$,

d'où, $S = \dfrac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{11}}{1-(\frac{-1}{2})} = \frac{2}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)$

---

68 page 146 ***Alexis est gourmand***

Soit u_n la part mangée par Alexis lorsqu'il se sert la $n^{\text{ième}}$ fois et v_n la part restante du gâteau.

Recherche d'une relation :

Au départ : $v_0 = 1$

La première fois, il mange : $u_1 = \frac{1}{2}$ et il reste $v_1 = \frac{1}{2}$

à la seconde fois, il mange $u_2 = \frac{1}{2} v_1$ et il reste $v_2 = v_1 - \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} v_1$.

à la troisième fois, il mange $u_3 = \frac{1}{2} v_2$ et il reste $v_3 = v_2 - \frac{1}{2} v_2 = \frac{1}{2} v_2$.

Conjecture :

Il semble que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $\frac{1}{2}$.

Démonstration :

Soit v_n la part restante du gâteau au la $n^{\text{ième}}$ fois.

Alexis prend $u_n = \frac{1}{2} v_n$, et, il reste $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2} v_n = \frac{1}{2} v_n$

(v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

On en déduit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

Conclusion :

À la 20ième fois, il reste donc : $v_{20} = \frac{1}{2^{20}}$ et Alexis a mangé $1 - \frac{1}{2^{20}} = \frac{2^{20}-1}{2^{20}}$ du gâteau.

Autre méthode :

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

En effet, $u_{n+1} = \frac{1}{2} v_n = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Alexis a mangé :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{19}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{20}}$$

Complément :

Remplacer " il mange à chaque fois la moitié …. " par " il mange à chaque fois le tiers … "

---

72 page 146

Un échiquier comprend 64 cases.

Le nombre de grains de blé sur l'échiquier est N = 1 + 2+ 4 + … + 2^{63} = $\frac{2^{64}-1}{2-1}$ = $2^{64} - 1$

La masse en mg, sachant qu'un grain de blé pèse en moyenne 40 mg, est : M = ($2^{64} - 1)\times 40$ (mg)

Sachant qu'une tonne fait 10^9 mg , M = ($2^{64} - 1)\times 40\times 10^{-9}$ tonnes

Soit environ $7{,}4\times 10^{11}$ tonnes.

La production mondiale de 2009-2010 étant de 600 millions de tonnes (= 6×10^8 tonnes) ne suffit pas pour couvrir l'échiquier.

---

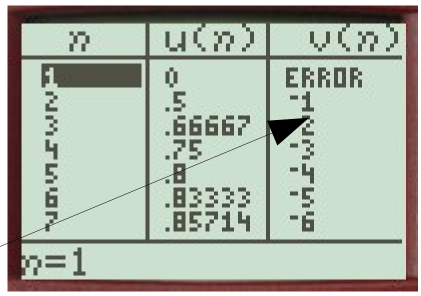
74 page 147

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

1) Les 30 premiers termes de la suite (u_n) et de $\dfrac{1}{u_n - 1}$

Pour la TI82 ou TI83, il est nécessaire de " décaler " pour la deuxième suite d'un rang.

c'est v_1 = -1, v_2 = -2, ...



=1/(2-B3)
et copie
vers le bas

= 1/(B2-1)
et copie
vers le bas

Pour tester la conjecture :
=1-1/A2
et copie vers le bas

n	u(n)	v(n)	1 – 1/n
1	0	-1	0
2	0,5	-2	0,5
3	0,666666667	-3	0,666666667
4	0,75	-4	0,75
5	0,8	-5	0,8
6	0,833333333	-6	0,833333333
7	0,857142857	-7	0,857142857
8	0,875	-8	0,875
9	0,888888889	-9	0,888888889
10	0,9	-10	0,9
11	0,909090909	-11	0,909090909
12	0,916666667	-12	0,916666667
13	0,923076923	-13	0,923076923
14	0,928571429	-14	0,928571429
15	0,933333333	-15	0,933333333
16	0,9375	-16	0,9375
17	0,941176471	-17	0,941176471
18	0,944444444	-18	0,944444444
19	0,947368421	-19	0,947368421
20	0,95	-20	0,95
21	0,952380952	-21	0,952380952
22	0,954545455	-22	0,954545455
23	0,956521739	-23	0,956521739
24	0,958333333	-24	0,958333333
25	0,96	-25	0,96
26	0,961538462	-26	0,961538462
27	0,962962963	-27	0,962962963
28	0,964285714	-28	0,964285714
29	0,965517241	-29	0,965517241
30	0,966666667	-30	0,966666667

2 a) **<u>Il semble</u>** que l'expression de u_n vaut $\dfrac{n-1}{n}$ et que celle de $\dfrac{1}{u_n-1}$ vaut $-n$, d'où,

b) $\dfrac{1}{u_n-1} = -n$, soit : $u_n - 1 = -\dfrac{1}{n}$ et par conséquent : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$

3) Démonstration :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$

a)b)c) On a donc successivement :

$v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}-1}$ par définition de la suite (v_n).

