Index

TP6 page 166

La hauteur de l'empilement de n cubes est : $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ (**série harmonique**)

A- Au tableur :

	A	B	C
1	Nombre de cubes	hauteur du cube	hauteur de l'empileme
2	1	1	1
3	2	0,5	1,5
4	3	0,3333333333	1,8333333333
5	4	0,25	2,0833333333
6	5	0,2	2,2833333333
7	6	0,1666666667	2,45
8	7	0,1428571429	2,5928571429
9	8	0,125	2,7178571429
10	9	0,1111111111	2,828968254
11	10	0,1	2,928968254
12	11	0,0909090909	3,0198773449
13	12	0,0833333333	3,1032106782
14	13	0,0769230769	3,1801337551
15	14	0,0714285714	3,2515623266
16	15	0,0666666667	3,3182289932
17	16	0,0625	3,3807289932
18	17	0,0588235294	3,4395525226
19	18	0,0555555556	3,4951080782
20	19	0,0526315789	3,5477396571
21	20	0,05	3,5977396571
22	21	0,0476190476	3,6453587048
23	22	0,0454545455	3,6908132502
24	23	0,0434782609	3,7342915111
25	24	0,0416666667	3,7759581778
26	25	0,04	3,8159581778
27	26	0,0384615385	3,8544197162
28	27	0,037037037	3,8914567533
29	28	0,0357142857	3,927171039
30	29	0,0344827586	3,9616537976
31	30	0,0333333333	3,9949871309
32	31	0,0322580645	4,0272451954
33	32	0,03125	4,0584951954
34	33	0,0303030303	4,0887982257

On peut atteindre 4 m, 8 m, 11 m, 13 m …. mais c'est de plus en plus difficile …..

B- Un algorithme

1) $h_{n+1} = h_n + \dfrac{1}{n+1}$

2) Variables : n nombre de cubes, h_n la hauteur de la pile, h la hauteur voulue

Initialisation : $n = 0$, h_n = 0

Demander la hauteur voulue : h

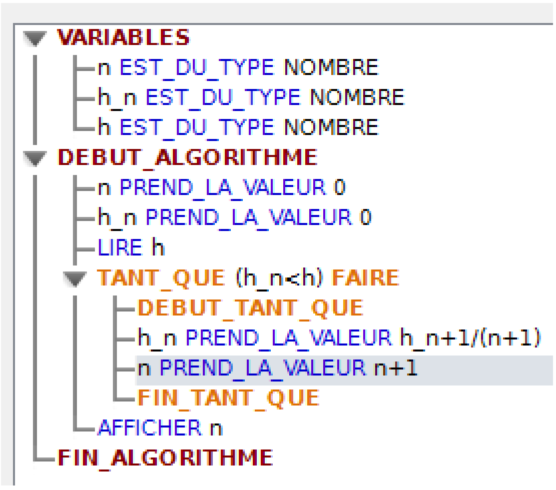
Tant que h_n < h faire :

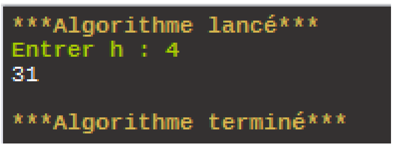
remplacer h_n par h_n + 1/(n + 1) (relation de récurrence)

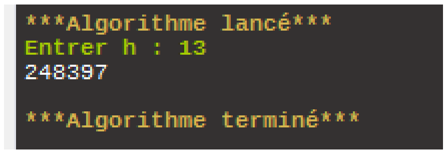
remplacer n par n + 1 (*compteur*)

Fin_Tant_que

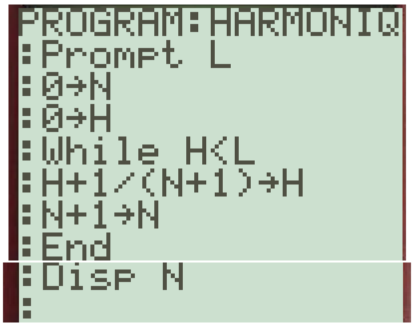
Afficher n.

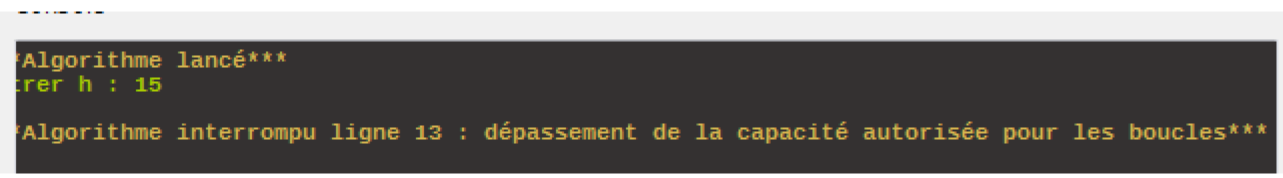






programme sur TI 82 : Pour L = 10, attendre 7 minutes …





C- À la main

Le nombre d'itérations dépasse la capacité des machines usuelles ….

Alors, faisons marcher notre tête qui ne manque pas de capacité.

$$h_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$h_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$h_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$.

$h_4 - h_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$, donc, la somme $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant 2\times\frac{1}{4}$,

soit : $h_4 - h_2 \geqslant \frac{1}{2}$

$h_8 - h_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$. Chacun des 4 termes est supérieur à $\frac{1}{8}$, donc, $h_8 - h_4 \geqslant 4\times \frac{1}{8}$

soit : $h_8 - h_4 \geqslant \frac{1}{2}$.

$h_{16} - h_8$ est la somme des 8 termes de $\frac{1}{9}$ à $\frac{1}{16}$. Pour $9 \leqslant n \leqslant 16$, on a : $\frac{1}{9} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{16}$.

On a donc : $h_{16} - h_8 \geqslant 8\times\frac{1}{16}$, soit : $h_{16} - h_8 \geqslant \frac{1}{2}$.

Comme $h_{16} - h_2 = (h_{16} - h_8) + (h_8 - h_4) + (h_4 - h_2)$ et que chaque différence est supérieure à $\frac{1}{2}$, on obtient : $h_{16} - h_2 \geqslant 3\times\frac{1}{2}$.

$h_{2n} - h_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, de $n + 1$ à $2n$, il y a $(2n - (n + 1) - 1) = n$ termes

Pour tout k tel que $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$, on a : $\frac{1}{n+1} \geqslant \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$.

$h_{2n} - h_n$ est donc une somme de n termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$, donc : $h_{2n} - h_n \geqslant n\times \frac{1}{2n}$

$h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Remarquons que $2^n = 2\times 2^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

On a donc : $h_{2^n} - h_{2^{n-1}} \geqslant \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant 1$.

Comme $h_{2^n} - h_2 = (h_{2^n} - h_{2^{n-1}}) + (h_{2^{n-1}} - h_{2^{n-2}}) + \ldots + (h_4 - h_2)$ et que chaque différence est supérieure à $\frac{1}{2}$,

le nombre de puissances de 2 à 2^{n-1} est $n - 1$, on obtient : $h_{2^n} - h_2 \geqslant (n-1)\times \frac{1}{2}$.

