Index

activité 1 page 202.

1) **Rappel de quelques notions vues en seconde.**

" Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes " définit une **expérience aléatoire**.

a) L'**univers** Ω des **possibles** ou **éventualités** est l'ensemble des 32 cartes.

Un résultat est une **éventualité**.

Le cardinal de Ω est 32, on note : card(Ω) = 32.

b) puisque le tirage est au hasard, les éventualités sont **équiprobables** (l'expérience aléatoire suit une loi d'équiprobabilité).

Pour définir une l**oi de probabilité**, il faut :

- déterminer chaque éventualité (soit en les donnant une à une, soit en les décrivant),

- donner la probabilité de chaque éventualité (sous forme de tableau, d'arbre, de formule ...)

Dans cette activité : une éventualité est une " carte ".

$$\text{P(" la carte de ...)} = \frac{1}{32}$$

c) Un **événement** est un sous-ensemble ou une partie de l'univers Ω.

L'ensemble vide (∅) et l'univers Ω sont des parties ou sous-ensembles de Ω.

L'ensemble vide est l'événement impossible.

L'univers est l'événement certain.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des éventualités qui composent cet univers.

Ici : A est l'ensemble des 16 cartes numérotées 7, 8 , 9 ou 10.

(Quatre cartes par couleur et quatre couleurs).

$$P(A) = \frac{16}{32}$$

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, on a : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\text{nombres de cas favorables à A}}{\text{nombres de cas possibles}}$

2) **Une nouvelle notion : Variable aléatoire réelle**.

Méthode : Dans une analyse d'une expérience aléatoire, on s'imagine réaliser cette expérience et on note tous les possibles.

a) Le gain relatif du joueur est :

0 – 5 = – 5 € lorsque le joueur tire une carte autre qu'une figure ou un as.

5 – 5 = 0 € lorsque le jouer tire une figure autre qu'à cœur.

10 – 5 = 5 lorsque le joueur tire une figure à cœur ou lorsque le jouer tire un as autre que l'as de cœur.

20 – 5 = 15 € lorsque le jouer tire l'as de cœur.

b) X est une **fonction** définie sur Ω à valeurs dans ℝ.

X(" huit de cœur ") = – 5

X(" roi de pique ") = 0 (mais, X(" roi de cœur ") = 5)

c) On note (X = –5) l'événement le gain est –5.

Les éventualités (éléments) de cet événement (X = –5) sont celles de A défini au 1/c).

(L'image par X d'un élément de A est – 5 et ce sont les seuls éléments de Ω qui ont pour image par X le nombre réel –5).

$X : \Omega \rightarrow \{-5\ ;\ 0\ ;\ 5\ ;\ 15\}$

éléments de Ω	ont pour image par X	**les réels**
7		–5
….		...
cartes ni figures, ni as		–5
roi de trèfle		0
….		...
figures mais non cœur		0
roi de cœur		5
….		...
figures à cœur (sauf as de cœur)		5
as (sauf as de cœur)		5
as de cœur		15

$P(X = -5) = P(A) = \dfrac{16}{32}$

X est une **variable aléatoire** réelle définie sur Ω.

d) e) f).

De même, on peut calculer $P(X = 0) = \dfrac{9}{32}$ (9 figures autres qu'à cœur) , $P(X = 5) = \dfrac{6}{32}$ (les trois figures à cœur et les trois as autres qu'à cœur) , $P(X = 15) = \dfrac{1}{32}$ (l'as de cœur).

En définissant ainsi, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et leur probabilité , on a défini la loi de probabilité de *X*.

En résumant dans un tableau, on a:

x_i	–5	**0**	**5**	**15**	**Somme**
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{1}{32}$	1
$P(X=x_i)\times x_i$	$\frac{-80}{32}$	0	$\frac{30}{32}$	$\frac{15}{32}$	$E(X) = -\frac{35}{32}$

la somme des probabilités est 1 puisque l'on fait ainsi la somme des probabilités de toutes les éventualités.

3) On joue des milliers de fois …. Quel gain peut-on espérer en moyenne?

Les gains algébriques sont pondérés par leur probabilité. (Voir en statistiques, le calcul d'une moyenne).

On fait la moyenne des gains en calculant la somme des produits $P(X=x_i)\times x_i$ (comme la somme des probabilités vaut 1, la division par l'effectif total n'apparaît pas).

On trouve : gain moyen = $-\frac{35}{32}$

Ce nombre s'appelle l'espérance mathématique de la variable aléatoire *X*.

variance :

x_i	–5	**0**	**5**	**15**	**Somme**
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{1}{32}$	1
$P(X=x_i)\times x_i$	$\frac{-80}{32}$	0	$\frac{30}{32}$	$\frac{15}{32}$	$E(X) = -\frac{35}{32}$
$P(X=x_i)\times x_i{}^2$	$\frac{400}{32}$	0	$\frac{150}{32}$	$\frac{225}{32}$	$E(X^2) = \frac{775}{32}$

$V(\mathrm{X}) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{775}{32} - \left(\frac{-35}{32}\right)^2 = \frac{775\times 32-35^2}{32^2}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

activité 3 page 203 : Répéter des expériences aléatoires

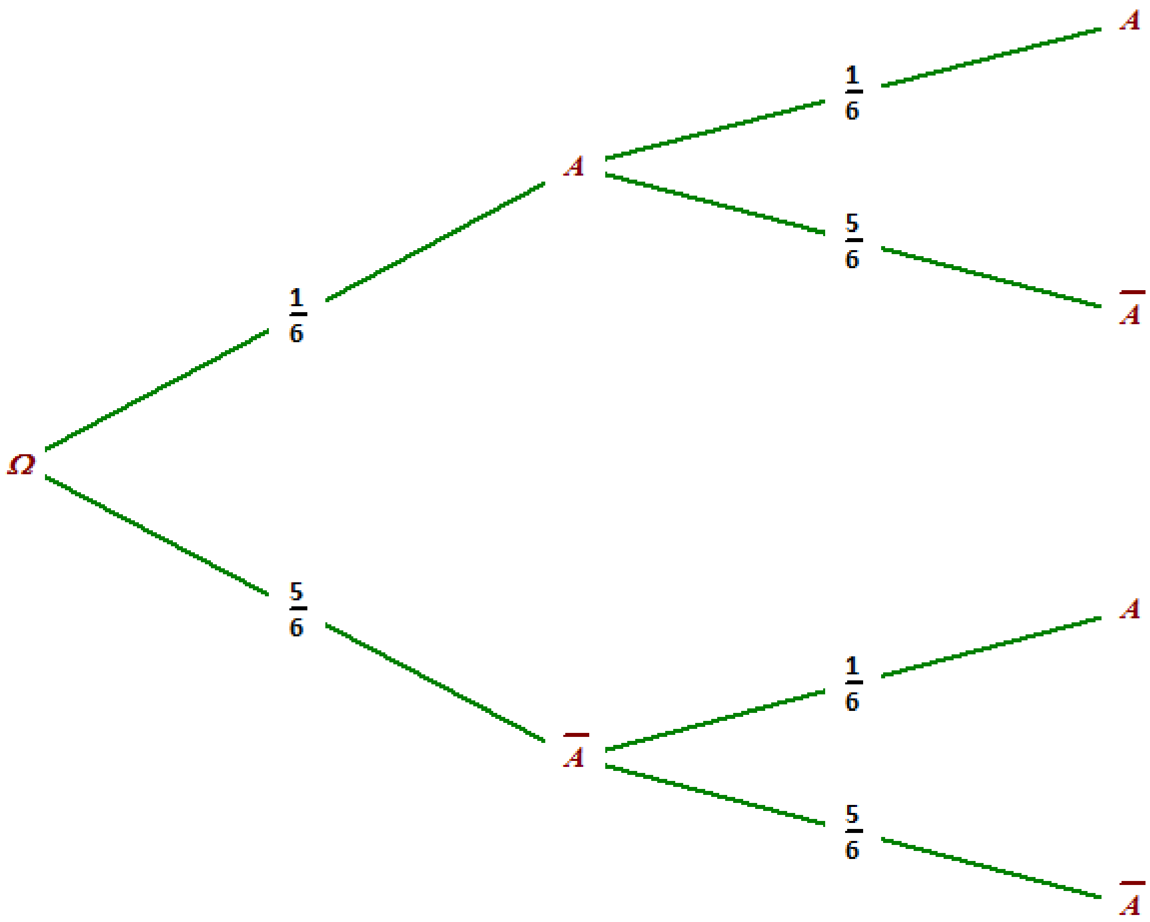
A) fréquence de l'événement R : " obtenir deux fois 6 " est : 0,0292

fréquence de l'événement S : " obtenir un seul 6 " est : 0,2731

B) Arbre de probabilités:

Le dé est supposé bien équilibré, d'où, la probabilité d'apparition d'une face donnée est $\frac{1}{6}$.

Soit A l'événement : " Obtenir un 6 " lors d'un lancer : P(A) = $\frac{1}{6}$.