$v_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2-u_n}-1}$ par définition de la suite (u_n).

Comme $\dfrac{1}{2-u_n} - 1 = \dfrac{1-(2-u_n)}{2-u_n} = \dfrac{u_n-1}{2-u_n}$ (calculs " ordinaires " ….)

$v_{n+1} = \dfrac{2-u_n}{u_n-1}$

Puis, p**our tout entier $n \geqslant 1$**, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2-u_n}{u_n-1} - \dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{2-u_n-1}{u_n-1} = \dfrac{-(u_n-1)}{u_n-1} = -1$

On en déduit donc que (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{0-1} = -1$ et de raison -1.

Par conséquent : $v_n = v_1 + (-1)\times(n-1) = -1 - n + 1 = -n$.

Finalement : $\dfrac{1}{u_n-1} = -n$, et, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$. (Voir 2b)

---

77 page 147

a) " Pour toute salle de classe de l'établissement, il existe une clé qui ouvre la porte de cette salle "

Dans ce cas, chaque salle peut avoir sa clé.

La clé dépend de la salle.

Remarque : C'est cette structure de phrase qui sera utilisée lors de la définition de la limite infinie d'une suite.

Pour tout M réel, il existe un n_0 tel que, pour tout n ⩾ n_0 , $u_n \geqslant M$.

L'entier n_0 dépend de M.

b) Il existe une clé qui, pour toute salle de l'établissement, ouvre la porte de cette salle ".

Dans ce cas, il y a une seule clé qui ouvre toutes les salles.

La clé ne dépend pas de la salle.

Remarque : C'est cette structure de phrase qui est utilisée lors de la définition des suites arithmétiques et suites géométriques.

Il existe un réel r tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.

---

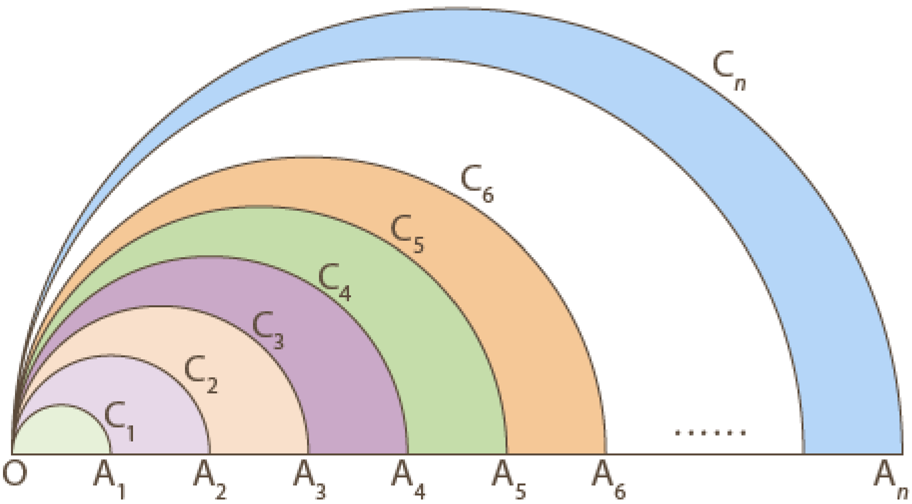
78 page 147

La suite (w_n) définie par $\begin{cases} w_0 \\ w_{n+1} = w_n + n + 3 \end{cases}$ n'est pas une suite arithmétique car , pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$w_{n+1} - w_n = n + 3$ et que cette différence n'est pas constante.

---

105 page 150



1 a) Notons d_k la longueur du diamètre du demi-cercle $\mathscr{C}_k$.
Comme (d_k), $k \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $d_1 = 1$,
on a: $d_k = d_1 + (k-1)\times 1 = k$.

La longueur $\mathscr{L}_k$ de ce demi-cercle $\mathscr{C}_k$ est donc: $\mathscr{L}_k = \dfrac{1}{2}\pi \times k$

b) Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a: $\mathscr{L}_{k+1} - \mathscr{L}_k = \dfrac{1}{2}\pi\times(k+1) - \dfrac{1}{2}\pi\times k = \dfrac{1}{2}\pi$.

