

Index

Prérequis :	1
Remarques :	2
I- Fonction polynôme du second degré ou trinôme du second degré	2
I-1- Définitions	2
I-2- Exemples	2
Remarques:	2
I-3- Forme canonique	2
I-3-1 Sur un exemple :	2
I-3-2- Cas général	2
II- Variations et représentation graphique d'une fonction du second degré	3
II-1- Rappel : fonction carré	3
II-2- Tableau de variations	3
II-3- Représentation graphique	3
Remarque :	3
III- Applications et bilan	3
III-1- Cas $a > 0$ et $\beta > 0$	3
III-2- Cas $a > 0$ et $\beta < 0$	3
exemple :	3
Remarques :	3
IV- Discriminant et calcul des racines	3
IV-1- Définitions	3
Remarques :	4
IV-2- Formules	4
IV-3- Signe du trinôme	4
V- Algorithmes	4
V-1- Centre d'un intervalle	4
V-2- Tout sur le second degré	4
V-2-1	4
V-2-2-	4
V-2-3	5
V-2-4	5
V-2-5	5
VI- Les démonstrations à connaître	5
VI-1- Forme canonique	5
VI-2- Démonstration des variations	5
VI-2-1- Fonction carré	5
VI-2-2- Trinôme du second degré	6
Un peu de réflexion avant de se lancer dans des calculs :	6
VI-3 Factorisation et racines	6
VI-3-1- Supposons $a > 0$ et $\beta > 0$	6
Raisonnement par l'absurde :	7
VI-3-2- Supposons $a > 0$ et $\beta < 0$	7
Autres cas	7
En résumé avec les tableaux de variations	7
VII- Bilan graphique	9

Prérequis :

- Connaître la fonction carré

- Savoir développer
- Savoir factoriser (Notamment : utiliser les identités remarquables)
- Savoir utiliser les relations d'ordre

Remarques :

Les démonstrations faites en exercices et en travaux dirigés font partie du cours.

I- Fonction polynôme du second degré ou trinôme du second degré**I-1- Définitions**

Une fonction polynôme du second degré est une fonction définie sur \mathbb{R} qui peut s'écrire sous la forme

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ où } a \text{ est un réel non nul et, } b \text{ et } c \text{ deux réels.}$$

Les réels a , b et c sont les **coefficients** du trinôme.

I-2- Exemples

Indiquer parmi les fonctions suivantes celles qui sont du second degré et donner les coefficients a , b et c .

$$x \mapsto -x^2 + 3x - 4$$

$$t \mapsto 2t - 3t^2 + 5$$

$$x \mapsto x + 5(x - 4)$$

$$x \mapsto (x + 5)(x - 4)$$

$$u \mapsto 4u^2 - \frac{5}{u} + 1$$

$$x \mapsto 2x^2 + \sqrt{x}$$

$$x \mapsto 3 - 2x^2$$

$$x \mapsto t^2x + 2t - x$$

$$t \mapsto t^2x + 2t - x$$

Remarques:

Pour appliquer les propriétés du cours qui va suivre, il est important d'ordonner le trinôme selon les puissances décroissantes.

Dans la suite du cours, a est un réel non nul.

I-3- Forme canonique

Objectif :

découvrir une méthode : méthode d'identification des coefficients.

I-3-1 Sur un exemple :

En seconde on a vu la forme canonique du second degré... Rappel :

Déterminer les coefficients α et β tels que $2x^2 + 6x + 8 = 2(x - \alpha)^2 + \beta$.

On trouve $\alpha = \dots$ et $\beta = \dots$

I-3-2- Cas général

Montrer qu'on peut trouver des réels α et β tels que $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ en exprimant α et β en fonction de a , b et c .

On trouve $\alpha = \dots$ $\beta = \dots$

Remarque importante :

ne pas chercher à retenir par cœur ces deux relations mais comprendre comment on les a trouvées.

La forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** du trinôme.

II- Variations et représentation graphique d'une fonction du second degré.

II-1- Rappel : fonction carré

Dresser les tableaux de variations des deux fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -x^2$

II-2- Tableau de variations

Déduire du II-1, les tableaux de variations des fonctions $x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ lorsque $a > 0$

$$x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ lorsque } a < 0$$

II-3- Représentation graphique

Dans un repère, la représentation graphique de $x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une parabole d'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ et de sommet $\Omega(\alpha; \beta)$

Si le repère est orthogonal, la parabole admet la droite d'équation $x = \alpha$ pour axe de symétrie.

Remarque :

Tous les résultats à suivre se retiennent en faisant le lien avec le graphique.

III- Applications et bilan

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$

III-1- Cas $a > 0$ et $\beta > 0$

Justifier que dans le cas où $a > 0$ et $\beta > 0$ l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution.

En déduire que l'on ne peut pas factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$ par un **raisonnement par l'absurde**.

Donner le signe de l'expression $ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.

III-2- Cas $a > 0$ et $\beta < 0$

Justifier que dans le cas où $a > 0$ et $\beta < 0$ l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes.

Montrer que l'on peut factoriser l'expression $ax^2 + bx + c$

Donner le signe de l'expression $ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.

exemple :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ et on sait que : $a = 2, f(-5) = 0, f(1) = 0$

- calculer α
- donner la forme factorisée
- donner la forme canonique
- donner la forme développée

Remarques :

Les cas $a < 0$ et $\beta < 0, a < 0$ et $\beta > 0$ s'étudient de la même façon.

IV- Discriminant et calcul des racines

IV-1- Définitions

On a vu au I-3- que $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

On peut donc écrire : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (Ne pas apprendre par cœur).

On appelle **discriminant** le nombre, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

On peut donc écrire : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (Ne pas apprendre par cœur).

On appelle **racines du polynôme** les valeurs qui annulent le polynôme ou encore

les racines du polynôme sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Remarques :

* Lorsque $a > 0$, β (extremum de la fonction ou ordonnée du sommet) et Δ sont de signes opposés.

Lorsque $a < 0$, β (extremum de la fonction ou ordonnée du sommet) et Δ ont les mêmes signes.

** On a vu au III-1- que certains polynômes n'ont pas de racines réelles.

*** α (abscisse du sommet) est le milieu des racines x_1 et x_2 lorsqu'elles existent. $\left(\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}\right)$

IV-2- Formules

Si $\Delta < 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racines réelles.

si $\Delta = 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ a une racine double égale à $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

IV-3- Signe du trinôme

Si $\Delta < 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ est du signe du coefficient a pour tout x réel.

Si $\Delta = 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Il est du signe du coefficient a pour tout x différent de α .

Si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ s'annule en x_1 et x_2 . Il est du signe du coefficient a pour les valeurs de x prises à l'extérieur des racines, du signe opposé au signe de a pour les valeurs de x prises entre les racines.

V- Algorithmes

Construire des algorithmes tels que

V-1- Centre d'un intervalle

On connaît les racines x_1 et x_2 d'un trinôme

Trouver α abscisse du sommet

V-2- Tout sur le second degré.

On connaît a, b, c coefficients du trinôme.

V-2-1 calcul du discriminant ...

Calculer Δ .

L'algorithme doit avoir une instruction permettant de dire : " ce n'est pas un trinôme du second degré " lorsque $a = 0$

V-2-2- ... et afficher la forme canonique ...

Compléter l'algorithme pour obtenir la forme canonique.

V-2-3 ... et les racines ...

Compléter l'algorithme pour calculer les racines éventuelles.

V-2-4 ... et la factorisation ...