$h_{2^n} \geqslant (n-1)\times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$, soit : $h_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1$

On est donc certain de pouvoir dépasser la tour Eiffel, …. puisqu'on peut toujours trouver n de façon

à dépasser $\frac{n}{2} + 1$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Remarque :

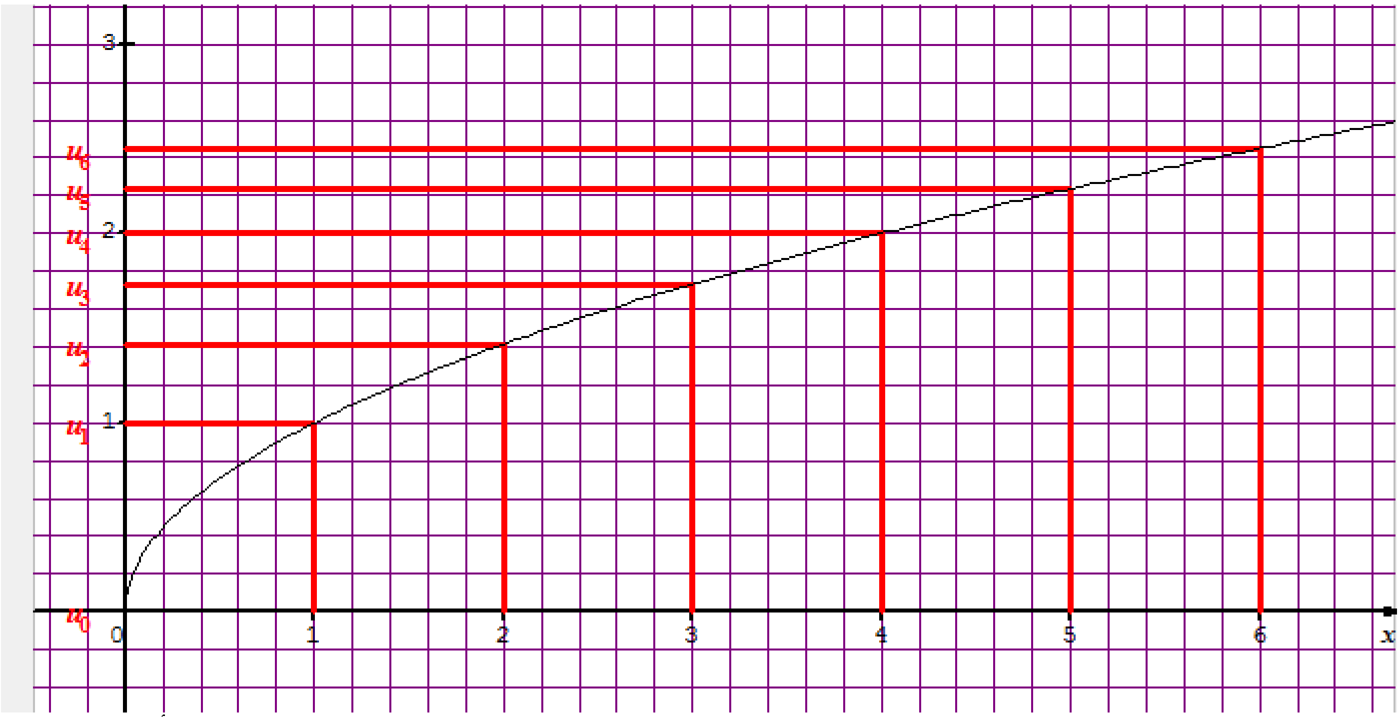
Pour dépasser 14, c'est-à-dire $\frac{26}{2} + 1$, on a en indice : $2^{26} = 67\,108\,864$.

Ce que dit le calcul précédent, il est certain que $h_{2^{26}} \geqslant 14$, mais, on ne sait pas depuis quel indice, on a dépassé 14.

---

16 page 167

1) 2) 3) réalisé avec sinequanon



La fonction $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, d'où,

comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < n + 1$, on a : $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. CQFD

---

19 page 168

a) $(0{,}8^n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 1.

Comme les termes sont positifs et que $0 < 0{,}8 < 1$, la suite géométrique est strictement décroissante.

b) $(1{,}2^n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme 1.

Comme les termes sont positifs et que $1 < 1{,}2$, la suite géométrique est strictement croissante.

c) $(2^n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1.

Comme les termes sont positifs et que 1 < 2, la suite géométrique est strictement croissante.

d) $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\geqslant 0} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1.

Comme les termes sont positifs et que $0 < \frac{1}{3} < 1$, la suite géométrique est strictement décroissante.

Autre méthode : la suite $(3^n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1.

Comme les termes sont positifs et que 1 < 3, la suite géométrique est strictement croissante.

L'inverse d'une fonction f strictement positive a des variations inverses de celles de f.

D'où, $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement décroissante.

---

23 page 168

a) $u_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

On a donc : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$

Comme $n \geqslant 0$, $2n + 3 > 0$. $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0}$

La suite (u_n) est strictement croissante.

b) $u_1 = 3$ et $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n - n + 1$

On a donc : Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = -n + 1$

Comme $n \geqslant 1$, $-n + 1 < 0$. $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n < 0}$

La suite (u_n) est strictement décroissante.

---

24 page 168

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3n + 6 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_0 = 2$, $u_1 = 2 - 3\times 0 + 6 = 8$, $u_2 = 8 - 3\times 1 + 6 = 11$, $u_3 = 11 - 3\times 2 + 6 = 11$, $u_4 = 11 - 3\times 3 + 6 = 8$,
$u_5 = 8 - 3\times 4 + 6 = 2$.

2) On évalue $u_{n+1} - u_n = -3n + 6$

Or, $-3n + 6 < 0$ si et seulement si $n > 2$

La suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.

---

25 page 168

(u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pose pour $n \geqslant 0$, $v_n = 5 - u_n$.

1) $u_0 = 1$, $u_1 = -3$, $u_2 = -11$, $u_3 = -27$, ….
$v_0 = 5 - 1 = 4$, $v_1 = 5 - (-3) = 8$, $v_2 = 5 - (-11) = 16$, $v_3 = 5 - (-27) = 32$, …

2) Objectif :

d'après le calcul des premiers termes, on cherche à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n (en espérant trouver $2v_n$)

pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$v_{n+1} = 5 - u_{n+1}$ par définition de la suite (v_n).
$v_{n+1} = 5 - (2u_n - 5)$ par définition de la suite (v_n).
$v_{n+1} = 10 - 2u_n$ Or, $u_n = 5 - v_n$ par définition de la suite (v_n).
On a donc : $v_{n+1} = 10 - 2(5 - v_n) = 2v_n$.
3) la suite (v_n) est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison 2,
d'où, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = 4\times 2^n = 2^{n+2}$
et $u_n = 5 - 2^{n+2}$
4) comme $v_0 > 0$ et $2 > 1$, la suite géométrique (v_n) est strictement croissante,
donc, son opposé ($-v_n$) est une suite strictement décroissante.
En ajoutant 5, la variation ne change pas.
Conclusion : la suite (u_n) est strictement décroissante.

---

26 page 168

$u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1) **Première méthode :**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2} - \frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{n^2(n^2+2n+2)-(n+1)^2(n^2+1)}{2n^2(n+1)^2} = \frac{n^4+2n^3+2n^2-n^4-2n^3-2n^2-2n-1}{2n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2}$$

Puisque $n > 0$, $-2n - 1 < 0$ et par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Deuxième méthode :

On pose pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{x^2+1}{x^2}$

f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ \frac{2x\times x^2-2x(x^2+1)}{(x^2)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{-2}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$$

(On a aussi : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, d'où, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(0 + \dfrac{-2}{x^3}\right) = -\dfrac{1}{x^3}$)

Puisque $x > 0$, $f'(x) < 0$ et par conséquent, f est une fonction décroissante sur $]0\,;+\infty[$
La suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est donc décroissante.