La suite $(\mathscr{L}_k)$ est une suite arithmétique de premier terme $\mathscr{L}_1 = \dfrac{1}{2}\pi$ et de raison $\dfrac{1}{2}\pi$.

2) a) $\mathscr{S}_1 = \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}\pi$ $\qquad \mathscr{S}_2 = \dfrac{1}{2}\pi\times 1^2 - \dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\pi\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}\pi$.

$\mathscr{S}_3 = \dfrac{1}{2}\pi\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\pi\times 1^2 = \dfrac{1}{2}\pi\times\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{8}\pi$

2b) $\mathscr{S}_k = \dfrac{1}{2}\pi\times\left(\dfrac{k}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\pi\times\left(\dfrac{k-1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\pi\times\dfrac{2k-1}{4} = \dfrac{\pi}{4}\times k - \dfrac{1}{8}\pi = \dfrac{2k-1}{8}\pi$.

2c) La suite $(\mathscr{S}_k)$ est une suite arithmétique de premier terme $\mathscr{S}_1 = \dfrac{1}{8}\pi$ et de raison $\dfrac{\pi}{4}$.

3) **Une méthode :**
La somme $\Sigma_n = \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2 + \mathscr{S}_3 + \ldots + \mathscr{S}_n$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'où,
$\Sigma_n = (\mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_n)\times\dfrac{n}{2} = \left(\dfrac{1}{8}\pi + \dfrac{2n-1}{8}\pi\right)\times\dfrac{n}{2} = \dfrac{n^2}{8}\times\pi$

Une autre méthode :

Σ_n est l'aire du demi-disque de rayon $\dfrac{n}{2}$, d'où, cette aire est égale à $\dfrac{1}{2}\times\pi\times\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2}{8}\times\pi$

---

106 page 150

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ et on suppose que (v_n) est bien définie (c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut calculer v_n, donc que $u_n \neq 2$).

Remarque : (u_n) est bien définie si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$,

or, cela est vrai si et seulement si,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$. (On peut poursuivre la recherche …)

On suppose donc dans cet exercice que u_n ne sera jamais égale à 0 ou à 1 ou à 2.

1) **Méthode** : Pour montrer que (v_n) est une suite arithmétique, on cherche à exprimer $v_{n+1} - v_n$ ….

Comme v_n est exprimé en fonction de u_n, on exprime d'abord v_{n+1} en fonction de u_n (après avoir écrit v_{n+1} en fonction de u_{n+1} qui est lui-même fonction de u_n).

Calcul :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 2} \text{ , or, } u_{n+1} - 2 = 2 - \frac{4}{u_n} = \frac{2u_n - 4}{u_n}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n - 4} = \frac{u_n}{2(u_n - 2)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{2(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{2(u_n - 2)} = \frac{1}{2}$$

(v_n) est donc une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 2} = 1$.

2) On peut conclure : $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} n = \dfrac{2+n}{2}$

Comme $u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$ d'après la définition de (v_n), on a : $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2 = \dfrac{2}{2+n} + 2 = \dfrac{6+2n}{2+n}$

(**Vérifier** les premiers termes :

n	u_n	v_n	$1 + \frac{1}{2} n$	$\frac{6+2n}{2+n}$
0	3	1	$1 + \frac{1}{2} \times 0 = 1$	$\frac{6+2\times 0}{2+0} = 3$
1	$4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.	$\frac{1}{\frac{8}{3} - 2} = \frac{3}{2}$	$1 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$	$\frac{6+2\times 1}{2+1} = \frac{8}{3}$
2	$4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$	$\frac{1}{\frac{5}{2} - 2} = 2$	$1 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$	$\frac{6+2\times 2}{2+2} = \frac{5}{2}$

Compléments : (variations et limites)

Puisque $\dfrac{1}{2} > 0$, la suite arithmétique (v_n) est une suite strictement croissante et tous les termes v_n sont strictement positifs.

Elle diverge vers $+\infty$.

Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ est strictement décroissante et converge vers 0.

On en déduit que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2$ est strictement décroissante et converge vers 2.

---

107 page 150

(u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 \leqslant 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 a) Si $u_0 = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls.
la suite (u_n) est la suite constante nulle.
b) Si $u_0 = 1$ alors tous les termes de la suite sont égaux à 1.
La suite (u_n) est une suite constante égale à 1.

