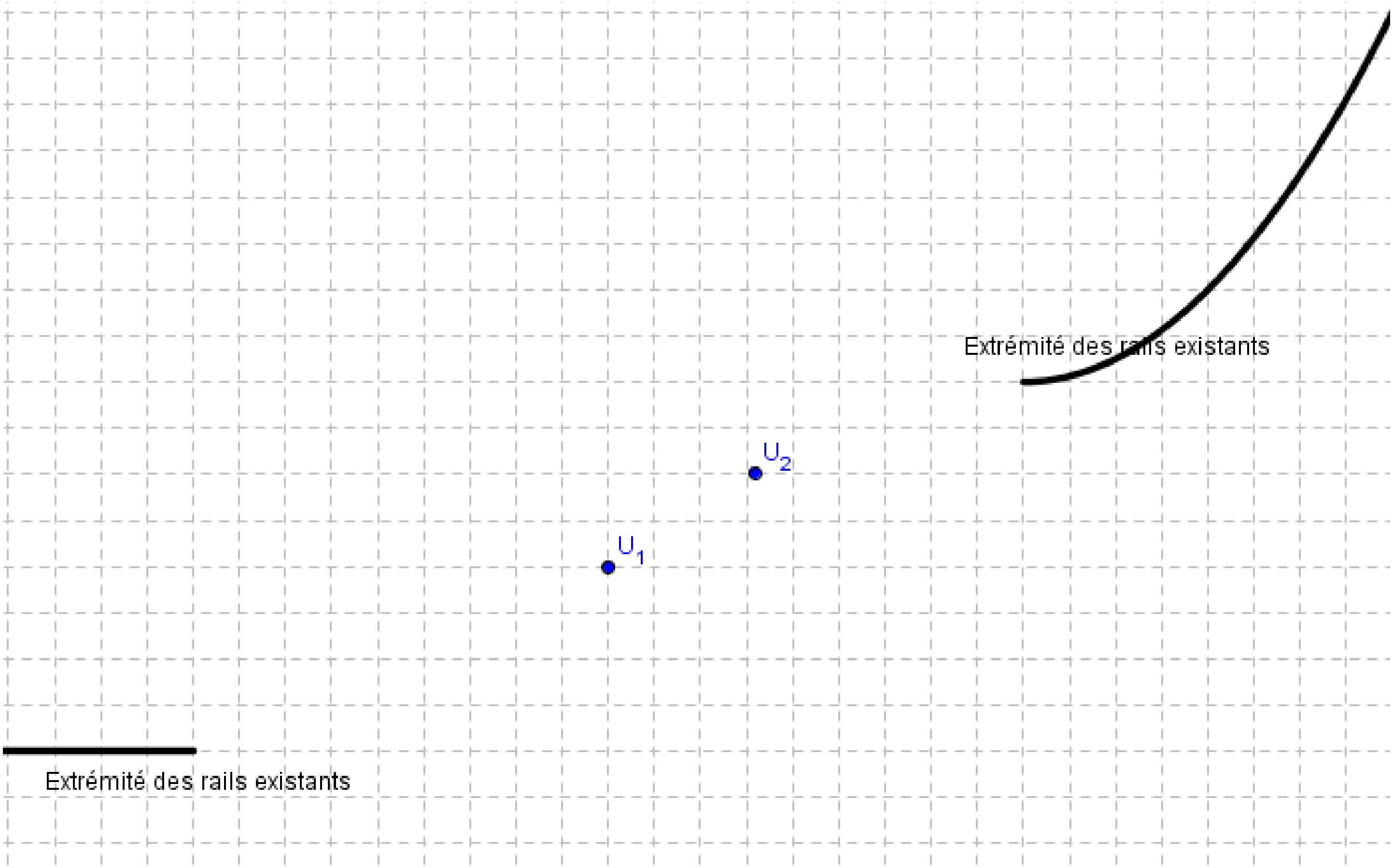
Index

I- Activités

Activité 1: raccorder une voie ferrée (une "bonne" courbe)

Sur le plan ci-dessous sont représentés des rails déjà existants de chemin de fer.



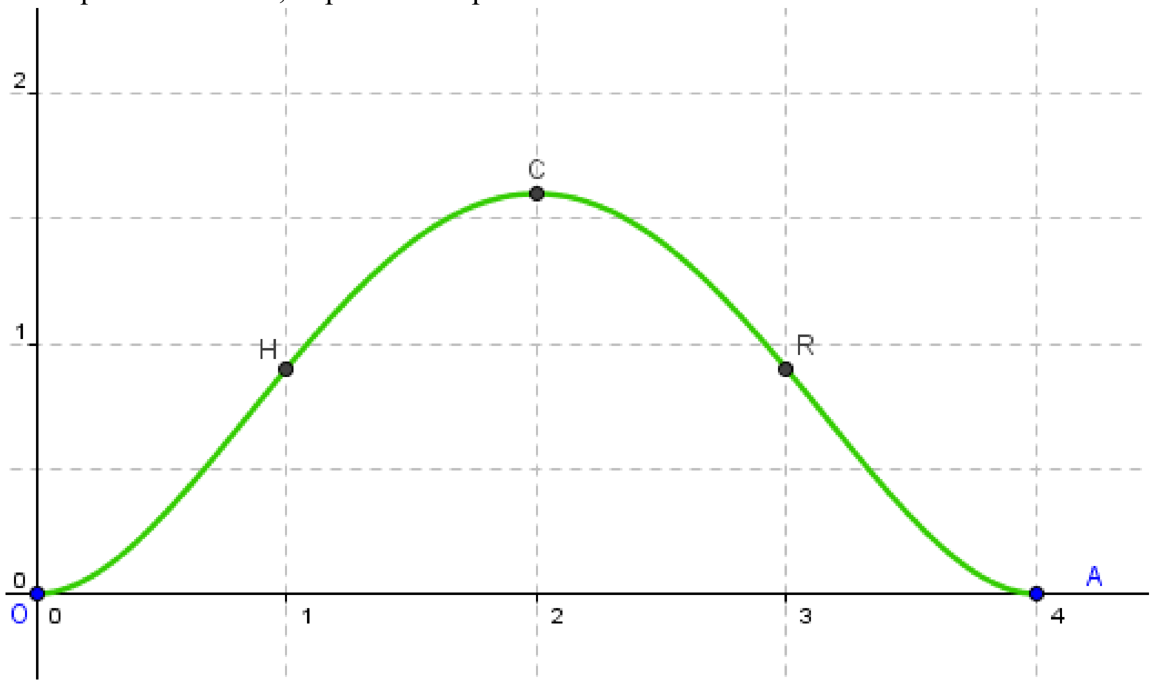
Une société de transports veut relier ces rails pour permettre le passage de wagons.
Le « rail » doit desservir les deux usines U_1 et U_2.
Aidez l'ingénieur à dessiner une courbe possible liant ces rails en précisant comment doivent être les raccords pour que les wagons puissent rouler sans dérailler.