Compléter l'algorithme pour écrire la factorisation

V-2-5 ... et le signe du trinôme

Compléter l'algorithme pour donner le signe du trinôme

VI- Les démonstrations à connaître**VI-1- Forme canonique**

Une méthode :

Soit $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

$$\text{Or, } x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (\text{Penser au développement d'une somme au carré})$$

$$\text{d'où, } ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

En mettant la dernière somme au m^em dénominateur et en factorisant -1 ,

$$\text{il vient : } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Une autre méthode : (identification des coefficients)

Soit $a \neq 0$.

Pour **tout** x réel, on cherche à établir l'égalité $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

En développant le second membre, on a :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta.$$

$$\text{Par identification des coefficients : } \begin{cases} \text{coefficient de degré 2} & : a = a \\ \text{coefficient de degré 1} & : b = -2a\alpha \\ \text{coefficient de degré 0} & : c = a\alpha^2 + \beta \end{cases}$$

$$\text{On en tire : } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = c - a\alpha^2 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

VI-2- Démonstration des variations ...**VI-2-1- Fonction carré**

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 < x_2$.

On cherche alors à classer x_1^2 et x_2^2 , pour cela, on cherche le signe de la différence $x_2^2 - x_1^2$

Comme $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ et que $x_2 - x_1 > 0$, le signe de $x_2^2 - x_1^2$ est celui de $x_2 + x_1$.

Deux cas :

*** Si $0 \leq x_1 < x_2$, alors la somme $x_2 + x_1$ est strictement positive

Par conséquent : $x_2^2 - x_1^2$ est positif et $x_1^2 \leq x_2^2$.

On a montré :

Si $0 \leq x_1 < x_2$ alors $x_1^2 \leq x_2^2$,

ce qui prouve que la fonction carré est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

*** Si $x_1 < x_2 \leq 0$ alors la somme $x_2 + x_1$ est strictement négative

Par conséquent : $x_2^2 - x_1^2$ est négatif et $x_1^2 \geq x_2^2$.

On a montré :

Si $x_1 < x_2 \leq 0$ alors $x_1^2 \geq x_2^2$,

ce qui prouve que la fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$

VI-2-2- Trinôme du second degré.

Un peu de réflexion avant de se lancer dans des calculs :

L'intérêt de la forme canonique est que la variable x n'apparaît qu'une seule fois et que l'on peut faire le "montage" de fonctions suivant :

$$x \mapsto x - \alpha \mapsto (x - \alpha)^2 \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$$

La première fonction est une fonction affine strictement croissante.

La deuxième fonction est la fonction carré que l'on vient d'étudier.

la troisième fonction est une fonction affine de coefficient a . Ses variations dépendent du signe de a (voir cours de seconde).

Lorsqu'on applique la fonction carré au nombre $x - \alpha$, on doit savoir le signe de ce nombre $x - \alpha$.

D'où, les deux intervalles d'étude :

Sur $] -\infty ; \alpha]$, on a : $x - \alpha \leq 0$ et la fonction carré inverse l'ordre.

Sur $[\alpha ; +\infty[$, on a : $x - \alpha \geq 0$ et la fonction conserve l'ordre.

Tout est prêt pour rédiger une démonstration :

cas $a > 0$		cas $a < 0$
$\alpha \leq x_1 < x_2$	la fonction $x \mapsto x - \alpha$ étant strictement croissante sur \mathbb{R} , on obtient :	$\alpha \leq x_1 < x_2$
$0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$	La fonction carré étant strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, on obtient :	$0 \leq x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$
$0 \leq (x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2$	Suivant le signe de a , la variation de la fonction affine : $x \mapsto ax + \beta$ sont croissante lorsque $a > 0$ décroissante lorsque $a < 0$	$0 \leq (x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2$
$\beta \leq a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$		$\beta \geq a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$
La fonction est strictement croissante sur $[\alpha ; +\infty[$		La fonction est strictement décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$

Étude analogue avec $x_1 < x_2 \leq \alpha$

VI-3 Factorisation et racines**VI-3-1- Supposons $a > 0$ et $\beta > 0$.**

On sait : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

La somme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est donc strictement positive pour tout x réel (le **minimum** $\beta > 0$).