2) $u_0 = -1$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
On pose $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.
a) **Méthode** : Pour montrer que (v_n) est une suite géométrique, on cherche à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n
Comme v_n est exprimé en fonction de u_n, on exprime d'abord v_{n+1} en fonction de u_n (après avoir écrit v_{n+1} en fonction de u_{n+1} qui est lui-même fonction de u_n)…..
Calcul :
$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1}$.
Or, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n}{3-2u_n} - 1 = \dfrac{u_n - 3 + 2u_n}{3-2u_n} = \dfrac{3(u_n-1)}{3-2u_n}$
D'où, $\dfrac{1}{3-2u_n} = \dfrac{3-2u_n}{3(u_n-1)}$, puis, $v_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-2u_n} \times \dfrac{3-2u_n}{3(u_n-1)} = \dfrac{u_n}{3(u_n-1)} = \dfrac{1}{3}\ \dfrac{u_n}{u_n-1}$
(On n'oublie pas ce qu'on cherche …).
$v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n$.

la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = \dfrac{-1}{-1-1} = \dfrac{1}{2}$.

b) On en déduit : $v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{2\times 3^n}$.

Comme $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$., on a : $(u_n - 1) \times v_n = u_n$, soit : $u_n \times v_n - u_n = v_n$, puis, $u_n = \dfrac{v_n}{v_n - 1}$

Or, $v_n - 1 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 1 = \dfrac{1 - 2\times 3^n}{2\times 3^n}$.

Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{2\times 3^n} \times \dfrac{2\times 3^n}{1-2\times 3^n} = \dfrac{1}{1-2\times 3^n}$.

(**Vérifier** les premiers termes :

n	u_n	v_n	$\dfrac{1}{2\times 3^n}$	$\dfrac{1}{1-2\times 3^n}$
0	-1	$\dfrac{-1}{-1-1} = \dfrac{1}{2}$.	$\dfrac{1}{2\times 3^0} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{1-2\times 3^0} = -1$

1	$\dfrac{-1}{3-2\times(-1)} = \dfrac{-1}{5}$	$\dfrac{\frac{-1}{5}}{\frac{-1}{5}-1} = \dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2\times 3^1} = \dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{1-2\times 3^1} = \dfrac{-1}{5}$
2	$\dfrac{\frac{-1}{5}}{3-2\times\left(\frac{-1}{5}\right)} = -\dfrac{1}{17}$	$\dfrac{\frac{-1}{17}}{\frac{-1}{17}-1} = \dfrac{1}{18}$	$\dfrac{1}{2\times 3^2} = \dfrac{1}{18}$	$\dfrac{1}{1-2\times 3^2} = \dfrac{-1}{17}$

Compléments : (variations et limites)
Puisque $v_0 > 0$ et $0 < \dfrac{1}{3} < 1$,
la suite géométrique (v_n) est strictement décroissante et a suite (v_n) converge vers 0.
(Et tous les termes sont strictement positifs) (Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0 < v_n < \dfrac{1}{2}$)

On peut écrire $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{v_n-1}{v_n} = 1 - \dfrac{1}{v_n}$.

Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\ ;+\infty[$, la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ est strictement croissante et $\left(\dfrac{-1}{v_n}\right)$ est strictement décroissante.

On en déduit : la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est strictement décroissante.

D'autre part Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_n} > 2$ et $\dfrac{-1}{v_n} < -2$, d'où, $1 - \dfrac{1}{v_n} < -1$.

Les termes $\dfrac{1}{u_n}$ sont donc tous strictement négatifs.

Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0[$,
on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Comme $u_n = \dfrac{1}{1-2\times 3^n}$, la suite (u_n) converge vers 0.

---

108 page 150

La suite (u_n) $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=u_n+n+1 \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1 a) $u_0 = -1$, $u_1 = -1 + 0 + 1 = 0$, $u_2 = 0 + 1 + 1 = 2$, $u_3 = 2 + 2 + 1 = 5$, $u_4 = 5 + 3 + 1 = 9$, $u_5 = 9 + 4 + 1 = 14$

b) Cette suite n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique ….

En effet : $u_2 - u_1 = 2$ et $u_1 - u_0 = 1$

$\frac{u_2}{u_1}$ n'existe pas ….

2 a) **Le calcul des premiers termes ne suffit pas pour déterminer la nature de la suite (v_n).**

b) (v_n) est définie par $v_n = u_{n+1} - u_n = n + 1$

Il est évident maintenant que (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$, et de raison 1, c'est-à-dire la suite des entiers naturels non nuls.