Activité 2 : la piste de ski

La courbe ci-dessous représente le profil d'une piste de ski, partant d'une vallée O, en passant par un col C et arrivant dans la vallée A. En abscisse est indiquée la distance horizontale depuis le point de départ O, en ordonnée l'altitude par rapport à O. L'unité sur chaque axe est l'hectomètre.

Le point H désigne un hameau , le point R un refuge.

Le guide prétend qu'au hameau H, la pente de la piste est de 120%:



Quelle construction peut-on envisager pour vérifier cette valeur ?

Évaluer la pente de la piste au refuge R.

Quelle est la pente de la piste au col C ? au départ O ? à l'arrivée A ?

Activité 3: sécante à une courbe, position limite

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -x^2 + 3$.

On note P sa représentation graphique dans un repère.
1) Construire P (*penser aux fonctions associées* ...) et placer sur P les point A et B d'abscisses respectives 1 et 3.
Calculer le coefficient directeur de la droite (AB).
2) h étant un réel non nul, placer le point M sur P d'abscisse $1 + h$.
Calculer le coefficient directeur m de la droite (AM) en fonction de h.
3) Que devient m quand h tend vers 0? (On dit que la limite de m quand h tend vers 0 est ....)
Tracer la droite correspondante, et, interpréter les résultats.

Activité 4: vitesse moyenne, vitesse instantanée

Un mobile se déplace sur une trajectoire. Un savant calcul à montrer que la distance parcourue sur cette trajectoire s'exprime par la fonction $d(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$ où t est la durée du parcours exprimée en secondes et $d(t)$ la distance exprimée en mètres.

1 a) Calculer d(5) et d(3).

b) Quelle est la vitesse moyenne en ms^{-1} du mobile entre ces deux dates?

2) a) Soit h un réel positif. Calculer en fonction de h la vitesse moyenne $V_m(h)$ en ms^{-1} du mobile entre les dates 3 et $3 + h$.

b) Que devient V_m quand h tend vers 0?

II- Nombre dérivé

Les activités précédentes nous amènent à calculer des quotients de la forme $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ou $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

La suite du cours va préciser les définitions et le rôle de ce quotient.

Rappel des notions essentielles dans ce chapitre :

- fonction numérique (*le procédé d'association de deux nombres, le programme de calculs*)

Exemple : prendre l'inverse, élever au carré, multiplier par 2, ….

- définie **sur** un **intervalle** (*un intervalle est l'ensemble de tous les réels compris entre deux bornes … il se lit en continu sur l'axe des abscisses lors de la représentation graphique (il ne faut pas de " trou "). Une réunion de deux intervalles disjoints n'est pas un intervalle*.) (*Tous les réels de cet intervalle ont une et une seule image par la fonction*).

Exemple : on peut écrire " la fonction inverse est définie sur $]-\infty\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$"

on **ne peut pas** écrire " la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\ ;0[\cup]0\ ;+\infty[$"

- représentation graphique de f (ce n'est pas f, ce n'est pas $f(x)$, c'est un objet géométrique)

Réflexe : Dans un repère, $M(x\ ;y)\in C_f$ si et seulement si $y=f(x)$. $y=f(x)$ est une équation de C_f dans ce repère).

- le coefficient directeur d'une droite ($m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$)

- Comprendre que $y = m(x - x_A) + f(x_A)$ est une équation de la droite passant par le point $A(x_A\ ;f(x_A))$ et de coefficient directeur m.

II-1- Taux de variation d'une fonction ou accroissement moyen

Dans tout ce paragraphe, f est une **fonction** définie sur un **intervalle** I et, a, b sont des réels de I. *(Sinon il n'est pas possible de calculer les images de a et b par f)*

h est un réel non nul tel que $a + h$ est dans l'intervalle I (*car, on doit pouvoir calculer l'image de a + h par f*). C_f est la représentation graphique de f dans un repère.

II-1-1- Définition

Le **taux de variation** de f entre a et b ou **accroissement moyen** de f entre a et b est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

ou, en posant $b = a + h$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple:

Dans l'activité 3, le coefficient directeur de la droite (AB) est : $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = -4$

le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2 - h$.