$P(A) = \dfrac{1}{6}$ quelque soit l'événement déjà réalisé. (***Le résultat du deuxième lancer ne dépend pas de celui du lancer précédent***). (*Notion indispensable dans le prochain chapitre : loi binomiale*)

$P(\overline{A}) = \dfrac{5}{6}$ $\quad$ **($P(A) + P(\overline{A}) = 1$)**

2) L'événement R correspond au chemin $A \cap A$ (A et A), et,

la probabilité de R est $P(R) = \dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36} \approx 0{,}027 \ldots$

3) L'événement S correspond aux deux chemins $A \cap \overline{A}$ et $\overline{A} \cap A$,

$P(A \cap \overline{A}) = \dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}$ et $P(\overline{A} \cap A) = \dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}$

$P(S) = 2\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{36} \approx 0{,}277 \ldots$

Complément au B/ afin de préparer le prochain chapitre :

On répète dans **les mêmes conditions** n fois ce lancer de dé, et, on s'intéresse au nombre de fois où on a obtenu le " 6 ".

Par exemple : 10 lancers et exactement 4 fois le " 6 ".

La démarche sera identique :

on aura pour **un chemin** : $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10-4}$ …. (4 fois le " 6 " et 10 – 4 fois " autre que 6 ")

Il reste donc à chercher le **nombre de chemins** qui donne exactement 4 fois le " 6 "…. (ce sera l'objet de la leçon).

C) La variable aléatoire G prend les valeurs 0, 2 et 4.

Loi de probabilité de G :

g_i	**0**	**2**	**4**	**Total**
$P(G=g_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	1

Remarquer : $\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^2 = 1$

Compléments :

g_i	**0**	**2**	**4**	**Total**
$P(G=g_i)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	1
$P(G=g_i)\times g_i$	0	$4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$4\times\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$E(G) = \frac{2}{3}$
$P(G=g_i)\times g_i^2$	0	$8\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$	$16\times\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$E(G^2) = \frac{14}{9}$

$$E(G) = 0\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\times 2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} + 4\times\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right) = 4\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$E(G^2) = 0^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2^2\times 2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} + 4^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 4\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right) = 4\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

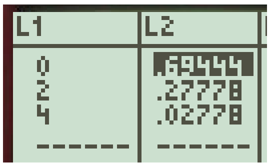
$$V(G) = E(G^2) - [E(G)]^2 = \frac{14}{9} - \frac{4}{9} = \frac{10}{9} \text{ et } \sigma(G) = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}05$$

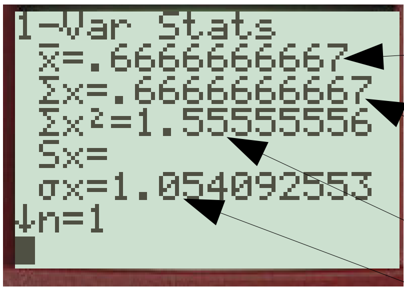
Rappel : calculatrice

En liste 1, les valeurs prises par la variable aléatoire G

En liste 2, les probabilités (même rôle que les fréquences en statistiques dans l'emploi des relations).

on peut taper $(5/6)^2$, …





Espérance mathématique ou moyenne

Puisque n = 1 la somme des p_i*g_i est égale à la moyenne

l'espérance de G² (= E(G²))

L'écart-type

TP3 page 212 (Désintégration radioactive) La loi géométrique tronquée

Donnée :

La probabilité de se désintégrer dans une unité de temps pour un noyau radioactif est p = 0,07.

On observe ce noyau sur 200 unités de temps et on se demande quel temps on doit attendre en moyenne pour qu'il se désintègre.

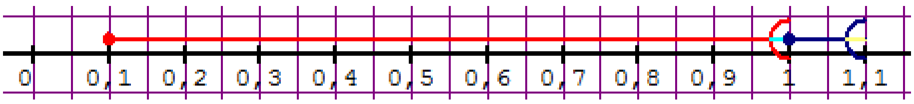
T est la variable aléatoire donnant le temps d'attente de désintégration du noyau s'il se désintègre pendant ces 200 unités de temps, et prenant la valeur 0 sinon.

A- Simulation

1) " *nombre aléatoire* " renvoie un nombre x tel que $0 \leqslant x < 1$

" *nombre aléatoire + 0,07*" renvoie un nombre y tel que $0{,}07 \leqslant y < 1{,}07$

" *partieEntière(nombre aléatoire + 0,07*) " renvoie $\begin{cases} 0 & \text{si } 0{,}07 \leqslant y < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant y < 1{,}07 \end{cases}$



la longueur de l'intervalle [0,07 ; 1[est 1 – 0,07 = 0,93

la longueur de l'intervalle [1 ; 1,007[est 0,07

Le tirage étant au hasard, on a donc : 1 dans 7 % des cas et 0 dans 93 % des cas.

Si le résultat est 1 alors le noyau s'est désintégré, si le résultat est 0 alors le noyau ne s'est pas désintégré.

2) Un algorithme.

Variables :

T (durée)

D (désintégration)

Initialisation :

T prend la valeur 0

D prend la valeur 0

Traitement :

Tant que T < 200 ET D = 0

D prend la valeur *partieEntière(nombre aléatoire + 0,07*)

Si D = 1 **alors**

afficher T

Sinon

T prend la valeur T + 1

FinSI

FinTantQue

afficher T

Avec Algobox

AlgoBox : algorithme1_TP3page212

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  T PREND_LA_VALEUR 0
  T PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (T<200 ET D==0) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    D PREND_LA_VALEUR floor(random()+0.07)
    SI (D==1) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "le noyau s'est désintégré en "
      AFFICHER T
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        T PREND_LA_VALEUR T+1
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Console

```
***Algorithme lancé***
le noyau s'est désintégré en
14
***Algorithme terminé***
```

Avec TI82

```
PROGRAM:TP3P212
:0→T
:0→D
:While T<200 and
 D=0
:iPart(rand+0.07
)→D
:If D=1
:Then
:Disp T
:Else
:T+1→T
:End
:End
```

3) Temps d'attente moyen

a) ***Modification de l'algorithme***.

Insérer un compteur pour effectuer l'algorithme précédent 150 fois.

Entrer chaque résultat (temps d'attente) dans une liste

Faire la moyenne des temps d'attente.

Variables :

T (durée)

D (désintégration)

…. N (compteur)

L (liste)

M (moyenne)

Initialisation :

L est vide

Traitement :

Pour N entier allant de 1 à 150

T prend la valeur 0

D prend la valeur 0

Tant que T **<** 200

D prend la valeur *partieEntière(nombre aléatoire + 0,07*)

Si D = 1 **alors**

Mettre T dans la liste en position N

(ou bien faire la somme des valeurs prises par T)

Sinon

T prend la valeur T + 1

FinSI

FinTantQue

FinPour

calculer la moyenne M des termes de la liste

afficher la M

```
VARIABLES
  T EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  L EST_DU_TYPE LISTE
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR N ALLANT_DE 1 A 150
    DEBUT_POUR
    T PREND_LA_VALEUR 0
    D PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (T<200 ET D==0) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      D PREND_LA_VALEUR floor(random()+0.07)
      SI (D==1) ALORS
        DEBUT_SI
        L[N] PREND_LA_VALEUR T
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          T PREND_LA_VALEUR T+1
          FIN_SINON
      FIN_TANT_QUE
    FIN_POUR
  M PREND_LA_VALEUR 26 ALGOBOX_MOYENNE(L,1,150)
  AFFICHER M
FIN_ALGORITHME
```

Console

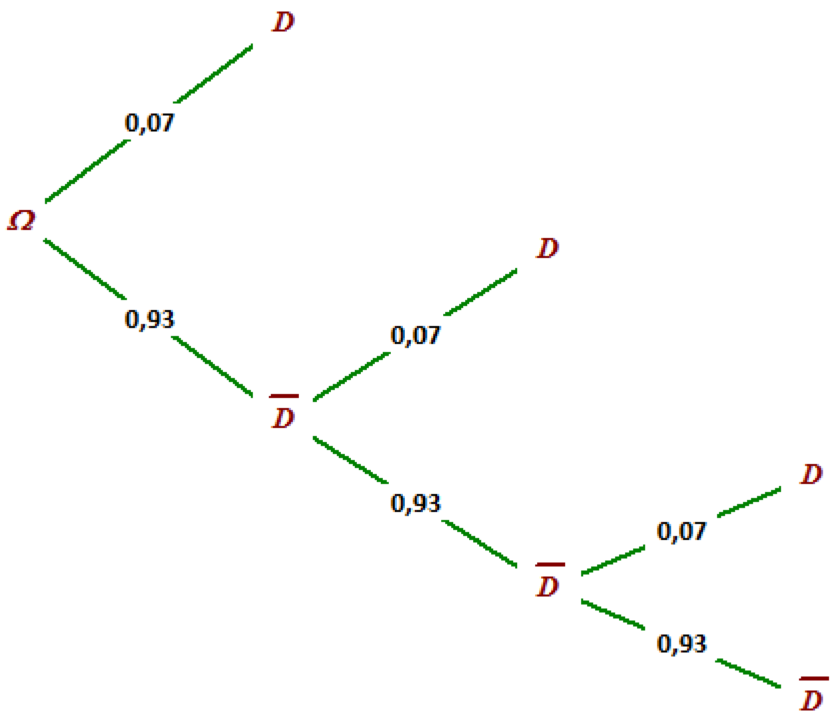
```
***Algorithme lancé***
12.266667
***Algorithme terminé***
```

```
PROGRAM:TP3P212
:0→S
:For(I,1,150)
:0→T
:0→D
:While T<200 and
 D=0
:iPart(rand+0.07
)→D
:If D=1
:Then
:S+T→S
:Else
:T+1→T
:End
:End
:End
:S/150→M
:Disp M
```

```
prgmTP3P212
                 15.56
                  Done
```

B- Modélisation

On peut imaginer un arbre pour un noyau



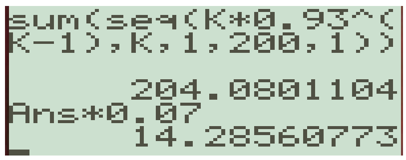
1 a) P(T=0)= $0{,}93^{200}$ le noyau ne s'est pas désintégré

b) P(T=1) = 0,07 P(T=2) = 0,93×0,07 P(T=10) = $0{,}93^{9}\times 0{,}07$ P(T=200)= $0{,}93^{199}\times 0{,}07$

c) P(T=k) = $0{,}93^{k-1}\times 0{,}07$ Le noyau se désintègre à la dernière unité de temps qui est le temps d'attente de la désintégration.