2) Il s'agit de comparer u_n et 1.
Comme $n \geqslant 1$, on peut procéder par **équivalences :**

$\dfrac{n^2+1}{2n^2} \leqslant 1$ équivaut à $n^2 + 1 \leqslant 2n^2$ **(car $2n^2 > 0$)**

équivaut à $1 \leqslant n^2$

Comme $n \geqslant 1$, cette dernière inégalité est vraie d'où, $\dfrac{n^2+1}{2n^2} \leqslant 1$ est vraie.

Autre méthode :

On étudie le signe de la différence :
$\dfrac{n^2+1}{2n^2} - 1 = \dfrac{n^2+1-2n^2}{2n^2} = \dfrac{-n^2+1}{2n^2}$
Comme $2n^2 > 0$, le signe est celui de $1 - n^2$.
Or, $n \geqslant 1$, d'où, $n^2 \geqslant 1$, et par suite : $1 - n^2 \leqslant 0$.
Conclusion : $\dfrac{n^2+1}{2n^2} - 1 \leqslant 0$, soit : $\dfrac{n^2+1}{2n^2} \leqslant 1$

---

29 page 168

1 a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

$u_1 = \dfrac{2^1}{1^2} = 2$, $u_2 = \dfrac{2^2}{2^2} = 1$, $u_3 = \dfrac{2^3}{3^2} = \dfrac{8}{9}$, $u_4 = \dfrac{2^4}{4^2} = 1$, $u_5 = \dfrac{2^5}{5^2} = \dfrac{32}{25} = 1{,}28$

b) D'après ces valeurs, la suite n'est pas monotone.

2 a) $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$ est une inéquation du second degré.

Une méthode : $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$, d'où, $(n-1)^2 - 2 \geqslant 0$ lorsque $n - 1 \geqslant \sqrt{2}$ ou $n - 1 \leqslant -\sqrt{2}$

Comme n est un entier supérieur ou égal à 1, on a : $n \geqslant 1 + \sqrt{2}$, soit : $n \geqslant 3$

Autre méthode : $\Delta = 8$, d'où $n_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $n_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

Le polynôme est du signe de 1 coefficient de n^2 à l'extérieur des racines .... (Voir résultat au-dessus)

b) Soit $n \geqslant 3$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{2^n}{n^2} = \dfrac{2^{n+1}\times n^2 - 2^n \times (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{2^n(2n^2-n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^n(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2}$

Comme $n \geqslant 3$, les nombres 2^n , n^2 et $(n+1)^2$ sont strictement positifs,

d'où, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de $n^2 - 2n - 1$

D'après l'étude précédente : $n^2 - 2n - 1$ dès que $n \geqslant 3$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est donc une suite croissante.

3 a) On cherche un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 10^{50}$
Remarque : il suffit de trouver un entier .... il n'est pas nécessaire de trouver le plus petit de ces entiers.
On peut chercher un ordre de grandeur en remarquant que $2^{10} > 10^3$, d'où, $(2^{10})^{16} > (10^3)^{16}$
Soit : $2^{160} > 10^{48}$, d'autre part : $2^7 > 10^2$, d'où, $2^{167} > 10^{50}$
Comme on divise par n^2, on peut commencer le tableau à partir de 170 environ ...
La calculatrice donne en entrant la fonction $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2}$

Tout entier supérieur ou égal à 182 convient.

b) Soit n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 10^{50}$

Comme $n_0 \geqslant 3$ et (u_n) croissante, on a :

Si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant u_{n_0}$

---

33 page 170 Évolution d'une population

L'année 2010 + n, la population de truites par hectare est notée T_n .

En 2010, on estime le nombre de truites à 200 truites par hectare . On a donc $T_0 = 200$.

1 a) Le nombre de truites diminue de 20 % chaque année, donc : $T_{n+1} = 0{,}8\ T_n$ pour $n \geqslant 0$

b) (T_n) est donc une suite géométrique de premier terme $T_0 = 200$ et de raison 0,8.

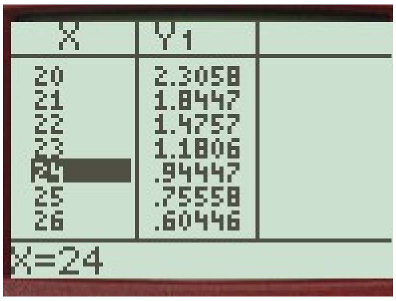
$T_n = 200 \times (0{,}8)^n$.

c) Les truites auront disparues totalement de la rivière lorsque $T_n < 1$.

(**Remarque** : puisque $0 < 0{,}8 < 1$, la suite géométrique (T_n) est strictement décroissante.

On n'aura jamais $T_n = 0$ mais T_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$).

Le tableur donne : $n = 24$, $T_{24} < 1 < T_{23}$.

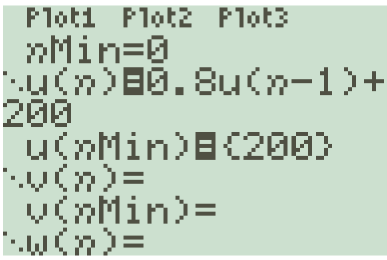


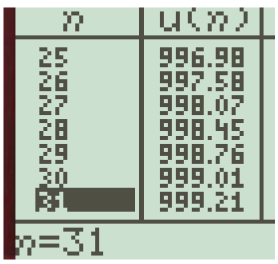
En 2034, les truites auront disparues.

2) On introduit chaque année 200 truites et on suppose qu'il n'y a pas de pertes.

a) D'après le 1a), on a donc : $T_{n+1} = 0{,}8\ T_n + 200$.

b) La nouvelle donnée mène à l'observation suivante :





La population de truites croît en se stabilisant aux alentours de 1 000 individus.

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 1000$

$u_{n+1} = T_{n+1} - 1000$ (par définition de (u_n))

$= 0{,}8\,T_n + 200 - 1000$ par définition de (T_n).

$= 0{,}8\,T_n - 800$ Or, $T_n = u_n + 1000$

d'où, $u_{n+1} = 0{,}8(u_n + 1000) - 800 = 0{,}8u_n$.

On en déduit que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 200 - 1000 = -800$ et de raison 0,8.

d) On a alors : $u_n = -800 \times 0{,}8^n$

e) puis $T_n = -800 \times 0{,}8^n + 1000$

Comme $0 < 0{,}8 < 1$, la suite géométrique $(0{,}8)^n$ est strictement décroissante, d'où, $(-800 \times 0{,}8^n)$ est strictement croissante.

Finalement : La suite (T_n) est strictement croissante.

D'autre part, comme $-1 < 0{,}8 < 1$, la suite géométrique $(0{,}8^n)$ converge vers 0, donc, la suite (T_n) converge vers 1000.

---

40 page 170

1) Le dé est bien équilibré.

On lance le dé une seule fois :

Soit l'événement S : " obtenir un 6 "

alors $\overline{S}$ est l'événement " ne pas obtenir un 6 "

On sait : $P(S) + P(\overline{S}) = 1$, ici : $P(S) = \frac{1}{6}$ et $P(\overline{S}) = \frac{5}{6}$.