Dans l'activité 4, la vitesse moyenne entre les dates 3 et 5 est le taux de variation de la fonction d donnant la position du mobile. $V_{\text{moyenne}} = \dfrac{d(5)-d(3)}{5-3} = ….$

La vitesse moyenne entre les dates 3 et 3 + h est $V_m(h) = \dfrac{d(3+h)-d(3)}{h} = 4 + \dfrac{h}{2}$.

II-1-2- Interprétation graphique

En posant $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ (donc A et B sont des points de C_f), le coefficient directeur de la droite (AB) est égale à $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(AB) est une sécante à la courbe C_f.

Exemple:

On prend à nouveau l'activité 3, on a trouvé: $A(1; 2)$ et $B(3; -6)$

Le coefficient directeur de (AB) est: $\dfrac{-6-2}{3-1} = -4$.

Si $M(1+h, f(1+h))$, le coefficient directeur de la droite (AM) est:

$$\frac{-(1+h)^2+3-2}{h} = \ldots = -2-h$$

Dans l'activité 2, la pente en un point de la piste a été définie comme le coefficient directeur d'une droite ...

II-2- Nombre dérivé

Dans ce paragraphe, apparaissent les expressions "tend vers", "de plus en plus proche de ...".

Ces expressions sont prises dans leur sens naturel où on déplace un nombre sur un axe. Lorsque ce nombre se déplace, il se rapproche d'un autre nombre ou il tend vers ...

Dans les activités 3 et 4, le nombre réel h prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

Dans l'activité 3, le point M est mobile sur la courbe P et se rapproche donc du point A.

Quand h tend vers 0, l'ordonnée $f(1+h)$ du point M tend vers l'ordonnée $f(1) = 2$ du point A.

On dit: la limite de $f(1+h)$ quand h tend vers 0 est $f(1)$ et on écrit: $\lim_{h\to 0} f(1+h) = f(1)$

Le taux de variation (coefficient directeur de la droite (AM)) tend vers -2 quand h tend vers 0.

On écrit: $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2$

Dans l'activité 4, on peut imaginer qu'on mesure des durées de plus en plus faibles à partir de la date 3.

La limite de la vitesse moyenne $V_M(h)$ quand h tend vers 0 est 4: $\lim_{h\to 0} V_m(h) = 4$

II-2-1- Définition et notation du nombre dérivé.

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un **nombre** réel l lorsque h tend vers 0, alors la fonction f est **dérivable** en a.

La limite l de ce quotient s'appelle le **nombre dérivé** de f en a.

On le note $f'(a)$

Exemple

Dans l'activité 3, on a trouvé: $f'(1) = -2$

Dans l'activité 4, on a trouvé: $d'(3) = 4$

Pour bien comprendre :

- on calcule un nombre réel qui dépend du point choisi …

- le calcul direct est impossible … on ne pourra jamais évaluer le quotient lorsque $h = 0$ (cf. activité 2)

- on " imagine " (les règles rigoureuses ne concernent pas notre programme) ce qui se passe quand h tend vers 0. (Comportement du nombre … et on admet que lorsque ce comportement tend vers un nombre réel bien défini, ce réel est la limite du quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, et, on le nomme " nombre dérivé de f en a ".

- ce qui veut dire aussi que parfois, il n'y aura pas de nombre dérivé en un point (ou plusieurs)….

soit le " comportement " du quotient nous mène vers " l'infini " (cf. l'étude de la fonction $\sqrt{\ }$ en 0 que l'on fera plus tard).

soit le " comportement " du quotient diffère selon son approche (plusieurs réels) (cf. l'étude de la fonction | | en 0 que l'on fera plus tard).

II-2-2- Interprétation graphique: tangente à la courbe C_f

Définition : La droite T qui passe par le point $A(a, f(a))$ de C_f et qui a pour coefficient directeur le nombre dérivé $f\,'(a)$ est la tangente en A à la courbe C_f.

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de déterminer une équation de tangente pour la construire (cf . construction d'une droite connaissant un point et le coefficient directeur)