Pour chaque unité de temps précédente, le noyau ne s'est pas désintégré.

d) E(T) = $0\times\ 0{,}93^{200} + \sum_{k=1}^{k=200} k\times 0{,}93^{k-1}\times 0{,}07 = 0{,}07\times \sum_{k=1}^{k=200} k\times 0{,}93^{k-1}$



valeur approchée de E(T) ≈ 14,3 à 0,1 par excès.

2- Généralisation

Pour n unités de temps, la démarche est identique …

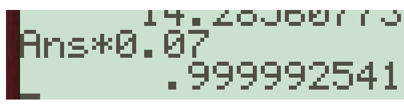
Les calculs déjà effectués ont été faits pour n = 200.

On aura donc les mêmes relations en remplaçant 200 par n dans les questions précédentes.

a) $E(T_n) = 0\times\ 0{,}93^{n} + \sum_{k=1}^{k=n} k\times 0{,}93^{k-1}\times 0{,}07 = 0{,}07\times \sum_{k=1}^{k=n} k\times 0{,}93^{k-1}$

b) Le calcul de $p\times E(T_n)$ pour des grandes valeurs de n donne des valeurs proches de 1.

En calculant $0{,}07\times 0{,}07\times \sum_{k=1}^{k=200} k\times 0{,}93^{k-1}$



$\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = \frac{1}{p}$

pour aller plus loin :

Vérifions que la somme des probabilités de toutes les éventualités est égale à 1

$p \in]0\,;1[$, on pose $q = 1 - p$ et on sait que $P(T_n=0) = q^n$, $P(T_n=k) = q^{k-1} \times p$

On a donc : $\sum_{k=0}^{k=n} P(T_n=k) = P(T_n=0) + \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n=k) = q^n + \sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1} \times p$

Comme p est une constante (indépendante de k), on peut factoriser p dans la somme, d'où,

$\sum_{k=0}^{k=n} P(T_n=k) = q^n + p \times \sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1}$

On reconnaît la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q

On a donc : $\sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. Or, $p = 1 - q$, d'où : $\sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1} = 1 - q^n$.

Finalement : $\sum_{k=0}^{k=n} P(T_n=k) = q^n + 1 - q^n = 1$

Calcul de $E(T_n)$

$$E(T_n) = 0 \times q^n + \sum_{k=1}^{k=n} k \times q^{k-1} \times p = p \times \sum_{k=1}^{k=n} k \times q^{k-1}$$

Le calcul de la somme $\sum_{k=1}^{k=n} k \times q^{k-1}$ est un exercice classique (N° 68 page 223 dans votre livre).

On pose $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ pour x réel différent de 1.

On reconnaît la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x, d'où,

$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

On a maintenant deux relations algébriques pour la même fonction f.
En dérivant les deux expressions, on obtient donc une nouvelle égalité.
$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ a pour expression dérivée : $f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$

$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ a pour expression dérivée : $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n \times (1-x) - (-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

En comparant les deux expressions de $f'(x)$, on a donc :

$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

Si x est différent de 1, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\times x^{n-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

Comme $E(T_n) = p\times \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\times q^{k-1}$ et que $p = 1 - q$, on obtient :

$$E(T_n) = p\times\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2} = p\times\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{p^2} = \frac{1}{p}\times[nq^{n+1}-(n+1)q^n+1]$$

On peut aussi écrire : $[nq^{n+1}-(n+1)q^n+1] = nq^n\times q-nq^n-q^n+1 = nq^n(q-1)-q^n+1$

$= -q^n-npq^n+1 = q^n(1+np)+1 = (1+np)(1-p)^n+1$

On montrera en terminale que : si $0 < q < 1$ alors $n\times q^n$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

L'expression $[nq^{n+1}-(n+1)q^n+1]$ converge donc vers 1 et

$E(T_n)$ converge vers $\dfrac{1}{p}$.

---

11 page 213

1) Le tirage est au hasard.

$P(V) = \dfrac{1}{6}$, $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $P(R) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

2) a)b) La variable aléatoire G prend les valeurs :

–3, 2 ou 5

L'événement (G = 5) est l'événement V.

$P(G = 5) = \dfrac{1}{6}$

c) Loi de probabilité de G (***et complément*** : calcul de l'espérance mathématique de G et de l'écart-type).

g_i	–3	2	5	Somme
$P(G = g_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$P(G = g_i)\times g_i$	$-\frac{9}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$E(G) = 0$
$P(G = g_i)\times g_i^2$	$\frac{27}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{25}{6}$	$E(G^2) = \frac{60}{6} = 10$

Lorsque dans un jeu, l'**espérance mathématique est nulle**, on dit que le jeu est **équitable**.

Comme la moyenne est nulle, $V(G) = E(G^2) = 10$ et $\sigma(G) = \sqrt{10}$.

---

18 page 214

x_i	–3	1	2	Somme
$P(X = x_i)$	0,25	0,3	0,45	1
$P(X = x_i)\times x_i$	–0,75	0,3	0,9	$E(X) = 0,45$
$P(X = x_i)\times x_i^2$	2,25	0,3	1,8	$E(X^2) = 4,35$

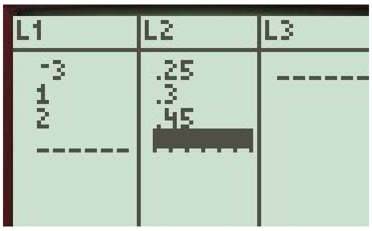
P(X=2) = 1 – 0,25 – 0,3 = 0,45

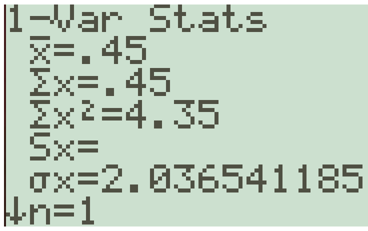
E(X) = –3×0,25 + 1×0,3 + 2×0,45 = 0,45

V(X) = E(X²) – [E(X)]² = 4,35 – 0,45² = 4,147 5

$\sigma(X) = \sqrt{4,1475} \approx 2,04$ à 0,01 près par excès.

Copies d'écran de la TI82





---

23 page 215

Composition de la boîte

Numéro	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

1) G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur (Numéro tiré – mise de 10 €) et tirage au hasard (hypothèse d'équiprobabilité)

Loi de G.

Gain	–5	–4	0	1	2	3	4
Probabilités	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Espérance de G.

$$E(G) = -5\times\frac{1}{10} - 4\times\frac{2}{10} + 0\times\frac{1}{10} + 1\times\frac{3}{10} + 2\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{10} + 4\times\frac{1}{10} = -\frac{1}{10}.$$

2) Rendre le jeu équitable en changeant un numéro seulement est possible ….

Si au lieu de la boule n°14, on a une boule n° 15, on obtient :

Loi de $G_{\text{modifié}}$.

Nouveau Gain	–5	–4	0	1	2	3	5
Probabilités	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Espérance de $G_{\text{modifié}}$.

$$E(G) = -5\times\frac{1}{10} - 4\times\frac{2}{10} + 0\times\frac{1}{10} + 1\times\frac{3}{10} + 2\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{1}{10} + 5\times\frac{1}{10} = 0$$

---

32 page 216

Quelques remarques : de 0 à 36, on a 37 nombres entiers.