On lance le dé *n* fois :

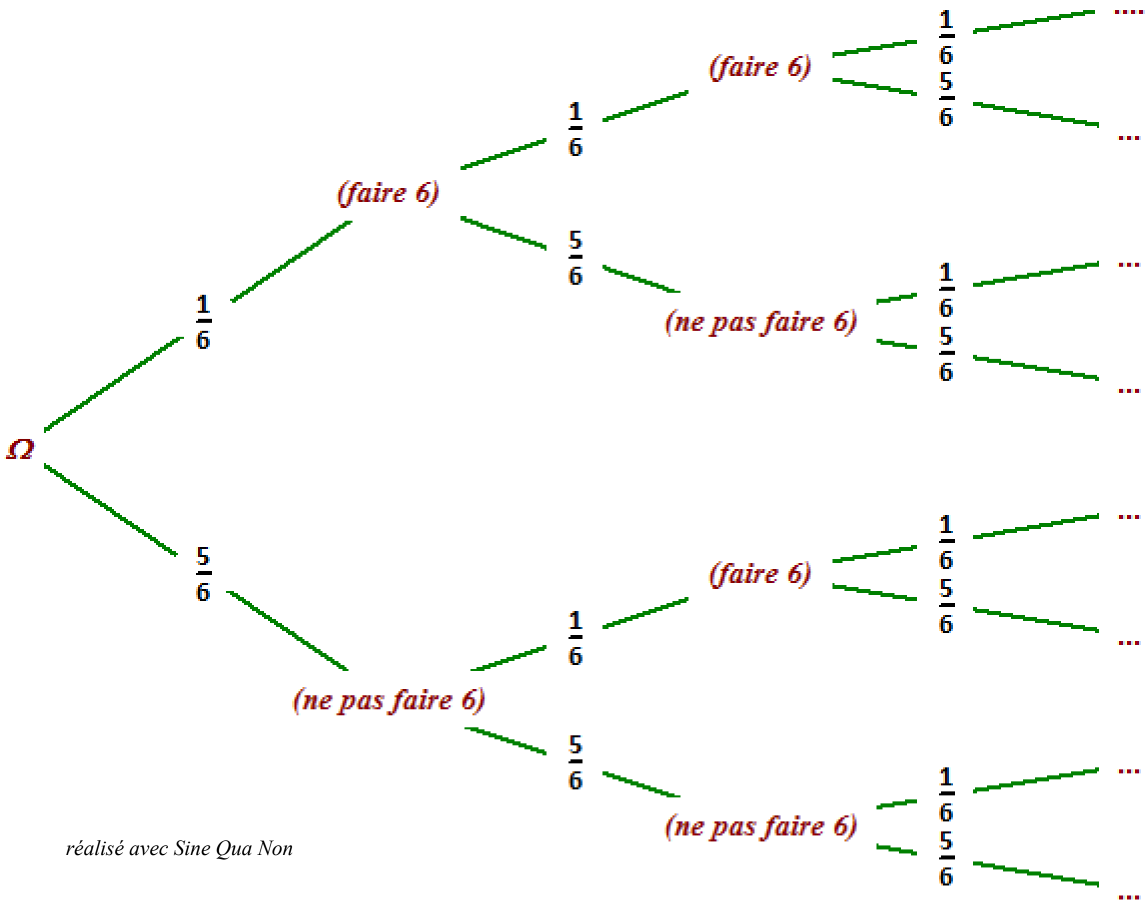
Soit l'événement A : " obtenir aucun 6 en *n* lancers "

L'événement contraire $\overline{A}$ de A est " obtenir au moins une fois un 6 en *n* lancers "

On a donc : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ On note : $q_n = P(A)$ et $p_n = P(\overline{A})$

À chaque lancer, la probabilité de " ne pas obtenir un 6 " est $\frac{5}{6}$.

Imaginer un arbre où apparaissent les *n* lancers.



réalisé avec Sine Qua Non

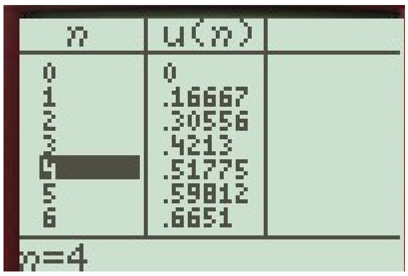
" ne jamais faire 6 " A = $\left(\overbrace{\bar{S}\bar{S}\bar{S}\ldots\bar{S}\bar{S}}^{n\ fois}\right)$

En faisant le produit à chaque étape, on a : $q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$, soit : $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

2) $p_{n+1} - p_n = (1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}) - (1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n (1 - \frac{5}{6}) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$

La différence étant positive, la suite (p_n) est croissante.

Plus on lance le dé, plus il est probable d'obtenir au moins une fois le 6.



Autre méthode :

Soit $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

Comme $0 < \frac{5}{6} < 1$, on sait que (u_n) est une suite strictement décroissante,

donc, son opposé $-(u_n)$ est une suite strictement croissante, et, en ajoutant 1, on obtient : (p_n) est une suite strictement croissante

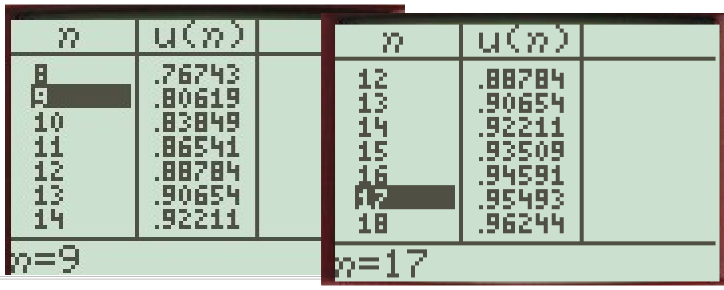
3a) b).

La calculatrice donne : $n_0 = 4$

Comme la suite (p_n) est croissante, si $n \geqslant 4$ alors $p_n \geqslant p_4$.
Comme $p_4 \geqslant 0{,}5$, alors $p_n \geqslant 0{,}5$ lorsque $n \geqslant 4$.

4) La probabilité est supérieure à 0,6 dès que $n \geqslant 6$
La probabilité est supérieure à 0,8 dès que $n \geqslant 9$

La probabilité est supérieure à 0,9 dès que $n \geqslant 13$
La probabilité est supérieure à 0,95 dès que $n \geqslant 17$



43 page 170 **par quel chemin**

1) Il semble que les demi-cercles se confondent avec le segment [AB] de longueur 8.

Cette " intuition " est fausse.

2) $L_1 = 4\pi$,

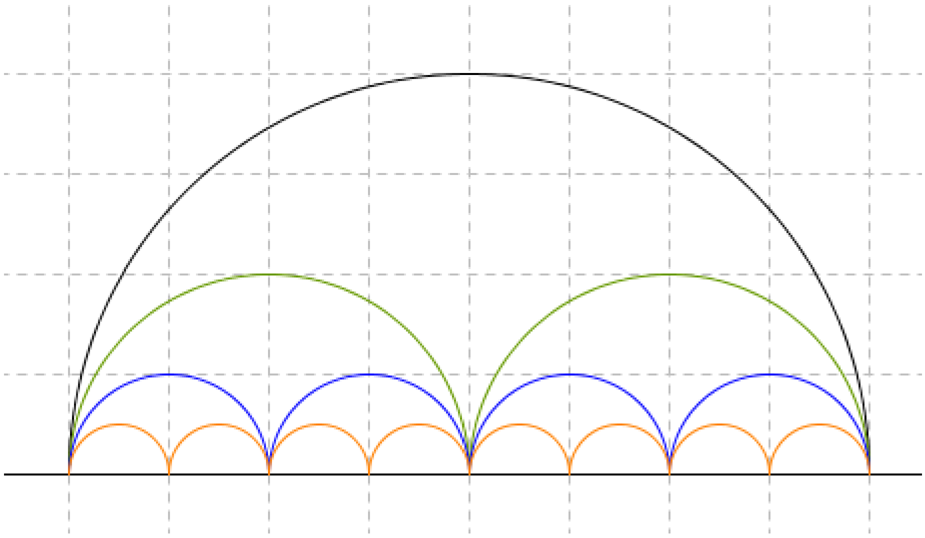
$L_2 = 2 \times \dfrac{4}{2}\pi = 4\pi$,

$L_3 = 2^2 \times \dfrac{4}{2^2}\pi = 4\pi$

Plus généralement , à l'étape n, on a construit 2^n demi-cercles (à chaque étape on double le nombre de demi-cercles) ayant chacun un rayon de $\dfrac{4}{2^n}$ (à chaque étape on divise par 2 le rayon précédent).