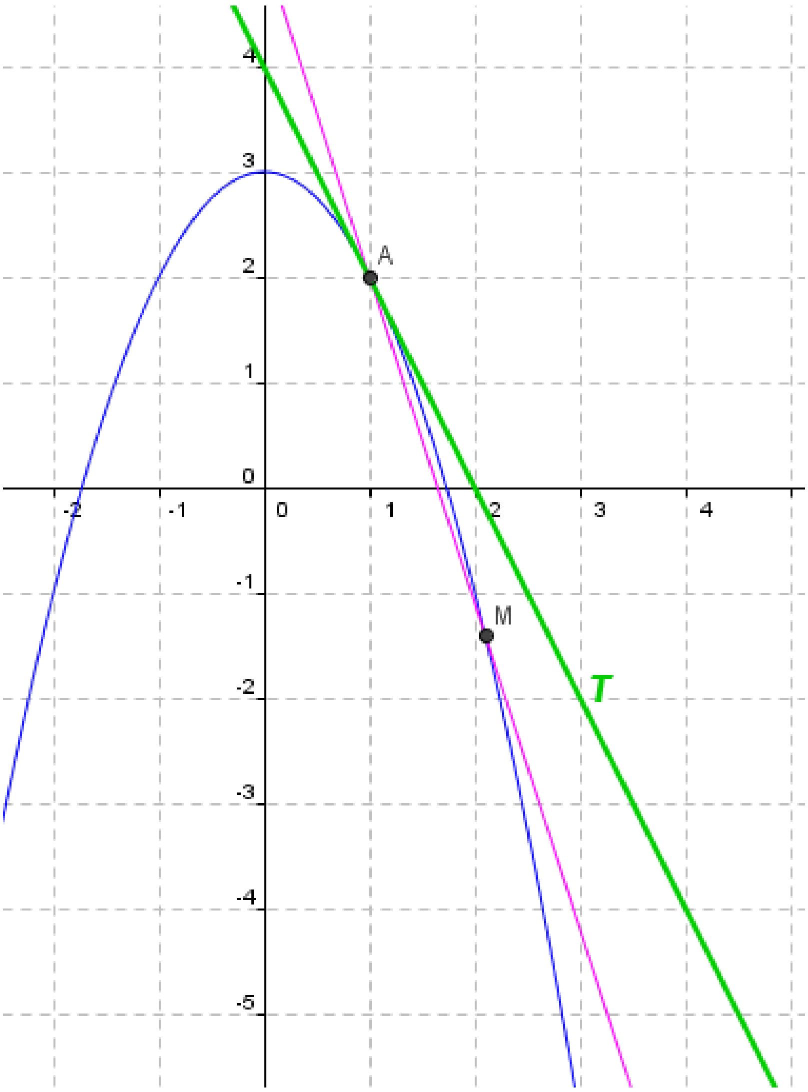
Exemple

Dans l'activité 3, on a trouvé que la droite en position "limite" des sécantes (AM) quand M se rapproche indéfiniment de A est la droite T de coefficient directeur –2 passant par $A(1; 2)$.

Un point quelconque de T a ses coordonnées $(x; y)$ qui vérifient: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y-2}{x-1} = -2$

En développant, il vient: $y = -2(x-1) + 2 = -2x + 4$

L'équation réduite de la tangente T en A à P est: $y = -2x + 4$



Équation réduite d'une tangente et approximation affine de f

Rappel: Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées représente une fonction affine

Tout point M(x; y) appartenant à la droite de coefficient directeur m passant par A(x_A ; y_A) vérifie la relation: $\frac{y-y_A}{x-x_A}$ *= m, d'où, en développant: y =m(x -* x_A *) +* y_A *. (équation réduite)*

La tangente T passant par $(a; f(a))$ a pour coefficient directeur $f'(a)$.

L'équation réduite de T est: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si x est proche de a (Voir activité 2: piste de ski), on peut assimiler la courbe C_f à T.

Autrement dit: pour x suffisamment proche de a, $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$. *(Approximation affine de f en a).*

Géométriquement *:* on imagine qu'un petit morceau de C_f est assimilable à un segment

ce qui veut dire

analytiquement (domaine des fonctions) : on approxime sur un " tout petit intervalle " la fonction à une fonction affine …

III- Fonction dérivée

Dans le §II- l'étude a été faite autour d'un point fixe A de la courbe d'abscisse a appartenant à un intervalle I.

Cette étude peut se faire pour tous les autres points de la courbe.

Dans les "bonnes" conditions (Voir activité 1: raccorder une voie ferrée), la fonction représentée est dérivable pour tout a de l'intervalle I.

Ainsi, à chaque réel a, est associé un autre réel $f'(a)$, ce qui peut se noter: $f' : a \mapsto f'(a)$

III-1- Définition

La fonction f' qui, à tout réel x de l'intervalle I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la **fonction dérivée** (première) de f sur I.

Comprendre : on change de domaine mathématique
Dans le §II- on se place dans le domaine numérique, calculs d'images par une fonction, calculs de coefficient directeur, ….
Dans le §III- on se place dans le domaine des fonctions.
On étudie une nouvelle fonction (qui sera notée f' en mathématiques) qui découle (dérive) d'une fonction f.

Remarque très, très importante (et même plus...):

Il résulte de cette définition que lorsqu'on connaît la fonction dérivée f' de f, le nombre dérivé en a de f est l'image de a par f'.

Comprendre *:*

Dans les activités du §I- et dans le §II- on a appris à calculer le nombre dérivé dans quelques cas simples (polynômes)

La plupart des fonctions seront " hors de notre portée " par la démarche mise en place dans ces activités,

mais, si on sait " démonter " (somme, produit, quotient …) une fonction f en éléments simples (fonctions usuelles, de référence) et appliquer des propriétés démontrées pour ces éléments simples et ces opérations, on saura calculer sa ***fonction dérivée*** *f '.*

Ensuite, il sera simple de calculer l'image de a par f ' pour déterminer le ***nombre dérivé*** *f ' (a).*

III-2- Formules: dérivées des fonctions usuelles (à connaître par cœur)

Certaines formules seront démontrées en exercices ou en activités.

Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Intervalles de dérivabilité**
1) $f: x \mapsto k$ (fonction constante)	$f': x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
2) $f: x \mapsto x$	$f': x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
3) $f: x \mapsto x^2$	$f': x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
4) $f: x \mapsto x^n$ (n entier non nul)	$f': x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
5) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$	$f': x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
6) $f: x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$f': x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
7) $f: x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0 ; +\infty[$	$f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Preuves :

1) ***Une méthode :***

La fonction $x \mapsto k$ est représentée par une droite d parallèle à l'axe des abscisses.

En tout point de d, la droite tangente à d est cette droite d elle-même de coefficient directeur égal à 0.

Autre méthode :

Soit a un réel et h un réel non nul.

On forme le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$

Quand h tend vers 0, ce quotient reste égal à 0.

2) ***Une méthode :***

La fonction $x \mapsto x$ est représentée par une droite d .

En tout point de d, la droite tangente à d est cette droite d elle-même de coefficient directeur égal à 1.

Autre méthode :

Soit a un réel et h un réel non nul.

On forme le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = 1$

Quand h tend vers 0, ce quotient reste égal à 1.