Imaginez que vous êtes joueur :

Vous misez 1 €, vous recevez 1 € et récupérez la mise de 1 € : bilan : +1

Vous misez 1 €, vous recevez 0 € et perdez la mise de 1 € : bilan : –1

On a 37 cases, 1 verte, 18 noires et 18 rouges

Chaque " case " a la même probabilité de recevoir la bille, soit : P(" une case ") = $\frac{1}{37}$

Stratégie 1 :

Soit X le gain du joueur : ($X = 1$) si la bille est sur un " numéro rouge " : P($X = 1$) = $\frac{18}{37}$

($X = -1$) sinon : P($X = -1$) = $\frac{19}{37}$

$E(X) = -1\times \frac{19}{37} + 1\times \frac{18}{37} = -\frac{1}{37}$

Calcul de la variance :

À partir de la définition : $V(X) = \frac{19}{37}\times\left(-1-\left(\frac{-1}{37}\right)\right)^2 + \frac{18}{37}\times\left(1-\left(\frac{-1}{37}\right)\right)^2 = \frac{19\times(-36)^2+18\times 38^2}{37^3}$

$= \frac{2\times 19\times 18\times(36+38)}{37^3} = \frac{2\times 19\times 18\times 2}{37^2}$

Avec la formule de Kœnig.

$E(X^2) = (-1)^2\times\frac{19}{37} + 1^2\times\frac{18}{37} = 1$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - \left(\frac{1}{37}\right)^2 = \frac{37^2-1^2}{37^2} = \frac{38\times 36}{37^2} = ...$

Calcul de l'écart-type :

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{6}{37}\times\sqrt{38} \approx 1$

Stratégie 2 :

Soit Y le gain du joueur : ($Y = 35$) si la bille est sur le " numéro 7 " : P($Y = 35$) = $\frac{1}{37}$

($Y = -1$) sinon : P($Y = -1$) = $\frac{36}{37}$

$E(Y) = -1\times\frac{36}{37} + 35\times\frac{1}{37} = -\frac{1}{37}$

Calcul de la variance :

À partir de la définition : $V(Y) = \frac{36}{37}\times\left(-1-\left(\frac{-1}{37}\right)\right)^2 + \frac{1}{37}\times\left(35-\left(\frac{-1}{37}\right)\right)^2$

$$= \frac{36\times(-36)^2+(35\times37+1)^2}{37^3} = \ldots$$

Formule de Kœnig

$\mathrm{E}(Y^2) = (-1)^2\times \dfrac{36}{37} + 35^2\times \dfrac{1}{37} = \dfrac{36+35^2}{37}$

$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2 = \dfrac{36+35^2}{37} - \left(\dfrac{1}{37}\right)^2 = \dfrac{37\times36+35^2\times37-1}{37^2} \approx 34$

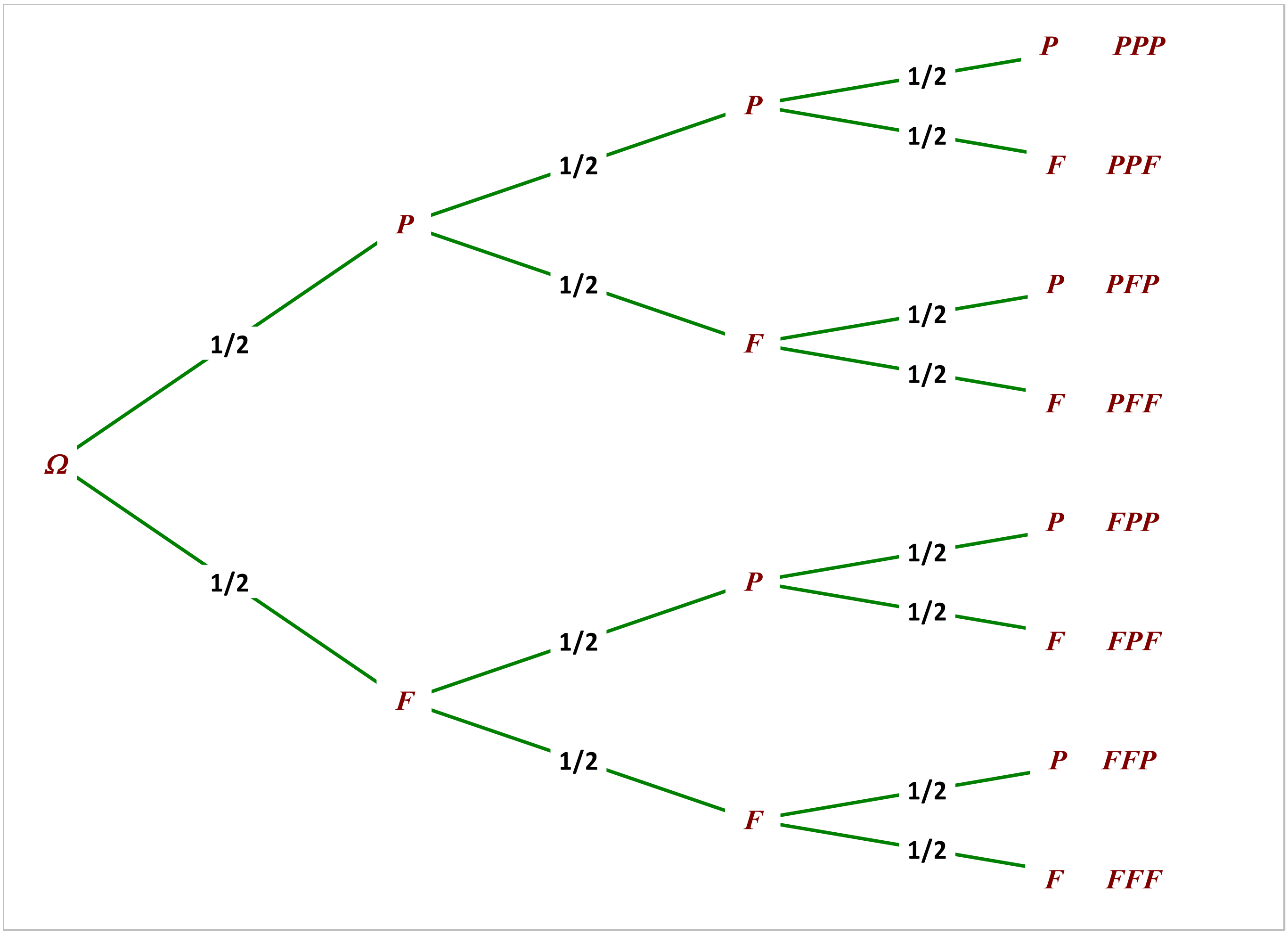
Calcul de l'écart-type :

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 5{,}8$

L'écart-type $\sigma(Y)$ est supérieur à l'écart-type $\sigma(X)$ pour des espérances mathématiques identiques.
Le risque est plus grand avec la stratégie 2 (on gagne plus quand on gagne, mais, on gagne rarement).
Avec la stratégie 1, on gagne presqu'une fois sur 2, mais, on gagne peu.

35 page 217numéro

1 a)



b) L'ensemble des issues est : {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}

Les issues sont équiprobables puisque la pièce est équilibrée.

c) $P(E_0) = \frac{1}{8}$, car E0 = {FFF}

$P(E_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, car E_1 = {PFF, FPF, FFP}

$P(E_2) = \frac{3}{8}$,

$P(E_3) = \frac{1}{8}$

La somme $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

3) A_1 est l'événement " Avoir au moins un PILE ". (si on note n le nombre de PILE, on cherche $n \geqslant 1$)

A_1 = {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP} (on a : 1 ou 2 ou 3 PILE)

$P(A_1) = \frac{7}{8}$

On peut chercher l'événement contraire : $\overline{A_1}$ " n'avoir aucun pile " $\overline{A_1} = \{FFF\}$ et $P(\overline{A_1}) = \dfrac{1}{8}$

d'où, $P(A_1) = 1 - P(\overline{A_1}) = \dfrac{7}{8}$

A_2 est l'événement " Avoir au plus un FACE ". (si on note m le nombre de FACE, on cherche $m \leqslant 1$)

$A_2 = \{PPP, PPF, PFP, FPP\}$ (on a 0 ou 1 FACE)