$L_n = 2^n \times \dfrac{4}{2^n}\pi = 4\pi$.

3) La suite (L_n) est une suite constante qui converge vers 4π.



47 page 171

1) D'après la copie d'écran, la suite (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$.

On a : $u_0 = 1$, puis : $u_1 = 2 \times u_0$, **de façon générale : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2x$.**

2) (u_n) est par conséquent la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$

3) La suite est croissante et tend vers +∞ (suite divergente vers +∞).

4) On évalue : $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Autre méthode :

Comme tous les termes de la suite sont strictement positifs, on évalue $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et $u_n > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

(Ou on applique le ***cours*** : Comme **2 > 1 et u_0 > 0**, la suite géométrique de raison 2 est croissante)

5 a) $2^{10} = 1\,024$ et $10^3 = 1\,000$. Par conséquent : $2^{10} > 10^3$

b) Comme la fonction carré est strictement croissante sur les positifs, on obtient : $(2^{10})^2 > (10^3)^2$,

soit : $2^{20} > 10^6$

Comme la suite est croissante : si $n > 20$ alors $2^n > 10^6$

$10^{20} = (10^6)^3 \times 10^2$ Comme $2^7 = 128$, on a : $(2^{20})^3 \times 2^7 > 10^{20}$

Si $n > 67$ alors $2^n > 10^{20}$

$10^{120} = (10^3)^{40}$, on a donc : $2^{400} > 10^{120}$

En prenant $n > 400$, on est certain d'avoir : $2^n > 10^{120}$.

Remarque : On montre ainsi que on peut toujours trouver un entier n_0 à partir duquel la puissance de 2 est supérieure à tout réel aussi grand que l'on veut.

Ce qui prouve que 2^n tend vers +∞.

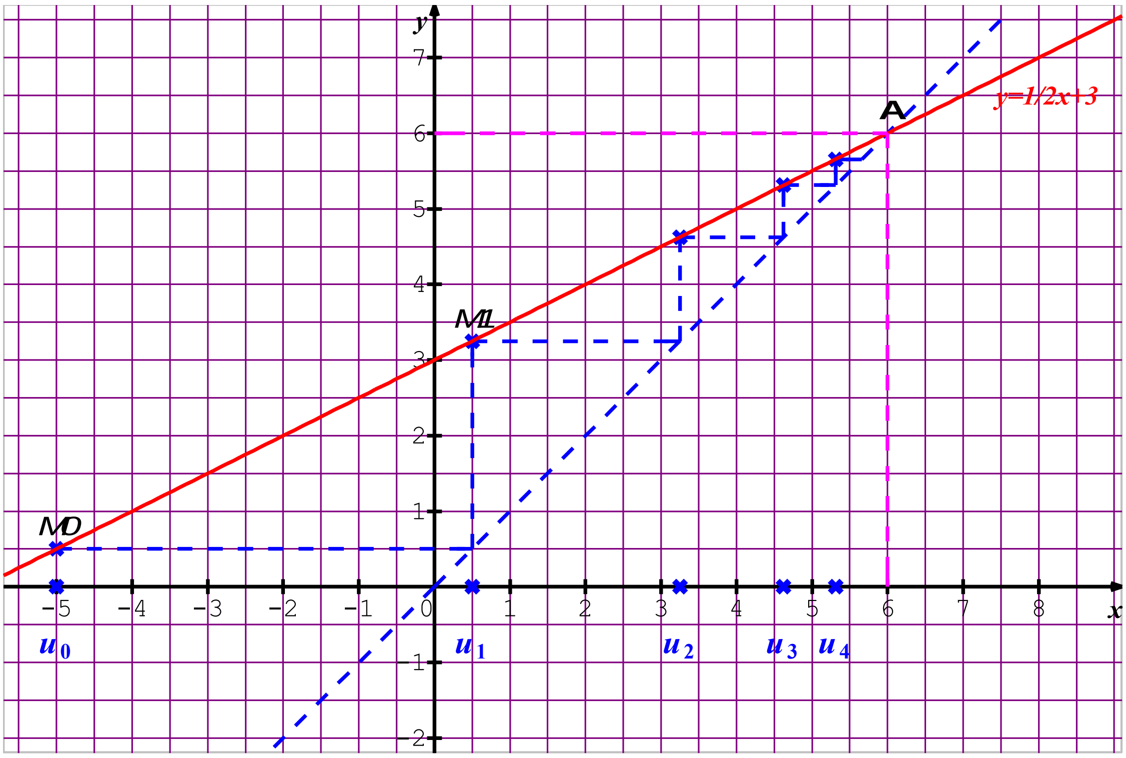
---

71 page 174

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ et (u_n) $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) (u_n) est une suite définie par récurrence.

On représente f dans un repère orthonormal et on détermine les points M_n de coordonnées $(u_n\,;\,u_{n+1})$



Conjecture : la suite (u_n) semble croissante et converger vers 6.

2) Résolution de l'équation $f(x) = x$

Soit : $\frac{1}{2}x + 3 = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Leftrightarrow x = 6$

$f(x) = x$ a pour unique solution le réel $\alpha = 6$. (Le point $A(6 ; 6)$ est le point d'intersection de C_f et Δ d'équation $y = x$.)

3) $v_n = u_n - 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2} u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2} u_n - 3$ (On peut factoriser $\frac{1}{2}$)

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2} v_n$.

Par conséquent : (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -11$ et de raison $\frac{1}{2}$.

b) On a alors : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = (-11) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $u_n = v_n + 6 = (-11) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

c) $u_{n+1} - u_n = (-11) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6 - ((-11) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6) = -11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (\frac{1}{2} - 1) = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(= 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1})$

Comme $\frac{11}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est strictement croissante.

---

74 page 174 À force d'ajouter

La suite (u_n) est définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1) $u_1 = \dfrac{1}{1^2} = 1$,

$u_2 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} = 1{,}25$,

$u_3 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} \approx 1{,}36$,

$u_4 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} \approx 1{,}42$.

2) Comme $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

(Bien remarquer cette relation de récurrence, c'est celle qui permettra de programmer la calculatrice à la dernière question)

3 a) $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{(k-1)k}$

Or, $0 < k-1 < k$, donc, en multipliant par k strictement positif, on a:

$0 < (k-1)k < k^2$ Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on a: $\dfrac{1}{(k-1)k} > \dfrac{1}{k^2}$

Conclusion:

$\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ (1)

Autre méthode :

On pose la différence : $\dfrac{1}{k^2} - \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{(k-1)-k^2+k(k-1)}{k^2(k-1)} = \dfrac{-1}{k^2(k-1)}$

Comme, $k \geqslant 2$, cette différence est strictement négative, d'où, $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ (1)

Cette relation (1) est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 2.
On va donc l'écrire pour $k = 2$, puis $k = 3$, ... ,

b) On peut faire la somme d'inégalités de même sens et on garde l'inégalité.