3) ***Une méthode :***

Soit a un réel et h un réel non nul.

On forme le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = ... = 2a + h$

Quand h tend vers 0, ce quotient tend vers $2a$, d'où,

pour tout réel a, $f'(a) = 2a$.

4) À admettre.

5) Soit $a > 0$ et h un réel non nul tel que $a + h > 0$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{h} \times \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Quand h tend vers 0, ce quotient tend vers $\frac{-1}{a^2}$, d'où,

pour tout réel $a > 0, f'(a) = \frac{-1}{a^2}$.

La démonstration est identique lorsque $a < 0$ et h un réel non nul tel que $a + h < 0$.

6) À admettre.

7) Soit $a \geqslant 0$ et h un réel non nul tel que $a + h > 0$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

Si $a = 0$, le quotient ne tend pas vers un réel (voir TP fait en classe)

Si $a \neq 0$, quand h tend vers 0, ce quotient tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$, d'où,

pour tout réel $a > 0, f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

III-3: Formules: Dérivées et opérations sur les fonctions (à connaître par cœur).

Certaines formules seront démontrées en exercices ou en activités.

Dans ce tableau, u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opérations sur les fonctions	fonction dérivée	Intervalles de dérivabilité
Somme: $f = u + v$	$f' = u' + v'$	I
Produit: $f = ku$ (k constante) $f = uv$ $f = u^2$	$f' = ku'$ $f' = u'v + v'u$ $f' = 2u'u$	I I I
Quotient: $f = \frac{1}{v}$ $f = \frac{u}{v}$	$f' = -\frac{v'}{v^2}$ $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	dérivable sur l'intervalle I où $v(x) \neq 0$.

Exemples et méthode:

Point méthode:

* on analyse la fonction f: est-ce la somme de ..., le produit de ..., le quotient de ...,

** on repère la formule à appliquer et son domaine de validité.

*** on écrit chaque élément: $u(x)$, $u'(x)$, ...

**** on applique la formule.

1) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5$ définie sur ℝ.

f est la **somme** des fonctions u: $x \mapsto x^3$; v: $x \mapsto 4x^2$; w: $x \mapsto 5$ ($f = u + v + w$)

Dérivée de u: (D'après le tableau des dérivées des fonctions usuelles) $u' : x \mapsto 3x^2$

Dérivée de v: v est le produit de la fonction carré par une constante 4, d'où, $v' : x \mapsto 4 \times 2x = 8x$

Dérivée de w: w est une fonction constante donc $w' = 0$
Finalement: Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 8x$

2) $g : x \mapsto (x^2 + 1) \times \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

g est le **produit** des fonctions $u : x \mapsto x^2 + 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0; +\infty[$

On étudie donc la dérivée de g sur $]0; +\infty[$
La dérivée de u est: $u' : x \mapsto 2x$

La dérivée de v est: $v' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$u(x) = x^2$ $u'(x) = 2x$ $v(x) = \sqrt{x}$ $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Pour $x > 0$, $g'(x) = (uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = 2x \times \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 + 1)$

(inutile ici (car, le signe de l'expression est connu), mais pour l'entraînement aux calculs, on peut mettre au même dénominateur : $g'(x) = \dfrac{2x \times 2x + (x^2+1)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$)

3) h est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par h: $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

h est le quotient de u: $x \mapsto 2x + 1$ et v: $x \mapsto x^2 - 1$

u et v sont dérivables sur ℝ et $v(x) \neq 0$ pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
h est donc dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$; $]1; +\infty[$
La dérivée de u est: $u' : x \mapsto 2$

La dérivée de v est: $v' : x \mapsto 2x$

$u(x) = 2x + 1$ $u'(x) = 2$ $v(x) = x^2 - 1$ $v'(x) = 2x$

Finalement, pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$, $h'(x) = \left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{(v(x))^2}$

$$= \frac{2 \times (x^2-1) - 2x \times (2x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2-1)^2}$$

Important : Ne pas développer le dénominateur ... c'est une perte d'informations

III-4 Dérivées des fonctions affines, des fonctions polynômes et des fonctions homographiques

D'après ce qui précède, la dérivée de ces fonctions se calcule immédiatement:

	Fonctions	**Fonctions dérivées**
Fonction affine	$x \mapsto ax + b$	$x \mapsto a$
Polynôme du second degré	$x \mapsto ax^2 + bx + c$	$x \mapsto 2ax + b$

Polynôme de degré n	$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$x \mapsto n\, a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$
Fonction homographique $x \neq -\frac{d}{c}$ et $ad - bc \neq 0$	$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$	$x \mapsto \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Exemples:

1) Soit le polynôme f défini par $f(x) = 5\ x^6 + 4\ x^5 - 8\ x^4 + x^3 - 7x^2 + 10x + 9$ a pour dérivée le polynôme:

$f'(x) = 5\times6\ x^5 + 4\times4\ x^4 - 8\times4\ x^3 + 3x^2 - 7\times2x + 10\times1 = 30\ x^5 + 16\ x^4 - 32\ x^3 + 3x^2 - 14x + 10.$

2) Soit g la fonction $x \mapsto \frac{2x+3}{5x-4}$ définie sur $]-\infty\ ;\ \frac{4}{5}[\cup]\frac{4}{5}\ ;+\infty[$

Pour tout $x \neq \frac{4}{5}$, $g'(x) = \frac{2(5x-4)-5(2x+3)}{(5x-4)^2} = \frac{2\times(-4)-3\times5}{(5x-4)^2} = \frac{-23}{(5x-4)^2}$

IV- Applications de la dérivée

IV-1- Dérivée et sens de variation.