Conclusion : Pour tout x réel, $ax^2 + bx + c > 0$

Raisonnement par l'absurde :

Faisons l'hypothèse : le trinôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable en produits de deux facteurs du premier degré, c'est-à-dire :

il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Dans cette hypothèse lorsque $x = x_1$ ou $x = x_2$, le polynôme s'annule puisque l'un des facteurs est nul.

Ceci est en contradiction avec la conclusion : Pour tout x réel, $ax^2 + bx + c > 0$.

On ne peut pas faire l'hypothèse : le trinôme $ax^2 + bx + c$ est factorisable

VI-3-2- Supposons $a > 0$ et $\beta < 0$.

β est un minimum et est strictement négatif.

La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses x_1 et x_2 .

On sait aussi que $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$

On sait : $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

et il existe donc un réel δ positif tel que $\Delta = \delta^2$ ($\delta = \sqrt{\Delta}$; lorsque $\Delta < 0$, on ne peut pas écrire $\sqrt{\dots}$)

$ax^2 + bx + c = a\left[(x - \alpha)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left[(x - \alpha - \frac{\delta}{2a})(x - \alpha + \frac{\delta}{2a})\right] = a(x - x_1)(x - x_2)$

Autres cas

Les cas $a < 0$ et $\beta < 0$ et $a < 0$ et $\beta > 0$ sont analogues

$a < 0$

Le **maximum** $\beta < 0$, le trinôme ne s'annule pas.

Le **maximum** $\beta > 0$, le trinôme s'annule en deux valeurs.