	Les termes de u_n	**comparer à**	**....**	
	1	$\leqslant$	1	
$k = 2$	$\dfrac{1}{2^2}$	$<$	$\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}$	En faisant la somme, les termes s'annulent 2 à 2
$k = 3$	$\dfrac{1}{3^2}$	$<$	$\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$	
	...	$<$	...	
$k = n-1$	$\dfrac{1}{(n-1)^2}$	$<$	$\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n-1}$	
$k = n$	$\dfrac{1}{n^2}$	$<$	$\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$	

	Les termes de u_n	**comparer à**	**....**	
On fait la somme des n lignes	u_n	$<$	$2-\frac{1}{n}$	

Conclusion: $u_n < 2-\frac{1}{n}$.

c) Comme $\frac{1}{n} > 0$, la suite (u_n) est majorée par 2.
(On est certain que le terme u_n ne dépassera jamais la valeur 2).
Elle ne peut pas tendre vers $+\infty$.

d) On admet que la suite (u_n) converge vers le réel $l = \frac{\pi^2}{6}$

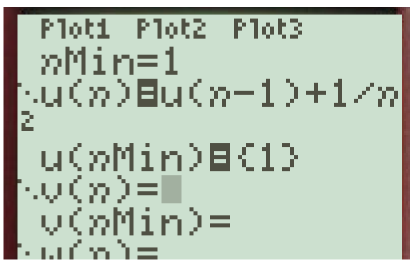
$\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644$ par défaut

e) $u_n > 1{,}6$ à partir de 22
$u_n > 1{,}64$ à partir de 203

Petit programme à la TI: Se souvenir que $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2} \end{cases}$

Instructions	**Commentaires**
$1 \to$ K $1 \to$ U	Initialisation des mémoires. K est un compteur (indice du terme de la suite) U contient les termes de la suite
INPUT "S ", S	Permet d'entrer la borne supérieure demandée (ici: 1,6, puis 1,64)
WHILE U < S K + 1 $\to$ K U + $\frac{1}{K^2}$ $\to$ K END	" TANT QUE " la valeur de U ne dépasse pas la borne supérieure S, la boucle indiquée par les instructions suivantes se déroule. Le compteur est incrémenté de 1 et le terme suivant dans U est obtenu en ajoutant l'inverse du carré de l'indice. La fin du " TANT QUE " est indiquée par " END "
DISP K	Affiche l'indice lorsque la boucle est terminée

Avec le menu " SUITE "



n$_{min}$ = 1

u(n)=u(n-1)+1/n²
u(n$_{min}$) = 1

DéfTble Début table: 1
Pas: 1

Afficher la table .... (compter une minute pour arriver à 203)

---

75 page 175 À force d'ajouter

la suite (u_n) est définie par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1) $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Comme $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

2 a) Soit $k \geqslant 1$.

Rappel : $(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) = k + 1 - k = 1$.

D'où, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ (égalité 1)

D'autre part, la fonction $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $[0 ; + \infty[$,

d'où, comme $1 \leqslant k < k + 1$, on a : $1 \leqslant \sqrt{k} < \sqrt{k+1}$,

soit : en ajoutant $\sqrt{k}$ aux deux membres de l'inégalité : $2\sqrt{k} <$  (réels strictement positifs)

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$,

on obtient : $\frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$, puis, d'après l'égalité 1 du rappel, $\frac{1}{2\sqrt{k}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

En multipliant par 2, il vient : $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

b) On peut faire la somme d'inégalités de même sens et on garde l'inégalité.

	Les termes de u_n	**comparer à**	**....**	
$k = 1$	$\frac{1}{\sqrt{1}}$	**>**	$2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$	
$k = 2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	>	$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$	En faisant la somme, les termes s'annulent 2 à 2
$k = 3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	>	$2(\sqrt{4}-\sqrt{3})$	
	...	>	...	
$k = n - 1$	$\frac{1}{\sqrt{n-1}}$	>	$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$	
$k = n$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	>	$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$	
On fait la somme des n lignes	u_n	>	$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$	

On a donc : $u_n > 2(\sqrt{n+1}-1)$

3) Soit un réel positif M.

Il suffit d'avoir $2(\sqrt{n+1}-1)$ > M pour assurer que u_n > M.
Or, $2(\sqrt{n+1}-1)$ > M équivaut à $\sqrt{n+1} > \frac{M}{2} + 1$ (termes positifs)
La fonction carré est strictement croissante sur [0 ; +∞[, d(où,
il suffit de prendre $n + 1 > \left(\frac{M}{2}+1\right)^2$ pour que l'inégalité soit vraie.
$\left(\frac{M}{2}+1\right)^2 = \frac{M^2}{4} + M + 1$, d'où, $n > \frac{M^2}{4} + M$
Posons : n_0 le premier entier supérieur à $\frac{M^2}{4}$ + M. Ainsi, $u_{n_0} \geqslant$ M.
Comme (u_n) est strictement croissante, on obtient :
Pour tout réel M positif, il existe un entier n_0 tel que $n \geqslant n_0$ implique $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant$ M
La suite (u_n) tend vers +∞.

---

76 page 175

Au 1er janvier 2010, on a : $V_0 = 20$ et $R_0 = 40$, où, V_n et R_n représentent respectivement les populations citadine et rurale (en millions d'habitants) en 2010 + n.

On suppose que la population totale est constante sur la période étudiée.

1) Chaque année, 20% des ruraux émigrent à la ville et 10 % des citadins émigrent à la campagne.
Soit : l'année 2010 + n, les effectifs respectifs sont : V_n et R_n
L'année suivante 2010 + (n + 1), les effectifs respectifs sont : V_{n+1} et R_{n+1} :
Les citadins ont perdus 10 % de V_n (il reste donc $0,9V_n$ de population citadine)
et gagnés 20 % de R_n (on ajoute donc $0,2R_n$ provenant de la population rurale), d'où, $V_{n+1} = 0,9V_n + 0,2R_n$
Quant aux ruraux, ils ont gagné 10% de V_n et perdus 20% R_n , d'où, $R_{n+1} = 0,1V_n + 0,8R_n$

$$\begin{cases} V_{n+1}=0,9\,V_n+0,2\,R_n \\ R_{n+1}=0,1\,V_n+0,8\,R_n \end{cases}$$

2) Soit : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n = V_n + R_n$
a) La suite (S_n) est constante car elle représente l'ensemble de la population année par année, et, cette population est stable (60 millions) d'après l'énoncé.
(Les échanges ont lieu entre les deux sous-groupes sans apport extérieur et sans perte)

b) D'après le 1/, on a : $S_{n+1} = V_{n+1} + R_{n+1} = (0,9V_n + 0,2R_n) + (0,1V_n + 0,8R_n) = V_n + R_n = S_n$
La suite est donc constante puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, la population à l 'année n est égale à celle de l'année suivante.
Comme en l'année 2010, on a : $S_0 = 60$, il vient : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n = 60$

c) On en déduit : $S_n = V_n + R_n = 60$, soit : $V_n = 60 – R_n$ et $R_n = 60 – V_n$
En substituant dans les relations trouvées au 1/, on obtient :

$$\begin{cases} V_{n+1}=0,9\,V_n+0,2(60-V_n)=0,7\,V_n+12 \\ R_{n+1}=0,1(60-R_n)+0,8\,R_n=0,7\,R_n+6 \end{cases}$$

3) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $W_n = V_n – 40$
a) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_{n+1} = V_{n+1} – 40 = (0,7V_n + 12) – 40 = 0,7V_n – 28 = 0,7(V_n – 40) = 0,7W_n$
(W_n) est donc une suite géométrique de premier terme $W_0 = 20 – 40 = –20$ et de raison 0,7.
D'où : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $W_n = –20\times (0,7)^n$

b) Comme $V_n = W_n + 40$, on a : $V_n = -20\times \left(0{,}7\right)^n + 40$
et $R_n = 60 - V_n = 60 - (-20\times \left(0{,}7\right)^n + 40) = 20 + 20\times \left(0{,}7\right)^n$

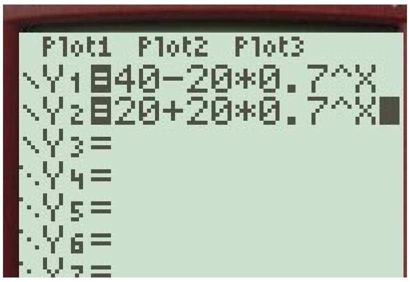
c) On applique le cours sur les suites géométriques
Comme $0 < 0{,}7 < 1$, la suite $\left(0{,}7^n\right)$ est décroissante (et converge vers 0)
D'où : $(-20\times \left(0{,}7\right)^n)$ est croissante (et converge vers 0), (en multipliant par un réel négatif, ...)
puis : $(-20\times \left(0{,}7\right)^n + 40)$ est croissante (et converge vers 40),
la suite (V_n) est croissante.

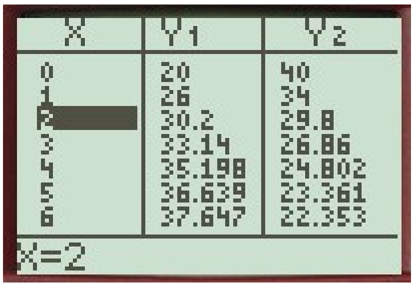
et aussi : $(20\times \left(0{,}7\right)^n)$ est décroissante (et converge vers 0),
puis : $(20 + 20\times \left(0{,}7\right)^n)$ est décroissante (et converge vers 20),
la suite (R_n) est décroissante.

Ou bien : on cherche le signe de la différence : $V_{n+1} - V_n = (-20\times \left(0{,}7\right)^{n+1} + 40) - (-20\times \left(0{,}7\right)^n + 40)$
$= 20\times 0{,}7^n (-0{,}7 + 1) = 6\times 0{,}7^n$
Cette différence étant positive, la suite (V_n) est croissante.

Pour la suite (R_n) , on a : $R_{n+1} - R_n = (20\times \left(0{,}7\right)^{n+1} + 20) - (20\times \left(0{,}7\right)^n + 20)$
$= 20\times 0{,}7^n (0{,}7 - 1) = -6\times 0{,}7^n$
Cette différence étant négative, la suite (V_n) est croissante.

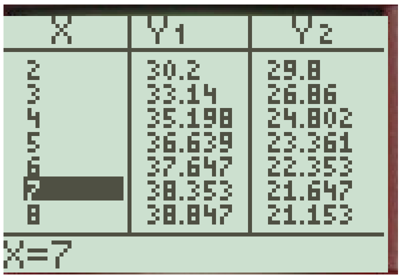
4) On peut entrer dans un tableur les deux fonctions et déterminer l'année n par lecture des valeurs.
On lit : $V_n \geqslant R_n$ dès que $n \geqslant 2$,
$V_n \geqslant 39$ dès que $n \geqslant 9$
et $R_n \leqslant 22$ dès que $n \geqslant 7$





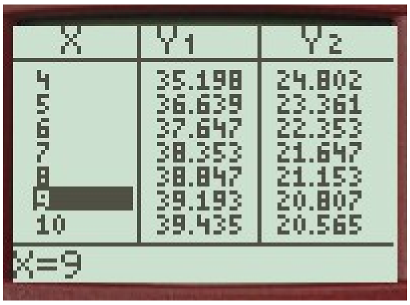
X	Y1	Y2
0	20	40
1	26	34
2	30.2	29.8
3	33.14	26.86
4	35.198	24.802
5	36.639	23.361
6	37.647	22.353

X=2



X	Y1	Y2
2	30.2	29.8
3	33.14	26.86
4	35.198	24.802
5	36.639	23.361
6	37.647	22.353
7	38.353	21.647
8	38.847	21.153

X=7



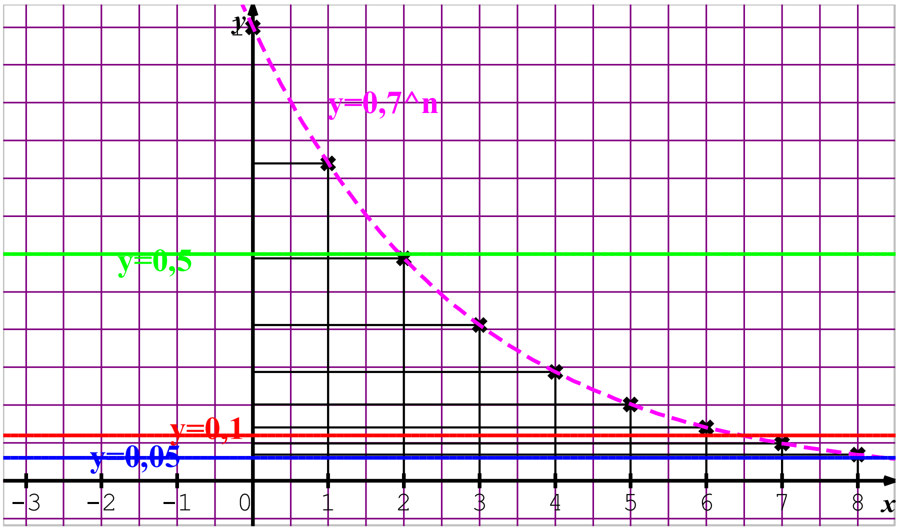
X	Y1	Y2
4	35.198	24.802
5	36.639	23.361
6	37.647	22.353
7	38.353	21.647
8	38.847	21.153
9	39.193	20.807
10	39.435	20.565

X=9

On peut aussi faire : $V_n \geqslant R_n$ dès que $V_n \geqslant 30$, soit : $-20\times \left(0{,}7\right)^n + 40 \geqslant 30$
On résout : $0{,}7^n \leqslant \dfrac{1}{2}$

$V_n \geqslant 39$, soit : $-20\times\ (0{,}7)^n\ + 40 \geqslant 39$ et on résout : $0{,}7^n\ \leqslant\ \dfrac{1}{20}$

$R_n \leqslant 22$, soit : $20 + 20\times\ (0{,}7)^n\ \leqslant 22$ et on résout : $0{,}7^n\ \leqslant\ \dfrac{1}{10}$



Sur cette représentation de la suite $\left(0{,}7^n\right)$, on retrouve les résultats précédents.