IV-1-1- Observation

1) f est une fonction définie et strictement monotone sur un intervalle I.

a et b sont deux réels de I, ou encore, en posant $b = a + h$, a et $a + h$ sont deux réels de I.

	f est strictement croissante		f est strictement décroissante	
Soit	$a < b$	$a > b$	$a < b$	$a > b$
donc	$f(a) < f(b)$	$f(a) > f(b)$	$f(a) > f(b)$	$f(a) < f(b)$
c'est-à-dire :	$b - a > 0$ et $f(b) - f(a) > 0$	$b - a < 0$ et $f(b) - f(a) < 0$	$b - a > 0$ et $f(b) - f(a) < 0$	$b - a < 0$ et $f(b) - f(a) > 0$
conclusion :	le quotient : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ ou encore $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$		le quotient : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$ ou encore $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$	
	le taux d'accroissement est strictement positif		le taux d'accroissement est strictement négatif	

2) L'observation des résultats des activités 2 (piste de ski) et 3 (tangente à une courbe) mène au constat suivant:
Lorsque la tangente en un point à C_f a un coefficient directeur positif, la fonction f est croissante sur un voisinage de ce point et

lorsque la tangente en un point à C_f a un coefficient directeur négatif, la fonction f est décroissante sur un voisinage de ce point

IV-1-2- Théorème fondamental

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf pour un nombre fini de valeurs de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf pour un nombre fini de valeurs de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Si la dérivée f' est nulle pour **toute valeur** de I alors la fonction f est constante sur I.

Réciproque

Lorsque la fonction f est une fonction dérivable sur I

La réciproque du théorème est vrai:

Si la fonction f est croissante sur I alors sa dérivée $f\,'$ est positive sur I
Si la fonction f est décroissante sur I alors sa dérivée $f\,'$ est négative sur I
Si la fonction f est constante sur I alors sa dérivée $f\,'$ est nulle pour toute valeur de I

IV-1-3- Extremum

Soit f dérivable sur un intervalle I.

Si sur cet intervalle I, la dérivée s'annule en une seule valeur x_0 en changeant de signe alors la fonction f admet un extremum local en x_0 sur I.

Deux cas :

x	a		x_0		b
$f\,'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	$f(a)$	$\searrow$	min_{local}	$\nearrow$	$f(b)$

x	a		x_0		b
$f\,'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	$f(a)$	$\nearrow$	Max_{local}	$\searrow$	$f(b)$

IV-1-4- Exemples et méthode

Point méthode:

Pour étudier la variation d'une fonction f, on peut lorsque la fonction f est dérivable

* calculer la dérivée de f

** **étudier** le signe de la dérivée

*** appliquer le théorème précédent.

On résume cette étude la plupart du temps dans un tableau de variations où apparaît une ligne pour indiquer le signe de la dérivée.

Les exemples sont ceux du paragraphe III-3

1) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5$ définie sur ℝ.

On a trouvé: Pour tout x réel, $f\,'(x) = 3x^2 + 8x$
Étude du signe de $f\,'(x)$:
$3x^2 + 8x = x(3x + 8)$

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$+\infty$
signe de x		–		–	0	+	
signe de 3x + 8		–	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

Puisque $f\,'(x)$ est positif sur les intervalles $]-\infty; -\frac{8}{3}]$ et $[0; +\infty[$, la fonction f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -\frac{8}{3}]$ et $[0; +\infty[$

Puisque $f\,'(x)$ est négatif sur l'intervalle $[-\frac{8}{3}; 0]$, la fonction f est décroissante sur $[-\frac{8}{3}; 0]$.

Tableau de variations de f:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{8}{3}\right)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

2) $g : x \mapsto (x^2 + 1)\times\sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

On a trouvé: Pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$

Étude du signe de $g'(x)$:
Il est évident que $g'(x)$ est strictement positif, la fonction g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$

3) h est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par $h: x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

On a trouvé: $h'(x) = \dfrac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$

Étude du signe de $h'(x)$:
Le dénominateur étant un carré, le signe de $h'(x)$ est **celui** du numérateur $N(x) = -2x^2 - 2x - 2$
On reconnaît un polynôme du second degré:
son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times(-2)\times(-2) = -28$ est strictement négatif.
Par conséquent, $N(x)$ est toujours du signe du coefficient -2 de x^2, soit: $N(x) < 0$
Comme $h'(x) < 0$, la fonction h est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$; $]-1; 1[$; $]1; +\infty[$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$h(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