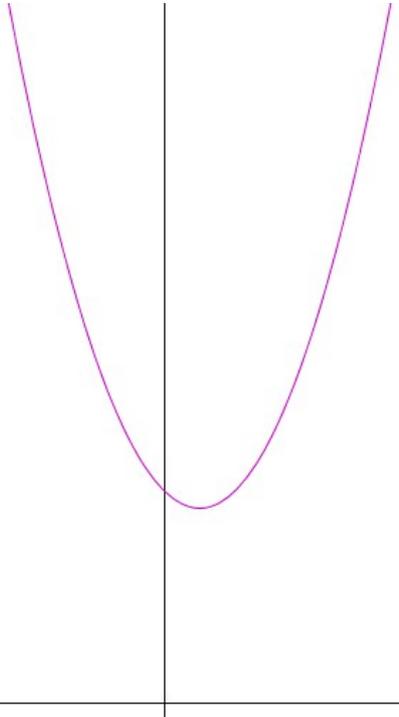
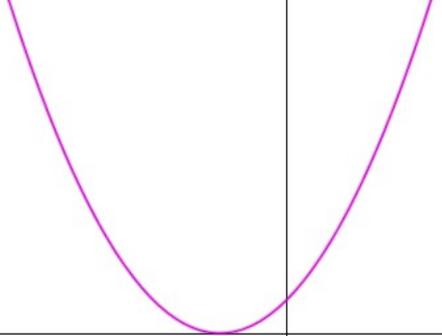
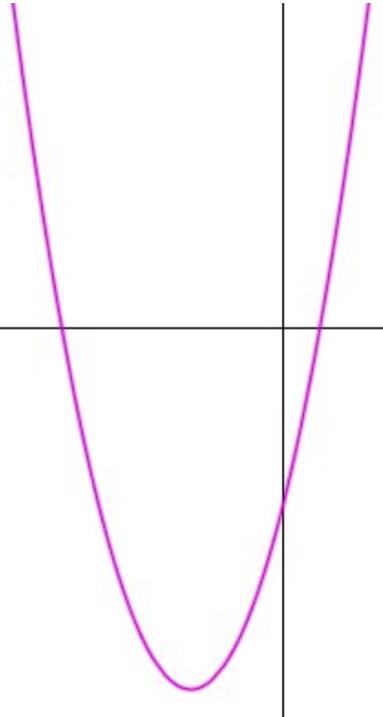
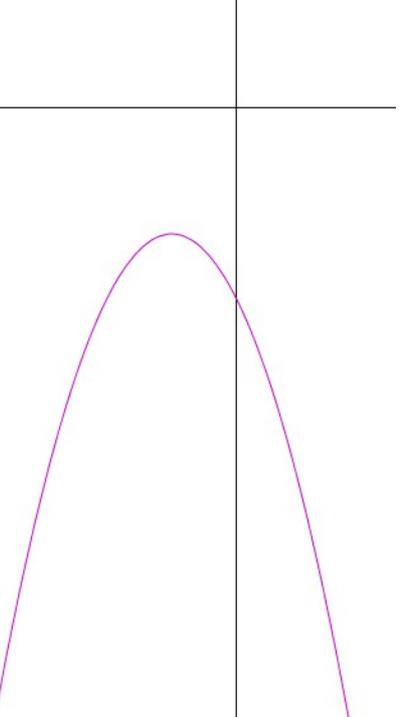
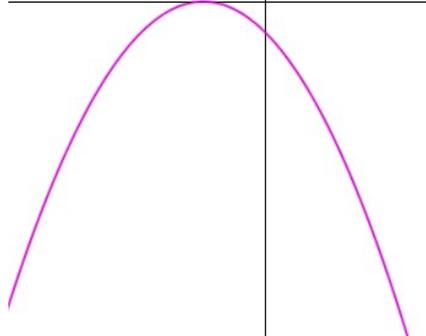
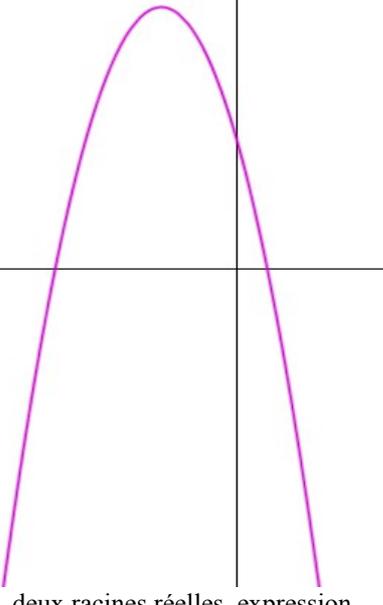
En résumé avec les tableaux de variations

$a > 0$ et $\beta > 0$			$a > 0$ et $\beta < 0$					
x	$-\infty$	α	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$	0	β	0	$+\infty$	
<i>signe</i>			+	+	0	-	0	+

$a < 0$ et $\beta < 0$			$a < 0$ et $\beta > 0$				
x	$-\infty$	α	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$	0	β	0	$-\infty$
<i>signe</i>				-	+	-	

Ce qui permet aussi de déterminer le signe du trinôme :

VII- Bilan graphique

<p>$a > 0$ et $\Delta < 0$</p>  <p>aucune racine réelle, expression positive</p>	<p>$a > 0$ et $\Delta = 0$</p>  <p>une racine double, expression factorisable (cf. identité remarquable), expression positive ou nulle</p>	<p>$a > 0$ et $\Delta > 0$</p>  <p>deux racines réelles, expression factorisable, expression positive en-dehors des racines et négative entre les racines.</p>
<p>$a < 0$ et $\Delta < 0$</p>  <p>aucune racine réelle, expression négative</p>	<p>$a < 0$ et $\Delta = 0$</p>  <p>une racine double, expression factorisable (cf. identité remarquable), expression positive ou nulle</p>	<p>$a < 0$ et $\Delta > 0$</p>  <p>deux racines réelles, expression factorisable, expression négative en-dehors des racines et positive entre les racines.</p>