$P(A_2) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

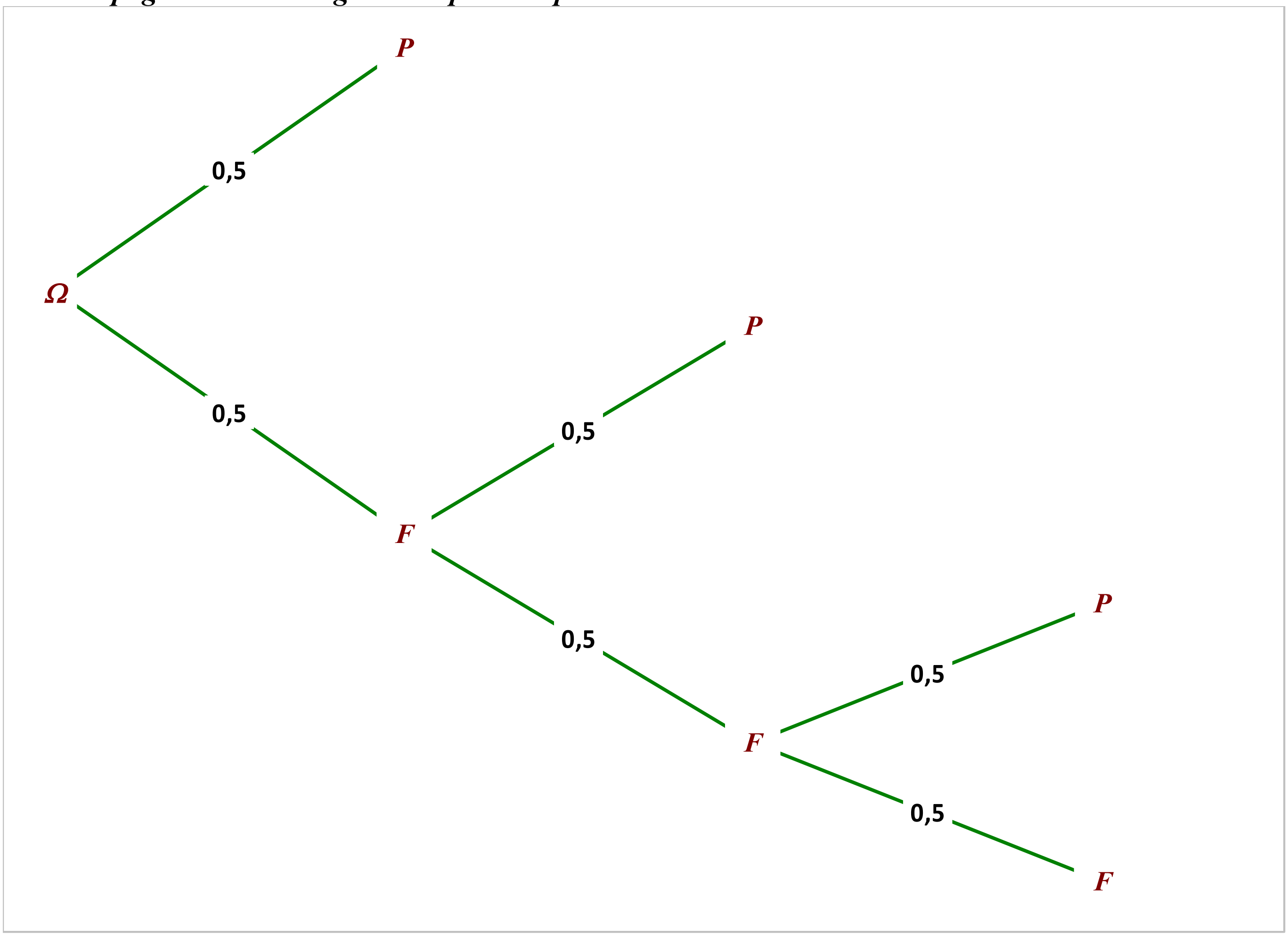
Commentaires :

*** Distinguer les éventualités ou issues, les événements de leurs probabilités ….

*** comprendre comment traduire " au moins … " , " au plus … " , " moins de … " " plus de ..." en inégalités larges et strictes.

*** penser à utiliser l'événement contraire …

36 page 217 La loi géométrique tronquée



Les issues sont : P ; FP ; FFP ; FFF

Il n'y a pas équiprobabilité

a) P(" PILE au premier jet ") = $\frac{1}{2}$

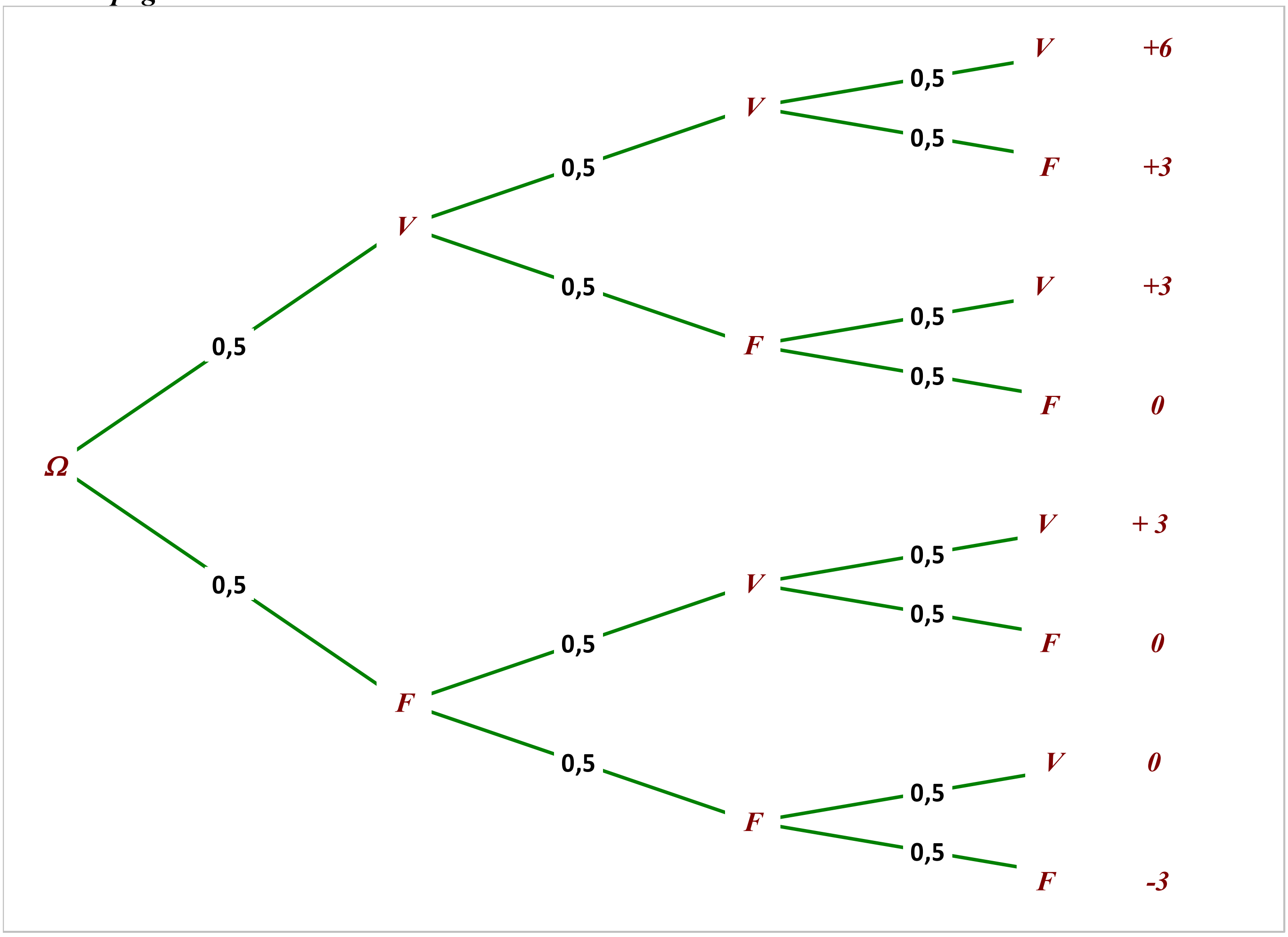
b) P(" PILE au second jet ") = $\frac{1}{4}$

c) P(" PILE au troisième jet ") = $\frac{1}{8}$

d) P(" aucun PILE ") = $\frac{1}{8}$

La somme des probabilités des quatre éventualités est 1.

38 page 217



x_i	-3	0	3	6	Somme
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$p_i \times x_i$	$\frac{-3}{8}$	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{8}$	$E(X) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$p_i \times x_i^2$	$\frac{9}{8}$	0	$\frac{27}{8}$	$\frac{36}{8}$	$E(X^2) = \frac{72}{8} = 9$

Avec la définition :

$$V(X) = \sum_1^4 p_i \times (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{8}\left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(6 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{81 + 27 + 27 + 81}{8 \times 4} = \frac{27}{4}$$

avec la formule de Kœnig

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

---

41 page 218

Partie A : rencontre à deux

1) **Anna contre Brice** (Dans l'ordre : (Anna ; Brice)

On a neuf couples

(1 ; 2) ; (1 ; 4) ; (1 ; 9)
(6 ; 2) ; (6 ; 4) ; (6 ; 9)
(8 ; 2) ; (8 ; 4) ; (8 ; 9)

P(Anna gagne) = $\frac{4}{9}$ P(Brice gagne) = $\frac{5}{9}$ Brice a plus de chances de l'emporter

Brice contre Carole (Dans l'ordre : (Brice ; Carole)

On a neuf couples

(2 ; 3) ; (2 ; 5) ; (2 ; 7)
(4 ; 3) ; (4 ; 5) ; (4 ; 7)
(9 ; 3) ; (9 ; 5) ; (9 ; 7)

P(Brice gagne) = $\frac{4}{9}$ P(Carole gagne) = $\frac{5}{9}$ Carole a plus de chances de l'emporter

Carole contre Anna (Dans l'ordre : (Carole ; Anna))

On a neuf couples

(3 ; 1) ; (3 ; 6) ; (3 ; 8)
(5 ; 1) ; (5 ; 6) ; (5 ; 8)
(7 ; 1) ; (7 ; 6) ; (7 ; 8)

P(Carole gagne) = $\frac{4}{9}$ P(Anna gagne) = $\frac{5}{9}$ Anna a plus de chances de l'emporter

Commentaires :

Il ne faut pas chercher à hiérarchiser, les parties ne sont pas comparables.

Carole l'emporte sur Brice qui l'emporte sur Anna, mais,

Anna l'emporte sur Carole.