3) a) $v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2}$ (somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique)

b) (Voir n° 58 page 145)

v_0	" = "	$u_1 - u_0$	on fait la somme membre à membre de l'égalité, on obtient une nouvelle égalité, mais, les termes u_i s'annulent pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$
v_1	" = "	$u_2 - u_1$	
v_2	" = "	$u_3 - u_2$	
...	" = "	...	
v_{n-1}	" = "	$u_n - u_{n-1}$	
___________		______________________	
$v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$	" = "	$u_n - u_0$	Somme
$\frac{(1+n)n}{2}$	" = "	$u_n - (-1)$	d'après 3a) et la définition de u_0.

Conclusion : $u_n = \frac{(1+n)n}{2} - 1$ *(Pensez à vérifier les premiers termes)*

Si $n = 0$, $u_0 = -1$ *et* $\frac{(1+n)n}{2} - 1 = 0 - 1 = -1$

Si $n = 1$, $u_1 = 0$ *et* $\frac{(1+1)\times 1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

Si $n = 2$, $u_2 = 2$ *et* $\frac{(1+2)\times 2}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

---

109 page 150

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3} = \frac{2}{3}$ et $v_1 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{4}{3}$

$u_2 = \frac{2u_1 + v_1}{3} = \frac{8}{9}$ et $v_2 = \frac{u_1 + 2v_1}{3} = \frac{10}{9}$

2) La suite (d_n) est définie par $d_n = v_n - u_n$.

a) On exprime d_{n+1} en fonction de d_n.

$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$. par définition de la suite (d_n)

$d_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{2u_n + v_n}{3}$ par définition des suites (u_n) et (v_n).

$d_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{3}$ par réduction de la différence précédente

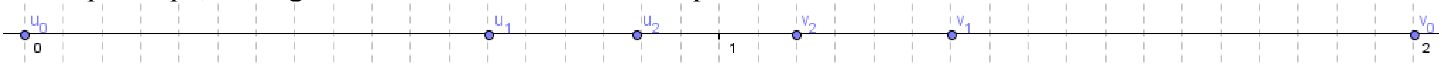
$d_{n+1} = \dfrac{1}{3} d_n$ puisque $v_n - u_n = d_n$

Cette relation prouve que la suite (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = v_0 - u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Remarque En plaçant les termes u_n et v_n sur une droite graduée, le nombre d_n est l'amplitude de l'intervalle $[u_n ; v_n]$.

À chaque étape, la longueur de l'intervalle est divisée par 3.



3) La suite (s_n) est définie par $s_n = u_n + v_n$

a) $s_0 = u_0 + v_0 = 2$

$s_1 = u_1 + v_1 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = 2$

$s_2 = u_2 + v_2 = ... = 2$

b) On exprime s_{n+1} en fonction de s_n.

$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$. par définition de la suite (s_n)

$s_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} + \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ par définition des suites (u_n) et (v_n).

$s_{n+1} = u_n + v_n$ par réduction de la somme précédente

$s_{n+1} = s_n$ par définition de la suite (s_n)

Cette relation prouve que la suite (s_n) est une suite constante égale à $s_0 = 2$

4) **Puisqu'on connaît la somme et la différence des nombres u_n et v_n,** on peut calculer chaque terme u_n et v_n.

$$\begin{cases} u_n + v_n = 2 \\ v_n - u_n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

En faisant la somme des deux lignes, il vient : $2v_n = 2 + 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, soit : $v_n = 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

En faisant la différence des deux lignes, il vient : $2u_n = 2 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, soit : $u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

5) $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Posons $w_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

On a la somme de $n + 1$ termes de la forme $1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1 - w_n$.

$U_n = (1 + ... + 1) - (w_0 + w_1 + w_n)$

(w_n) est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et de premier terme $w_0 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1$

La somme des $n + 1$ termes de la suite géométrique (w_n) est : $W_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} \times (1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1})$

$U_n = \underbrace{(1+\ldots+1)}_{n+1 \text{ termes égaux à } 1} - (w_0 + w_1 + \ldots + w_n) = n + 1 - \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$U_n = n - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

La m^me démarche en remplaçant la différence par la somme donne :

$V_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = n + 1 + W_n = n + 1 + \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$V_n = n + \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