IV-2- Tangente à une courbe représentative de fonctions

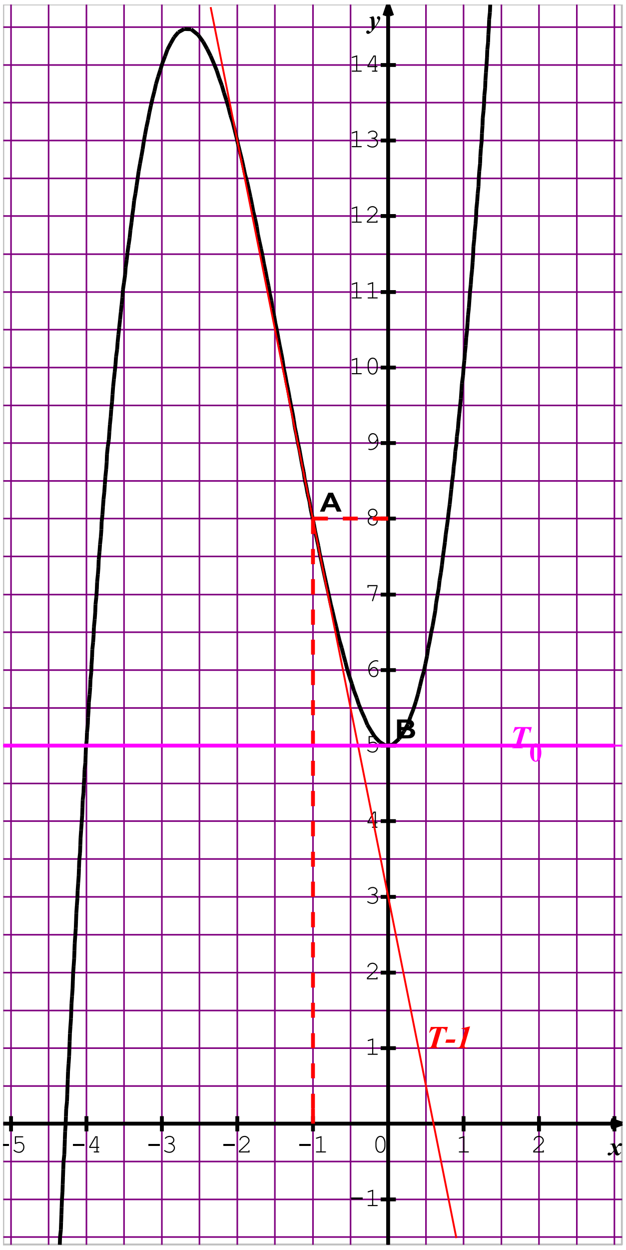
Au §II-2-2, nous avons vu que le nombre dérivé en a était le coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique de la fonction au point d'abscisse a.

En reprenant les exemples du § III-3-

1) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer et tracer les tangentes T_{-1} et T_0 à C_f aux points d'abscisses -1 et 0.

On a trouvé: Pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 8x$
On a donc:
Le point de tangence de C_f et T_{-1} est $A(-1; f(-1))$, soit $A(-1; 8)$ et
le coefficient directeur de T_{-1} est: $f'(-1) = 3 - 8 = -5$.
Le point de tangence de C_f et T_0 est $B(0; f(0))$, soit $B(0; 5)$ et
le coefficient directeur de T_0 est: $f'(0) = 0$;

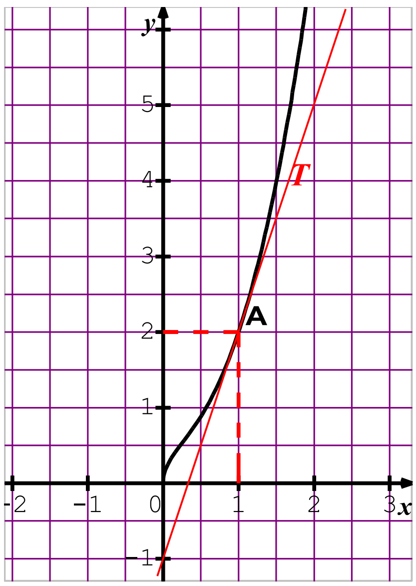


2) $g : x \mapsto (x^2 + 1)\times \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$

Construire la tangente T à C_g au point d'abscisse 1.

On a trouvé: Pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$

La tangente T est tangente au point A(1; g(1)), soit A(1; 2) et son coefficient directeur est $g'(1) = 3$



3) h est la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ par $h: x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2-1}$.

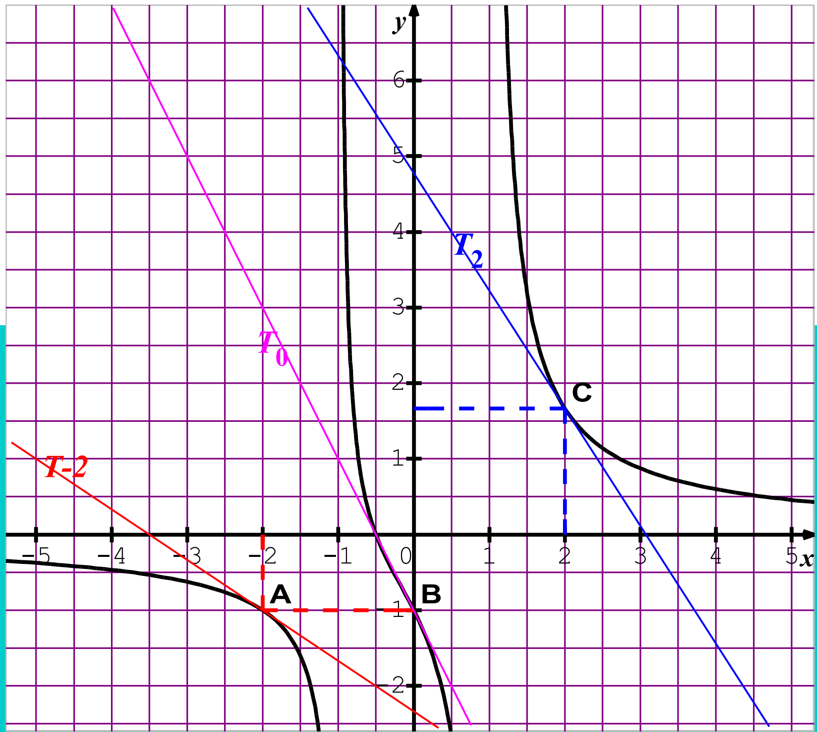
Construire les tangentes T_{-2}, T_0 et T_2 à C_h aux points d'abscisses –2; 0 et 2.