Partie B : rencontre à trois

Il y a 27 triplets (Dans l'ordre : (Anna ; Brice ; Carole)

(1 ; 2 ; 3) ; (1 ; 2 ; 5) ; (1 ; 2 ; 7)
(1 ; 4 ; 3) ; (1 ; 4 ; 5) ; (1 ; 4 ; 7)
(1 ; 9 ; 3), (1 ; 9 ; 5) ; (1 ; 9 ; 7)
(6 ; 2 ; 3) ; (6 ; 2 ; 5) ; (6 ; 2 ; 7)
(6 ; 4 ; 3) (6 ; 4 ; 5) ; (6 ; 4 ; 7)
(6 ; 9 ; 3) ; (6 ; 9 ; 5) ; (6 ; 9 ; 7)
(8 ; 2 ; 3) ; (8 ; 2 ; 5) ; (8 ; 2 ; 7)
(8 ; 4 ; 3) ; (8 ; 4 ; 5) ; (8 ; 4 ; 7)
(8 ; 9 ; 3) ; (8 ; 9 ; 5) ; (8 ; 9 ; 7)

P(Anna gagne) = $\frac{10}{27}$ P(Brice gagne) = $\frac{10}{27}$ P(Carole gagne) = $\frac{7}{27}$

Méthodes :

Pour déterminer les éventualités, on peut faire des tableaux à double-entrée, des arbres.

Exemple d'un tableau à double entrée où on note le gagnant à l'intersection des lignes et colonnes.

Partie à deux : Anna contre Brice

Anna / Brice	1	6	8
2	Brice	Anna	Anna
4	Brice	Anna	Anna
9	Brice	Brice	Brice

Partie à trois :

On peut ensuite reprendre ce tableau et faire trois cas où intervient Carole.

Carole fait 3

Anna / Brice	1	6	8
2	C	A	A
4	B	A	A
9	B	B	B

4A, 4B, 1C

Carole fait 5

Anna / Brice	1	6	8
2	C	A	A
4	C	A	A
9	B	B	B

4A, 3B, 2C

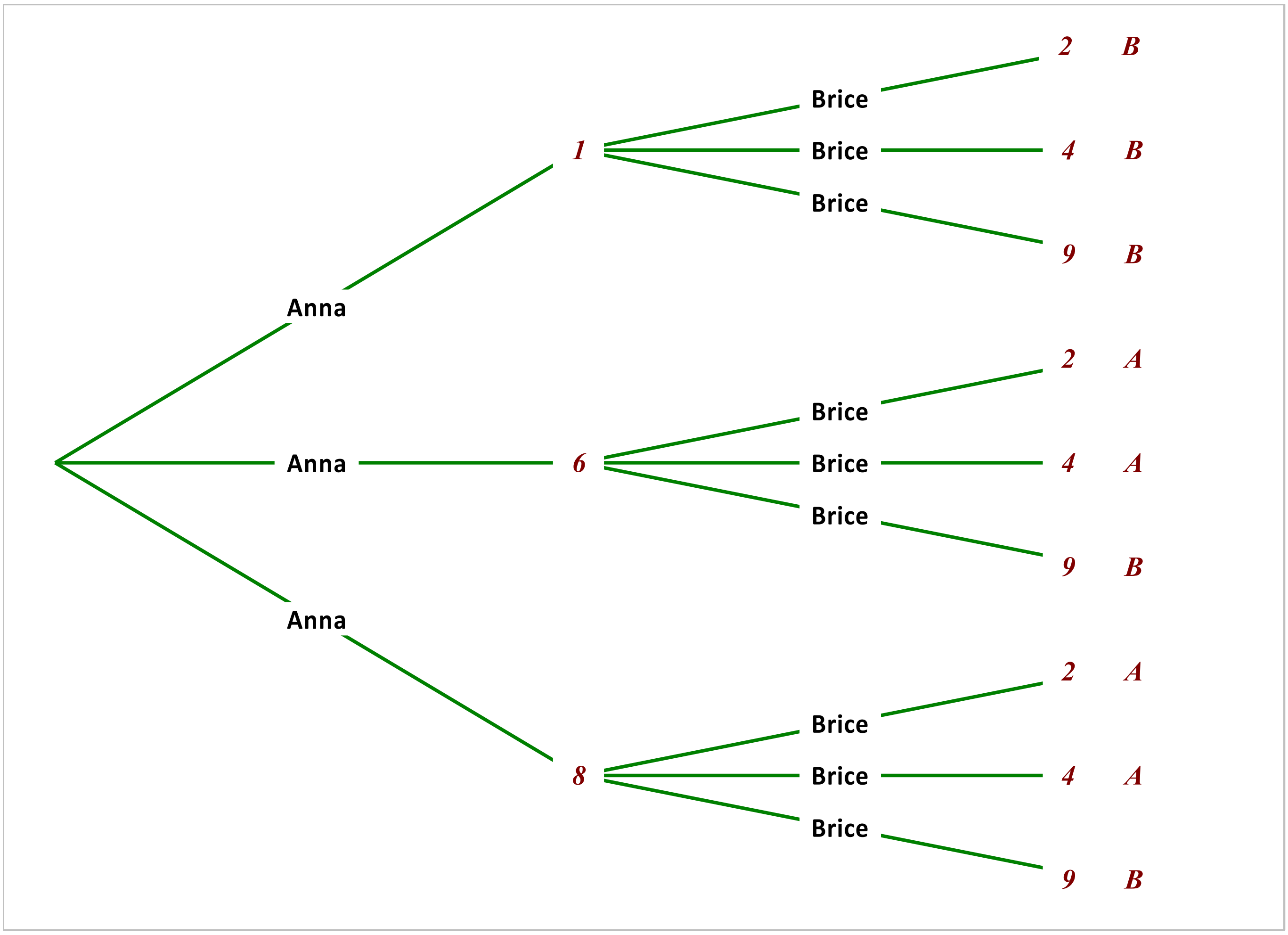
Carole fait 7

Anna / Brice	1	6	8
2	C	C	A
4	C	C	A
9	B	B	B

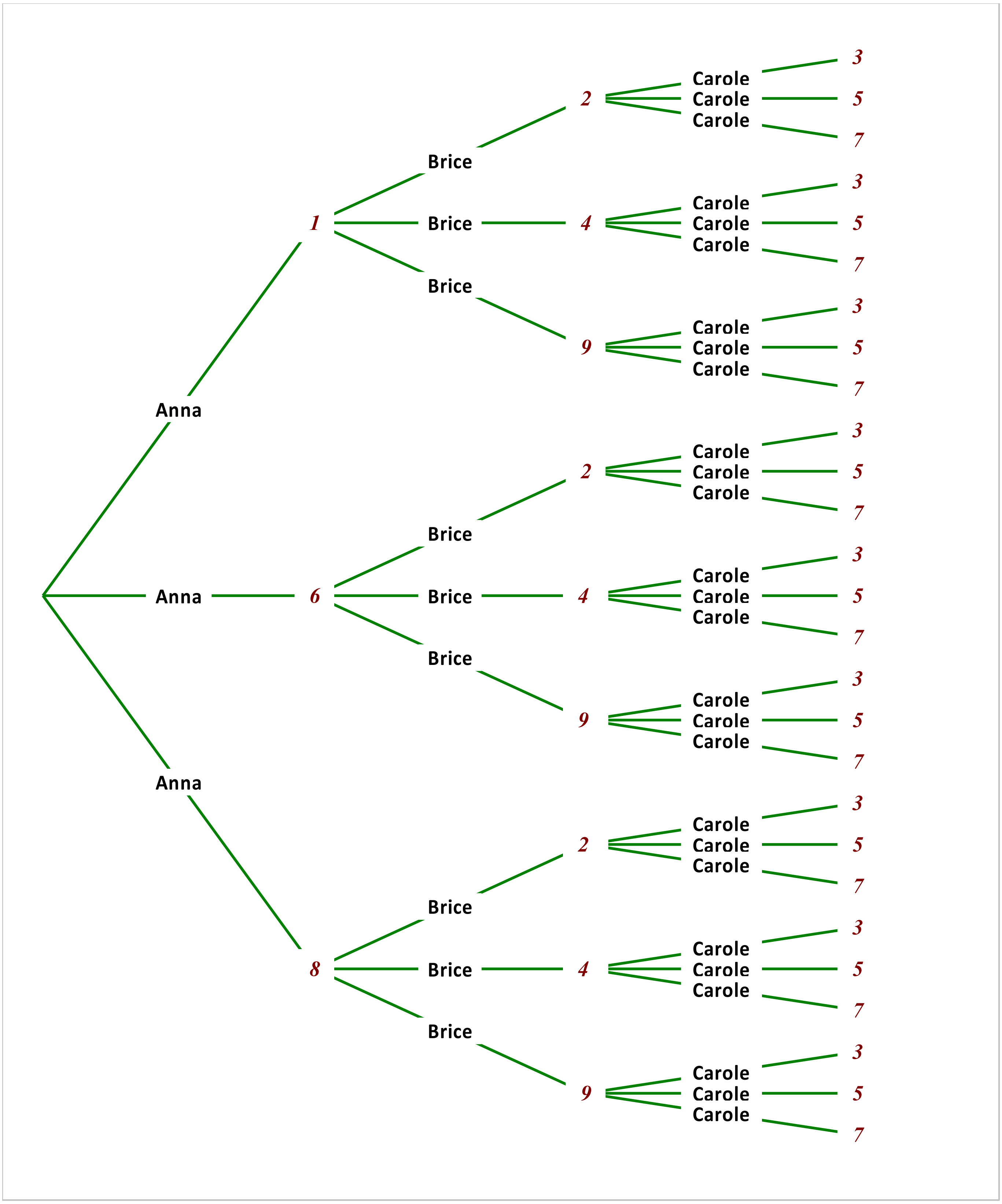
2A, 3B, 4C

27 cas : 10A, 10B, 7C

Arbre : ***Anna contre Brice***



Anna, Brice, Carole



46 page 219

Rappels :

Négation d'une proposition et événements contraires.