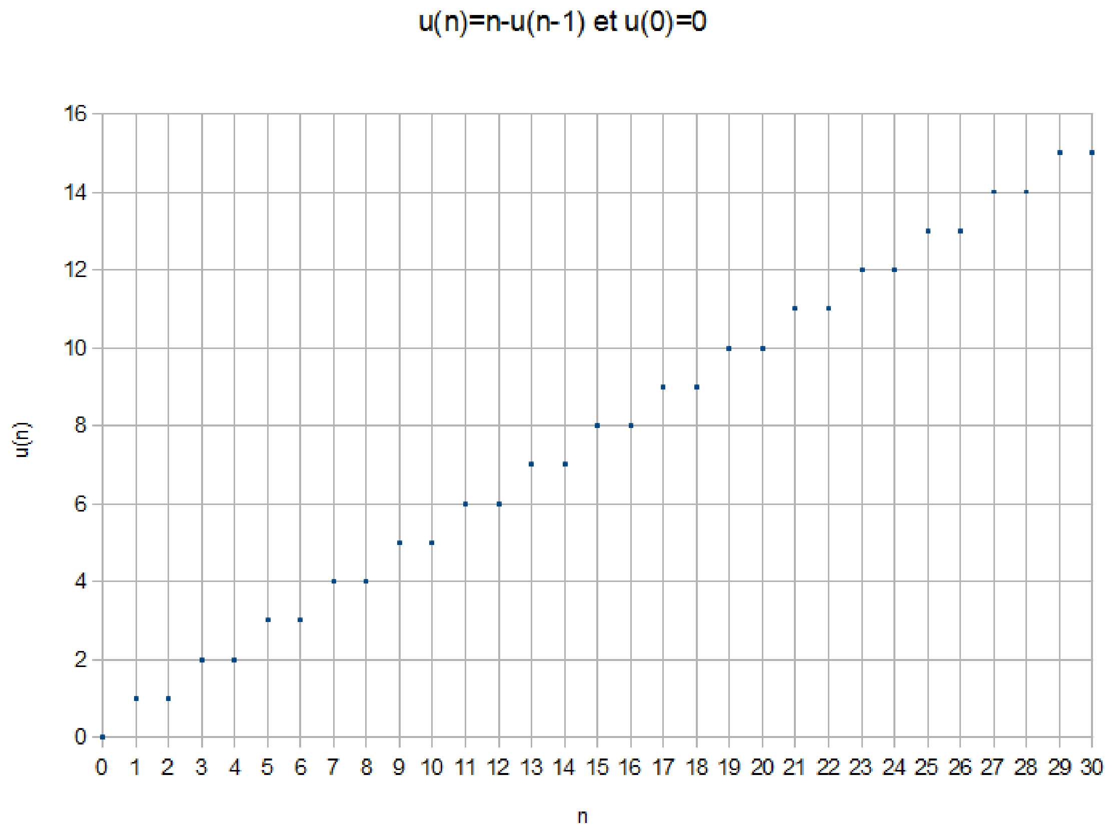
---

113 page 151

(u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = n - u_{n-1} \end{cases}$ pour $n > 0$.

1 a) Liste des 30 premiers termes, représentation graphique, constat et conjecture.

n	u(n)
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	3
7	4
8	4
9	5
10	5
11	6
12	6
13	7
14	7
15	8
16	8
17	9
18	9
19	10
20	10
21	11
22	11
23	12
24	12
25	13
26	13
27	14
28	14
29	15
30	15



On constate que $u_2 = u_1 = 1$, que $u_4 = u_3 = 2$, que $u_6 = u_5 = 3$ ….
et de façon générale, il semble que $u_{2n} = u_{2n-1} = n$.
2) On note pour tout $n > 0$, $v_n = u_{2n}$
a) Les quatre premiers termes de la suite (v_n) :
$v_0 = u_0 = 0$, $v_1 = u_2 = 1$, $v_2 = u_4 = 2$ et $v_3 = u_6 = 3$.

b) Il semble que la suite (v_n) est la suite des entiers naturels.
$v_{n+1} = 2(n+1) - u_{2(n+1)-1} = 2n + 2 - u_{2n+1}$.
Or, $u_{2n+1} = 2n + 1 - u_{2n+1-1} = 2n - u_{2n}$
d'où, $v_{n+1} = 2n + 2 - (2n + 1 - u_{2n}) = 1 + u_{2n} = 1 + v_n$.
La suite (v_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $v_0 = u_0 = 0$ et de raison 1.
C'est bien la suite des entiers naturels.
c) On en déduit : $v_n = n$.

3) On a montré $u_{2n} = n$,
il reste à montrer que $u_{2n-1} = n$.
Or, $u_{2n} = 2n - u_{2n-1}$, d'où, $u_{2n-1} = 2n - u_{2n} = 2n - n = n$.