---

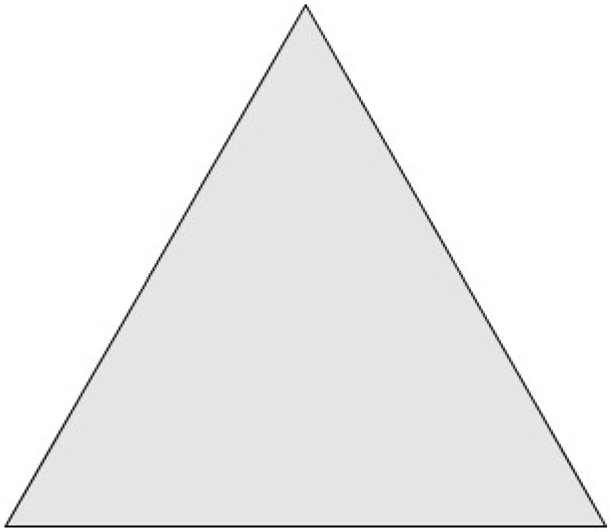
77 page 175 le triangle de Sierpinski (Une longueur infinie dans une surface limitée)

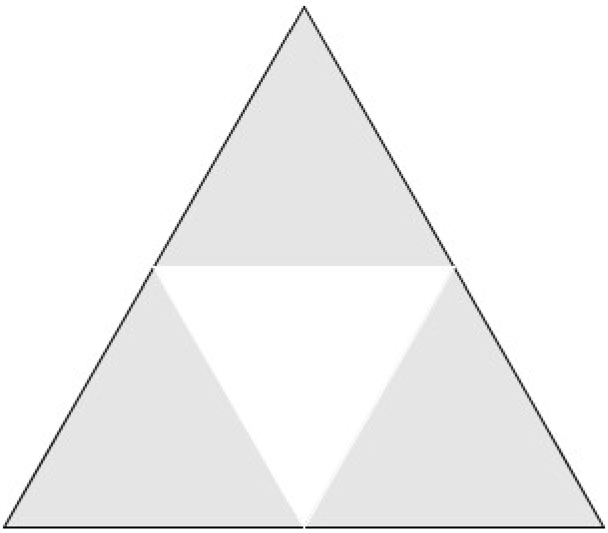
Le triangle initial est un triangle équilatéral de côté 3 cm.

Son périmètre vaut : $3\times3 = 9$ cm.

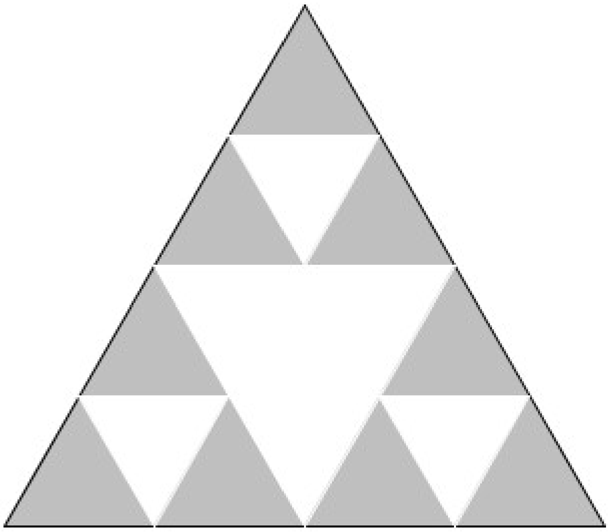
Son aire vaut : $3\times\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}\ =\ \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm².

On construit **à l'étape 1**, le triangle en blanc des milieux (se souvenir de Thalès).





et à **l'étape 2,** on répète dans chacun des trois triangles noirs la construction d'un triangle blanc :



Partie *A* :

1) u_1 étant le nombre de triangles à l'étape 1, on a : $u_1 = 1$

p_1 étant le périmètre du triangle équilatéral T_1 , on a : $p_1 = 3\times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ cm (le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié du troisième côté (qui lui est parallèle)).

a_1 étant l'aire du triangle équilatéral T_1 , on a : $a_1 = \frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$ cm²

2) et 3) et 4) :

Étude de la suite (u_n)

$u_2 = 3\times u_1$ En construisant le triangle T_1 , on a partagé le triangle initial en quatre parties, et, on construit les trois triangles T_2 dans les trois parties noires restantes.

En construisant un des triangles T_2 , on partage à nouveau chaque partie noire en 4, et, on construit trois triangles T_3 dans les trois parties noires suivantes.

$u_3 = 3\times u_2$

Soit T_n un des triangles à l'étape *n*.

Pour chaque triangle T_n, on partage à nouveau chaque partie noire en 4, et, on construit trois triangles T_{n+1} dans les trois parties noires suivantes.

Ainsi $u_{n+1} = 3\times u_n$

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison 3, d'où, $u_n = 1\times3^{n-1} = 3^{n-1}$.

Étude de la suite (p_n)

La longueur du côté d'un triangle équilatéral T_2 est la moitié de la longueur d'un côté du triangle T_1 (droite des milieux ...)

On a donc : $p_2 = \frac{1}{2}p_1$

Pour la même raison, $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$.

La suite (p_n) est donc une suite géométrique de premier terme $p_1 = \frac{9}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

On obtient : $p_n = \frac{9}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 9 \times \frac{1}{2^n}$.

Étude de la suite (a_n)

La longueur du côté d'un triangle équilatéral T_2 est la moitié de la longueur d'un côté du triangle T_1 (droite des milieux).

L'aire est donc divisée par 4, d'où, $a_2 = \frac{1}{4} a_1$.

Pour la même raison, $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$.

La suite (a_n) est donc une suite géométrique de premier terme $a_1 = \frac{9\sqrt{3}}{16}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

On obtient : $a_n = \frac{9\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 9\sqrt{3} \times \frac{1}{4^{n+1}}$

Partie B : un tracé bien long.

P_n est la somme des périmètres de tous les triangles T_n.

On a donc u_n triangles T_n de périmètre p_n.

$P_n = u_n \times p_n = 3^{n-1} \times \frac{9}{2^n} = 3 \times \frac{3^n}{2^n} = 3 \times (1{,}5)^n$ (en cm)

Comme 1 m = 100 cm, on cherche le plus petit entier n tel que $3 \times (1{,}5)^n \geqslant 100$

On trouve $n = 9$

et 1 km = 100 000 cm, on cherche le plus petit entier n tel que $3 \times (1{,}5)^n \geqslant 100\,000$

On trouve $n = 26$

Partie C : Vers le blanc

S_n est la somme des aires de tous les triangles blancs obtenus jusqu'à l'étape n.

1) La limite de S_n semble être l'aire du triangle initial, soit : $\mathcal{A} = 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²

2) a) À l'étape n, on a construit u_n triangles d'aire an, d'où, la somme des aires de ces triangles est :

$u_n \times a_n = 3^{n-1} \times 9\sqrt{3} \times \frac{1}{4^{n+1}} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \sqrt{3} \times 0{,}75^{n+1}$

b) S_n est donc la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $S_1 = a_1$ et de raison 0,75.

$S_n = a_1 \times \frac{1-0{,}75^n}{1-0{,}75} = 4 \times \frac{9\sqrt{3}}{16} \times (1 - 0{,}75^n) = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times (1 - 0{,}75^n)$

c) On cherche le plus petit entier n tel que $S_n \geqslant \frac{95}{100} \times \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\frac{9\sqrt{3}}{4} \times (1 - 0{,}75^n) \geqslant \frac{95}{100} \times \frac{9\sqrt{3}}{4}$ si et seulement si $0{,}75^n \leqslant 0{,}05$

On trouve $n = 11$