Index

Le vocabulaire défini les années précédentes et les nouvelles notions de première sont abordées en utilisant l'activité 1 page 202.

1 Variable aléatoire et loi de probabilité

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. a. Préciser l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

b. Quelle loi de probabilité peut-on choisir sur cet ensemble ?

c. Quelle est la probabilité de l'événement A : « Obtenir un 7, un 8, un 9 ou un 10 » ?

2. On convient que, pour jouer, la mise est de 5 € et que le joueur gagne 5 € si la carte tirée est une figure (valet, dame ou roi), 10 € si c'est un as, et 0 € dans les autres cas.
De plus, cette somme est doublée lorsque la carte est un cœur.

a. Déterminer quel peut être le gain algébrique (positif, négatif ou nul), du joueur en tenant compte de la mise qu'il ne récupère pas.

b. On désigne par X le procédé qui, selon la règle du jeu, associe à chaque élément de Ω le gain algébrique du joueur.
Recopier et compléter X(« huit de coeur ») = … ; X(« roi de pique ») = …
Quel « objet mathématique » reconnaissez-vous dans X ?

c. On note $(X = -5)$ l'événement « le gain est – 5 € ».
Quel lien existe-t-il entre A et $(X = -5)$? En déduire $P(X = -5)$.

d. Pour chacune des autres valeurs x_i prises par X, calculer la probabilité $P(X = x_i)$.

e. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

f. Calculer la somme des probabilités $P(X = x_i)$.
Doit-on s'en étonner ?

x_i	-5			
$P(X = x_i)$				

1) Rappel de quelques notions vues en seconde.

" Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes " définit une **expérience aléatoire**.

a) L'**univers** Ω des **possibles** ou **éventualités** est l'ensemble des 32 cartes.

Un résultat est une **éventualité**.

Le cardinal de Ω est 32, on note : card(Ω) = 32.

b) puisque le tirage est au hasard, les éventualités sont **équiprobables** (On dit que l'expérience aléatoire suit une loi d'équiprobabilité).

Pour définir une **loi de probabilité**, il faut :

- déterminer chaque éventualité (soit en les donnant une à une, soit en les décrivant),

- donner la probabilité de chaque éventualité (sous forme de tableau, d'arbre, de formule ...)

Dans cette activité : une éventualité est une " carte ".

$$P(\text{" la carte de ...}) = \frac{1}{32}$$

c) Un **événement** est un sous-ensemble ou une partie de l'univers Ω.

L'ensemble vide (∅) et l'univers Ω sont des parties ou sous-ensembles de Ω.

L'ensemble vide est l'événement impossible.

L'univers est l'événement certain.

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des éventualités qui composent cet univers.

Ici : A est l'ensemble des 16 cartes numérotées 7, 8 , 9 ou 10.

(Quatre cartes par couleur et quatre couleurs).

$P(A) = \frac{16}{32}$

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, on a : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

2) Une nouvelle notion : Variable aléatoire réelle.

Méthode : Dans une analyse d'une expérience aléatoire, on s'imagine réaliser cette expérience et on note tous les possibles.

a) Le gain relatif du joueur est :

0 – 5 = – 5 € lorsque le joueur tire une carte autre qu'une figure ou un as.

5 – 5 = 0 € lorsque le jouer tire une figure autre qu'à cœur.

10 – 5 = 5 lorsque le joueur tire une figure à cœur ou lorsque le jouer tire un as autre que l'as de cœur.

20 – 5 = 15 € lorsque le jouer tire l'as de cœur.

b) X est une **fonction** définie sur Ω à valeurs dans ℝ. $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

X(" huit de cœur ") = – 5

X(" roi de pique ") = 0 (mais, X(" roi de cœur ") = 5)

c) On note $(X = -5)$ l'événement le gain est –5.

Les éventualités (éléments) de cet événement $(X = -5)$ sont celles de A défini au 1/c).

(L'image par X d'un élément de A est – 5 et ce sont les seuls éléments de Ω qui ont –5 pour image par X).

$P(X = -5) = P(A) = \frac{16}{32}$

X est une **variable aléatoire** réelle définie sur Ω.

d) e) f).

De même, on peut calculer $P(X = 0) = \frac{9}{32}$ (9 figures autres qu'à cœur) , $P(X = 5) = \frac{6}{32}$ (les trois figures à cœur et les trois as autres qu'à cœur) , $P(X = 15) = \frac{1}{32}$ (l'as de cœur).

En définissant ainsi, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X et leur probabilité , on a défini la loi de probabilité de X.

En résumant dans un tableau, on a:

X_i	-5	**0**	**5**	**15**	**Somme**
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{1}{32}$	1
$P(X=x_i)\times x_i$	$\frac{-80}{32}$	0	$\frac{30}{32}$	$\frac{15}{32}$	$E(X)=-\frac{35}{32}$

la somme des probabilités est 1 puisque l'on fait ainsi la somme des probabilités de toutes les éventualités.

3) On joue des milliers de fois …. Quel gain peut-on espérer en moyenne?

Les gains algébriques sont pondérés par leur probabilité. (Voir en statistiques, le calcul d'une moyenne).

On fait la moyenne des gains en calculant la somme des produits $P(X=x_i)\times x_i$ (comme la somme des probabilités vaut 1, la division par l'effectif total n'apparaît pas).

On trouve : gain moyen = $-\frac{35}{32}$

Ce nombre s'appelle l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Comme en statistiques, on peut calculer la variance et l'écart-type.

3) Résumé :

Retenir:

Définitions :

Soit un univers Ω sur lequel on a défini une loi de probabilité P.

Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si on note x_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les valeurs prises par X, $(X=x_i)$ est l'événement constitué des éventualités de Ω ayant pour image cette valeur x_i.

On définit la loi de probabilité de X en donnant les valeurs réelles x_i et leur probabilité.

L'espérance mathématique de X est le nombre noté $E(X)$ et défini par : $E(X) = \sum_1^n p_i . x_i$ où $p_i = P(X=x_i)$

la variance de X est le nombre noté $V(X)$ et défini par : $V(X) = \sum_1^n p_i . (x_i - E(X))^2$ où $p_i = P(X=x_i)$

L'écart-type de X est le nombre noté $\sigma(X)$ et défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

propriétés:

les propriétés sont identiques à celle démontrées en statistiques concernant les moyennes et écart-types.

$E(aX + b) = aE(X) + b$

$V(aX) = a^2V(X)$

Formule de Kœnig

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$