La négation de " l'un ET l'autre " est : " ni l'un OU ni l'autre "

La négation de " l'un OU l'autre " est : " ni l'un ET ni l'autre "

En langage ensembliste ou probabiliste, on a donc :

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, (événements disjoints), on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Notation :

L'événement $(X \leqslant k)$ est un ensemble d'éléments. On peut dans cet exercice lister les éléments

L'événement contraire, noté $\overline{(X \leqslant k)}$ contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans $(X \leqslant k)$

Équiprobabilité :

Il n'y a aucune raison de considérer l'équiprobabilité.
la définition de la probabilité d'un événement est suffisante pour répondre aux questions de cet exercice.
À savoir :
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des éventualités qui composent cet événement.

Réunion : On fait la réunion des événements (Ce sont des ensembles)
Somme : On fait la somme de probabilités (Ce sont des nombres)

X prend les valeurs entières de 1 à 9.

1a) $(X \leqslant 3) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)$

$(X > 7) = (X = 8) \cup (X = 9)$

L'événement contraire de $(X \leqslant 3)$ est :

$\overline{(X \leqslant 3)} = (X > 3) = (X = 4) \cup (X = 5) \cup (X = 6) \cup (X = 7) \cup (X = 8) \cup (X = 9)$

L'événement contraire de $(X > 7)$ est :

$\overline{(X > 7)} = (X \leqslant 7) = (X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3) \cup (X = 4) \cup (X = 5) \cup (X = 6) \cup (X = 7)$

b) L'événement $(4 \leqslant X \leqslant 7)$ est la réunion : $(X = 4) \cup (X = 5) \cup (X = 6) \cup (X = 7)$

D'où : $P(4 \leqslant X \leqslant 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$

$P(X \leqslant 7) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$

$P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

D'où : $P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$

Conclusion : $P(4 \leqslant X \leqslant 7) = P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 3)$

2) a) l'événement ($a \leqslant X \leqslant b$) est l'intersection des événements ($X \geqslant a$) $\cap$ ($X \leqslant b$)

Les éléments communs à ces deux ensembles sont les entiers compris entre a et b (inclus)

Ce sont les entiers inférieurs ou égaux à b **ET** supérieurs ou égaux à a.

L'événement contraire à ($a \leqslant X \leqslant b$) est : $\overline{(a \leqslant X \leqslant b)}$ = ($X < a$) $\cup$ ($X > b$)

Comme ($X < a$) et ($X > b$) sont des événements disjoints, on a :

$P(a \leqslant X \leqslant b) = 1 - P(\overline{(a \leqslant X \leqslant b)}) = 1 - P[(X < a) \cup (X > b)] = 1 - P(X < a) - P(X > b)$

Or : $1 - P(X > b) = P(\overline{X > b}) = P(X \leqslant b)$

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X < a)$

b) Comme a est un **entier** : ($X < a$) équivaut à ($X \leqslant a - 1$)

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a - 1)$

66 page 222

L'urne contient n boules : 5 rouges et $n - 5$ noires ($n \geqslant 5$)

Partie A : tirage avec remise

1) a) On peut imaginer un **tableau à double entrée** avec les $n \times n$ boules.

On a n^2 couples. La probabilité de tirer un couple est $\frac{1}{n^2}$.

<table>
<tr><td>boule2
boule1</td><td>1</td><td>2</td><td>...</td><td>5</td><td>6</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>n</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="4" rowspan="4">5×5 couples de boules rouges</td><td colspan="6" rowspan="4">$5\times(n-5)$ couples de boules (R ; N)</td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="4" rowspan="6">$(n-5)\times5$ couples de boules (N ; R)</td><td colspan="6" rowspan="6">$(n-5)\times(n-5)$ couples de boules noires</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>...</td></tr>
<tr><td>n</td></tr>
</table>

b) A : " les deux boules sont de couleurs différentes "

On a : $5\times(n-5)$ couples (R ; N) et $(n-5)\times5$ couples (N ; R), soit : $10(n-5)$ couples de couleurs différentes.

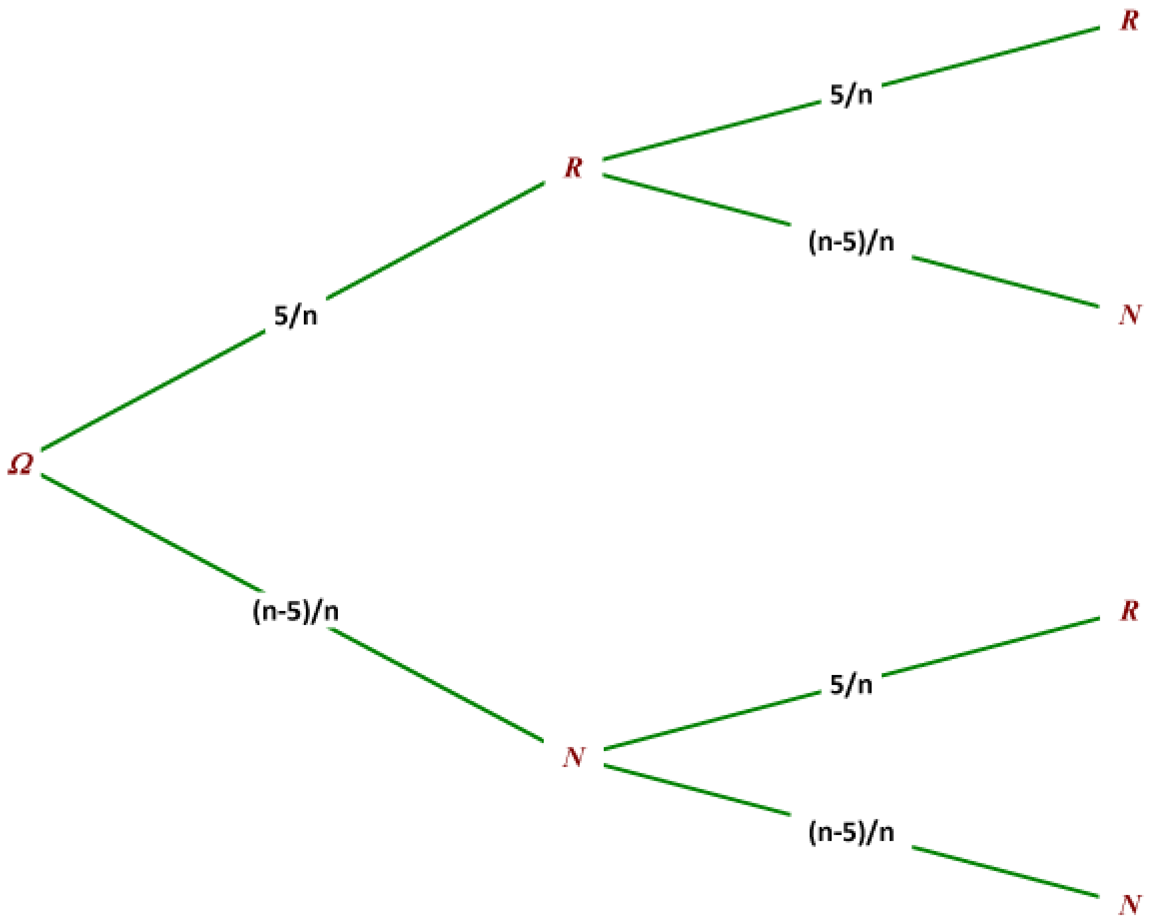
$P_n(A) = \frac{10(n-5)}{n^2}$

Autre méthode : On a : 5^2 couples (R, R) et $(n-5)^2$ couples (N ; N).

Il reste donc : $n^2 - 5^2 - (n-5)^2$ couples de couleurs différentes.

$n^2 - 5^2 - (n-5)^2 = n^2 - 25 - n^2 + 10n - 25 = 10n - 50$

On peut imaginer un arbre :



Pour avoir une rouge à un tirage suivie d'une noire, on a : P(RN) = $\dfrac{5}{n} \times \dfrac{n-5}{n}$

Pour avoir une noire à un tirage suivie d'une rouge, on a : P(NR) = $\dfrac{n-5}{n} \times \dfrac{5}{n}$

En faisant la somme : $P_n(A) = \dfrac{10(n-5)}{n^2}$

2) La fonction f définie sur $[5\ ;+\infty[$ par $f(x) = 10\ \dfrac{x-5}{x^2}$ a pour dérivée :

$$f'(x) = 10\ \frac{1 \times x^2 - 2x(x-5)}{x^4} = 10\ \frac{10-x}{x^3}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $10 - x$ sur $[5\ ;+\infty[$

La fonction admet un maximum quand $x = 10$.