On a trouvé: $h'(x) = \dfrac{-2x^2-2x-2}{(x^2-1)^2}$

T_{-2} est tangente au point $A(-2; h(-2))$, soit $A(-2; -1)$ et son coefficient directeur est: $h'(-2) = \dfrac{-6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

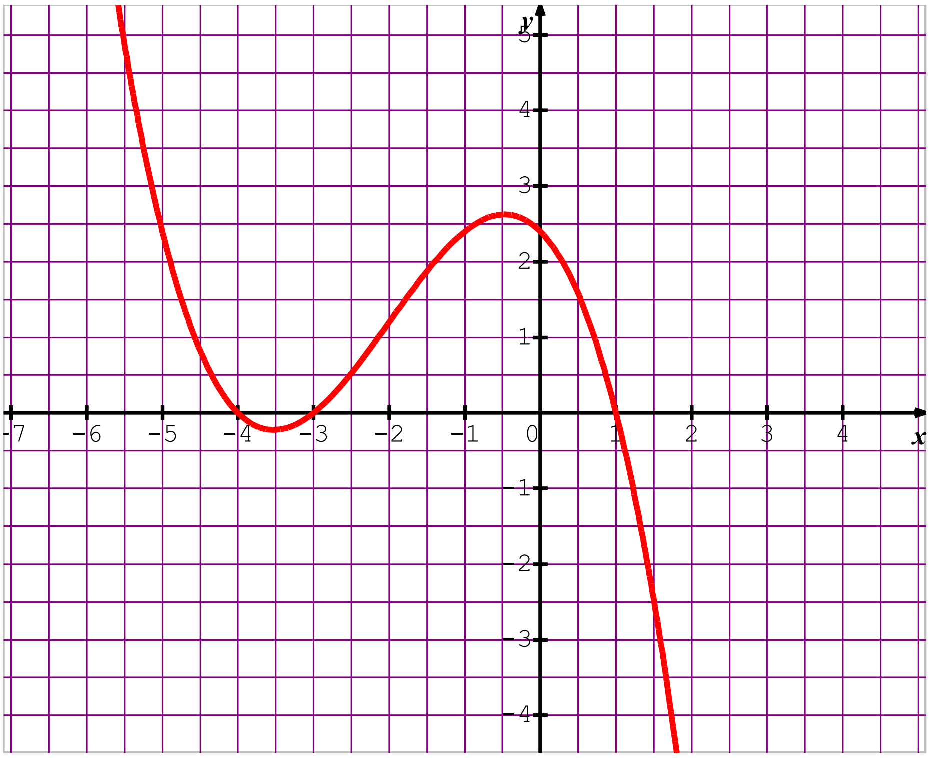
T_0 est tangente au point $B(0; h(0))$, soit $A(0; -1)$ et son coefficient directeur est: $h'(0) = -2$.

T_2 est tangente au point $C(2; h(2))$, soit $C(2; \dfrac{5}{3})$ et son coefficient directeur est: $h'(2) = \dfrac{-14}{9}$.



Lecture graphique

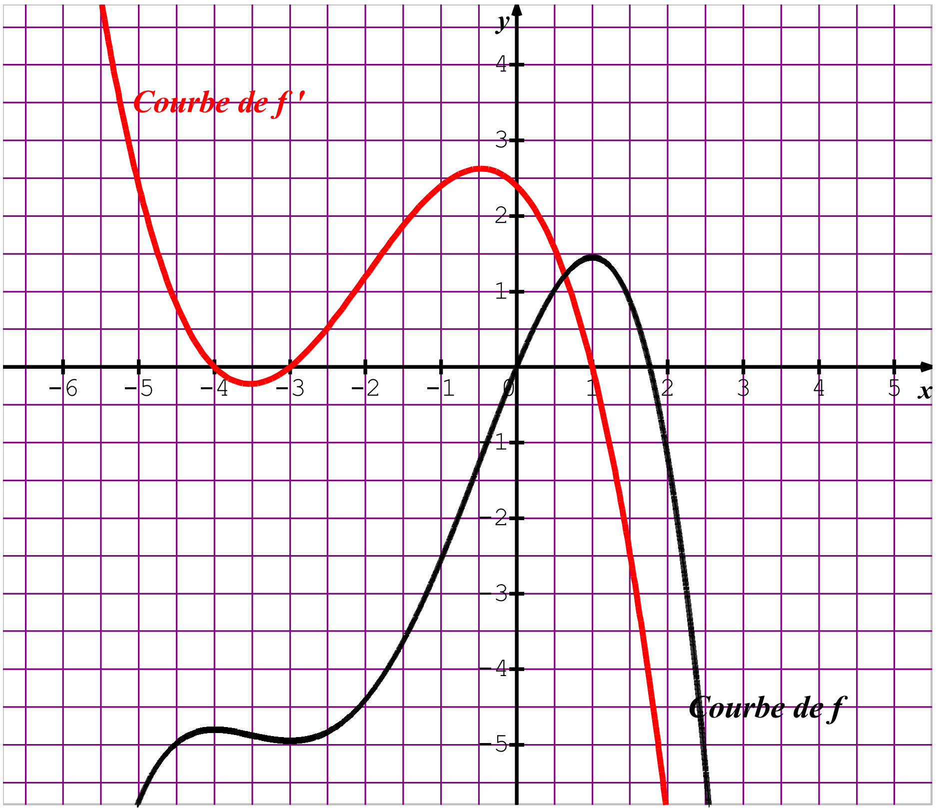
Voici la courbe de la fonction dérivée f' d'une fonction f.



Construire le tableau de variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		-4		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

Une courbe de *f* possible


Courbe de f '
Courbe de f
y
x
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5