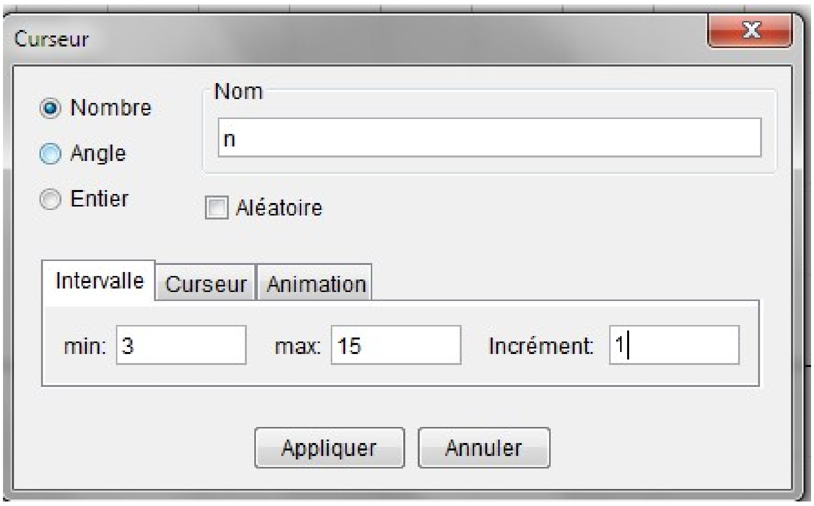
---

115 page 152
Conjecture :

Il semble que la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

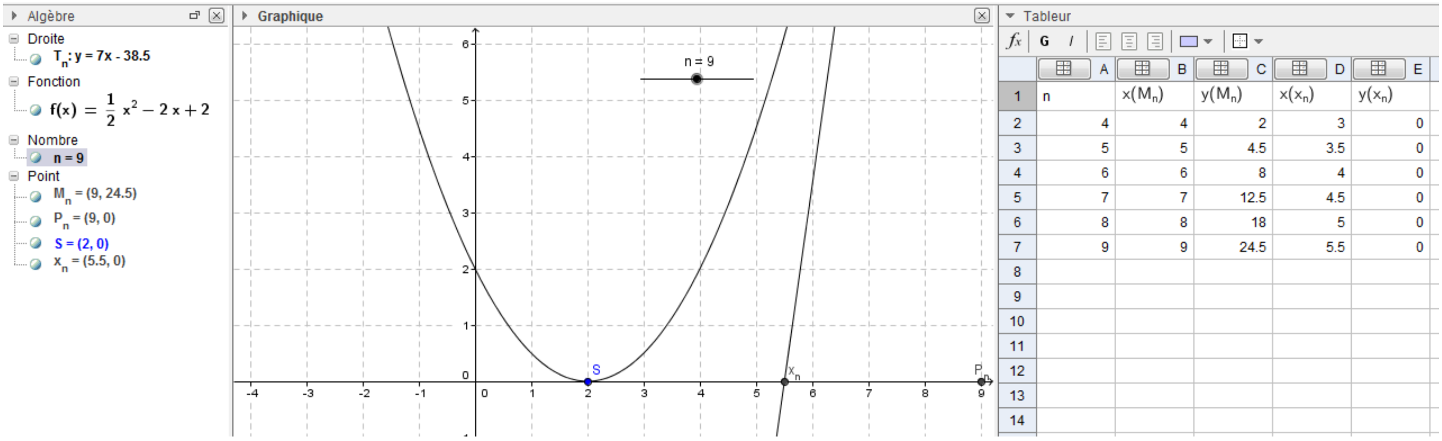
Le point d'abscisse x_n est le milieu de $S(2\ ;\ 0)$ sommet de la parabole représentant f et de P_n, le point d'abscisse n sur l'axe des abscisses.

Créer un curseur " entier " : n prend la valeur minimale 1 et l'incrément vaut 1.



Saisie : *f (x)= (1/2)x² – 2x + 2* *la parabole apparaît*

S = (2,0) M_n=(n,f(n)) T_n=tangente[n,f] x_n=intersection[T_n,axeX] P_n=(n,0)



Ouvrir le tableur : (affichage Tableur)

cliquer droit sur n, puis sur M_n, puis sur x_n et à chaque fois faire : enregistrer dans le tableur.

Démonstration :

La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ est représentée par une parabole $\mathscr{P}$.