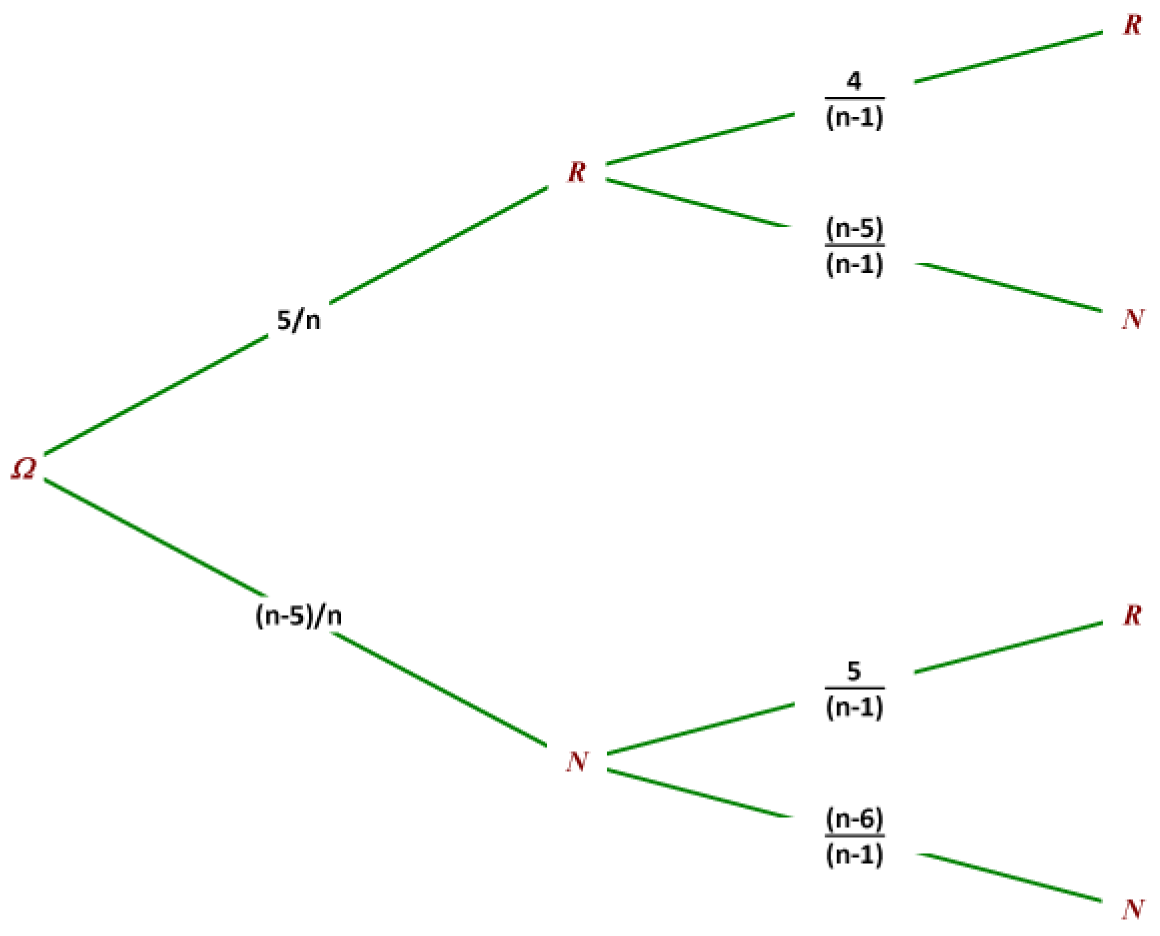
Partie B : tirage sans remise

1) Comme il n'y a pas de remises, dans le tableau du A/1a), on retire les n couples en diagonale, d'où, le nombre d'issues est $n^2 - n$.

2) a) **Un tableau**

Le nombre de couples de couleurs différentes est le même puisque les couples retirés sont des couples (R ; R) ou (N ; N).

ou **un arbre**



b) $P'_n(A) = \dfrac{10(n-5)}{n^2-n}$

3) a) $(X = 2) = A$, d'où, $P(X = 2) = P'_n(A) = \dfrac{10(n-5)}{n^2-n}$

$(X = -1)$ est l'événement contraire, d'où, $P(X = -1) = 1 - \dfrac{10(n-5)}{n^2-n} = \dfrac{n^2-n-10n+50}{n^2-n} = \dfrac{n^2-11n+50}{n^2-n}$

$E(X) = -1\times \dfrac{n^2-11n+50}{n^2-n} + 2\times \dfrac{10(n-5)}{n^2-n} = \dfrac{-n^2+11n-50+20n-100}{n^2-n} = \dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$

b) Le jeu est équitable si et seulement si E(X) = 0.

Un quotient $\frac{\text{Numérateur}}{\text{Dénominateur}}$ **est nul si et seulement si** $\begin{cases} \text{Numérateur} = 0 \\ \text{ET} \\ \text{Dénominateur} \neq 0 \end{cases}$

On résout : $-n^2 + 31\,n - 150 = 0$

$\Delta = 31^2 - 4\times150 = 961 - 600 = 361 = 19^2$

$n = \frac{-31-19}{2\times(-1)} = 25$ ou $n = \frac{-31+19}{2\times(-1)} = 6$ Les deux valeurs étant supérieures à 5 sont donc acceptables.

---

68 page 223 La loi géométrique tronquée

$p \in]0\,;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

X est une variable aléatoire prenant les valeurs de 0 à n.

1) On suppose que X suit la loi de probabilité suivante :

$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $P(X = 0) = (1-p)^n$ (Voir TP3 page 212 et 36 page 217)

On pose $q = 1 - p$.

La loi est bien définie car **<u>la somme des probabilités de toutes les éventualités est égale à 1</u>**

<u>Preuve :</u>

$p \in]0\,;1[$, on pose $q = 1 - p$ et on sait que $P(X=0) = q^n$, $P(X=k) = q^{k-1}\times p$

On a donc : $\sum_{k=0}^{k=n} P(X=k) = P(X=0) + \sum_{k=1}^{k=n} P(X=k) = q^n + \sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1}\times p$

Comme p est une constante (indépendante de k), on peut factoriser p dans la somme, d'où,

$$\sum_{k=0}^{k=n} P(X=k) = q^n + p\times\sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1}$$

On reconnaît la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q

On a donc : $\sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. Or, $p = 1 - q$, d'où : $\sum_{k=1}^{k=n} q^{k-1} = 1 - q^n$.

Finalement : $\sum_{k=0}^{k=n} P(X=k) = q^n + 1 - q^n = 1$

k	0	1	2	…	k	…	n	***Somme***
$P(X = k)$	q^n	p	pq		$p\times q^{k-1}$		$p\times q^{n-1}$	1
$k\times P(X=k)$	0	p	$2pq$		$k\,p\times q^{k-1}$		$n\,p\times q^{n-1}$	E(X)

2) **Calcul de l'espérance.**

Par définition de E(X), on a : $E(X) = \sum_{k=0}^{k=n} k\times P(X=k)$

Ce qui donne en développant et en factorisant la constante p,

$$\mathrm{E(X)} = 0\times q^n + \sum_{k=1}^{k=n} k\times q^{k-1}\times p = p\times \sum_{k=1}^{k=n} k\times q^{k-1} \quad (1)$$

On pose $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

f étant un polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} kx^{k-1}$$

Si $x = q$, on peut écrire d'après (1), $\mathrm{E(X)} = p\times \sum_{k=1}^{k=n} k\times q^{k-1} = p\times f'(q)$.

a) Si $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ est la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x, d'où, $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

b) On a maintenant deux relations algébriques pour la même fonction f.
En dérivant les deux expressions, on obtient donc une nouvelle égalité.
$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ a pour expression dérivée : $f'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$

$f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ a pour expression dérivée : $f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n\times(1-x)-(-1)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

$$= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

En comparant les deux expressions de $f'(x)$, on a donc :

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

Si x est différent de 1, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\times x^{n-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$

c) Comme $E(X) = p\times \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\times q^{k-1}$ et que $p = 1 - q$, on obtient :

$$E(X) = p\times\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(1-q)^2} = p\times\frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{p^2} = \frac{1}{p}\times[nq^{n+1}-(n+1)q^n+1]$$

On peut aussi écrire : $[nq^{n+1}-(n+1)q^n+1] = nq^n\times q-nq^n-q^n+1 = nq^n(q-1)-q^n+1$

$$= -q^n-npq^n+1 = q^n(1+np)+1 = (1+np)(1-p)^n+1$$

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{p}\times[1-(1+np)(1-p)^n]$$

d) On montrera en terminale que : si $0 < q < 1$ alors $n\times q^n$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

L'expression $[nq^{n+1}-(n+1)q^n+1]$ converge donc vers 1 et

E(X) converge vers $\dfrac{1}{p}$.