Remarquer : Puisque la parabole a son sommet S d'ordonnée 0, on sait qu'on peut mettre $f(x) = a(x - x_s)^2$

Ici : $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$

Soit $n \geqslant 3$, la tangente T_n au point d'abscisse n a pour équation : $y = f'(n)(x-n) + f(n)$

Le point d'intersection de T_n et de l'axe des abscisses est défini par $(x_n ; 0)$ avec $0 = f'(n)(x_n - n) + f(n)$

On en déduit : $x_n - n = -\dfrac{f(n)}{f'(n)}$, soit : $x_n = n - \dfrac{f(n)}{f'(n)}$

Or, $f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 2 = x - 2$

$$\text{d'où, } x_n = n - \frac{f(n)}{f'(n)} = n - \frac{\frac{1}{2}n^2 - 2n + 2}{n-2} = \frac{n(n-2) - \frac{1}{2}n^2 + 2n - 2}{n-2} = \frac{n^2-4}{2(n-2)} = \frac{n+2}{2} = 1 + \frac{1}{2}n.$$

$$\left(\text{ou bien : } x_n = n - \frac{f(n)}{f'(n)} = n - \frac{\frac{1}{2}(n-2)^2}{n-2} = n - \frac{1}{2}n + 1 = 1 + \frac{1}{2}n = \frac{n+2}{2}\right)$$

L'égalité, pour $n \geqslant 3$, $x_n = 1 + \frac{1}{2}n$ prouve que (x_n) est une suite arithmétique de premier terme $x_3 = \frac{5}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

L'égalité, pour $n \geqslant 3$, $x_n = \dfrac{n+2}{2}$ que x_n est le centre de l'intervalle $[2 ; n]$.

116 page 152

Tableur " Calc "

	A	B	C
1	niveau n	cubes au niveau n	Nombre de cubes dans l'empilement
2	1	1	1
3	2	5	6
4	3	9	15
5	4	13	28
6	5	17	45
7	6	21	66
8	7	25	91

Cellule B3 : = B2+4 Cellule C3 : = C2+B3

Ligne 101 :

100	99	393	19503
101	100	397	19900
102			

12 420 cubes lorsque n = 79, il faut 12 403 cubes.

Le reste est insuffisant pour un empilement supplémentaire.

80	79	313	12403
81	80	317	12720

Programme sur la TI :

1 → N (N donne le niveau) (on commence au niveau 1)

1 → U (U contiendra le nombre de cubes par niveau) (au niveau 1 , un cube)

1 → S (S donne le nombre total de cubes dans l'empilement) (au niveau 1 , un cube)

Tant que S ⩽ 12 420

U+4 → U

S+U → S

N+1 → N

Fin

Afficher N

Afficher U

Afficher S

```
PROGRAM:CUBES
:1→N
:1→U
:1→S
:While S≤12420
:U+4→U
:S+U→S
:N+1→N
:End
:Disp "N",N-1
:Disp "U",U-4
:Disp "S",S-U
```

```
N
              79
U
             313
S
           12403
            Done
```

Les calculs :

À chaque rangée, on ajoute 4 cubes, donc, en notant u_n le nombre de cubes à la rangée n, on obtient la suite définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n+4 \end{cases}$

On reconnaît une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4.
La rangée 100 contient : $u_{100} = u_1 + (100 - 1)\times 4 = 1 + 99\times 4 = 397$ cubes
La somme des 100 premiers termes d'une suite arithmétique est :
$$S_{100} = \frac{\text{premier terme+dernier terme} \times \text{ nombre de termes}}{2}$$
ici : $S_{100} = \frac{(1+397)\times 100}{2} = 19\,900$ cubes

On cherche n tel que : $S_n \leqslant 12\,420$
Or, $S_n = \frac{(u_1+u_n)\times n}{2} = \frac{(1+(n-1)\times 4)n}{2}$
On résout : $\frac{(1+(n-1)\times 4)n}{2} \leqslant 12\,420$
Soit : $4n^2 - 4n - 2\times 12420 + 1 \leqslant 0$
$4n^2 - 4n - 24839 \leqslant 0$
$\Delta = 16 + 4\times 4\times 24939 = 16\times(1 + 24839) = 16\times 24940$
$= 16\times 4\times 6235$
Deux racines : $n_1 = \frac{4-\sqrt{\Delta}}{2\times 4}$; $n_2 = \frac{4+\sqrt{\Delta}}{2\times 4} = \frac{1+2\sqrt{6235}}{2} \approx 79$ **par défaut**
Le polynôme est du signe opposé à 4 coefficient de n^2 pour les valeurs entre les racines.
Donc : $n = 79$ niveaux.