Index

Prérequis :..........1
I- Remise en route..........1
Une définition..........1
Une première propriété : (par cœur pour l'énoncé et pour la démarche)..........2
II- Colinéarité de vecteurs..........3
Définition..........3
Droite : définition à partir des vecteurs, équations de droites..........4
Droite définie par un point et un vecteur directeur. (Comprendre comment on redéfinit la notion de droite)..........4
Équation cartésienne d'une droite..........5
Recherche et démonstration :..........5
Énoncé de la propriété (par cœur)..........5
Lien avec l'équation réduite d'une droite (vue en seconde)..........5
III- Décomposition d'un vecteur en somme de deux vecteurs non colinéaires..........6
Principe de la décomposition :..........6
Avec des points non alignés..........7
Repères (une nouvelle approche de la notion ...)..........8

Prérequis :

Ont été étudiées les années précédentes les notions suivantes :

- Droites : équation réduite, coefficient directeur, ordonnée à l'origine.

- **Parallélogrammes** …

- Somme de vecteurs (Relation de Chasles)

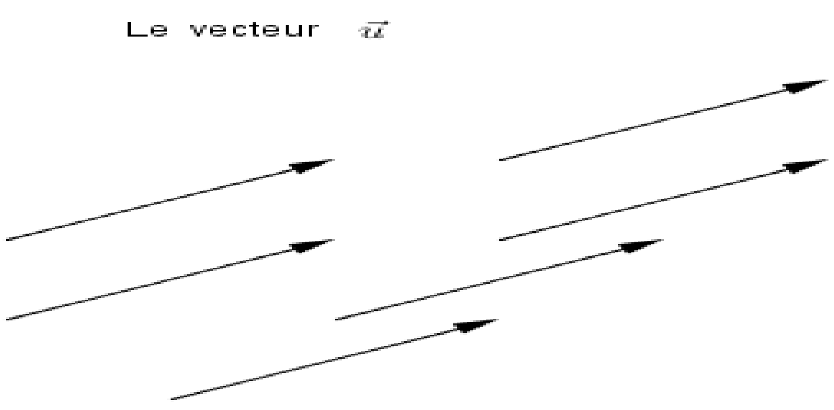
- Coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$ $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

- Colinéarité des vecteurs.

I- Remise en route

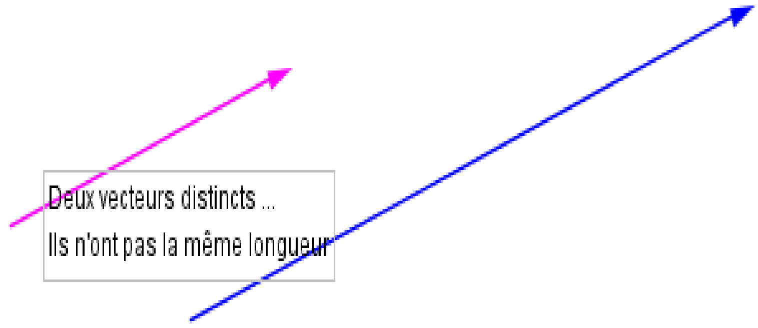
Une définition

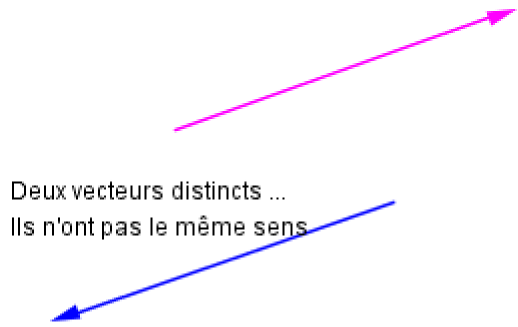
Un vecteur $\vec{u}$ du plan est défini par : $\begin{cases} \text{sa direction} \\ \text{son sens} \\ \text{sa longueur} \end{cases}$



Un seul vecteur, ..., 6 représentants.

Autrement dit : Deux vecteurs sont égaux (le même vecteur) lorsque ces trois conditions sont vérifiées en même temps.





Une première propriété : (par cœur pour l'énoncé et pour la démarche).

Objectifs :

- logique : savoir démontrer une équivalence

- Réinvestir des propriétés vues en seconde

Énoncé de la propriété :
A, B, C et D sont quatre points distincts ou non.
" L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ " équivaut à " les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
Démonstration de l'équivalence : Il s'agit de démontrer deux implications
* Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ " alors les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
et sa réciproque
** Si les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Démonstration de *
Donnée :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (*On cherche le milieu des segments ....*)
Soit I le milieu de $[AC]$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont égaux : En effet,
- même direction (celle de la droite (AC))
- même sens (on se déplace de A vers I comme de I vers C, puisque par définition du milieu, les points A, I, C sont alignés dans cet ordre).
- même longueur ($AI = IC = \frac{1}{2} AC$)
On a donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$. (ou $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CI}$)
Évaluons $\overrightarrow{DI}$
$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI}$ (Relation de Chasles) , or, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (donnée) et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$
d'où, $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ (Relation de Chasles)
Comme $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$, I est le milieu de $[DB]$.
Conclusion : $[AC]$ et $[DB]$ ont le même milieu.

Démonstration de la réciproque **
Donnée :
$[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu I.
On a donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DI}$.
En ajoutant membre-à-membre les deux égalités, on obtient une nouvelle égalité :
$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{DI}$, soit : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (Ce qui est la conclusion attendue).

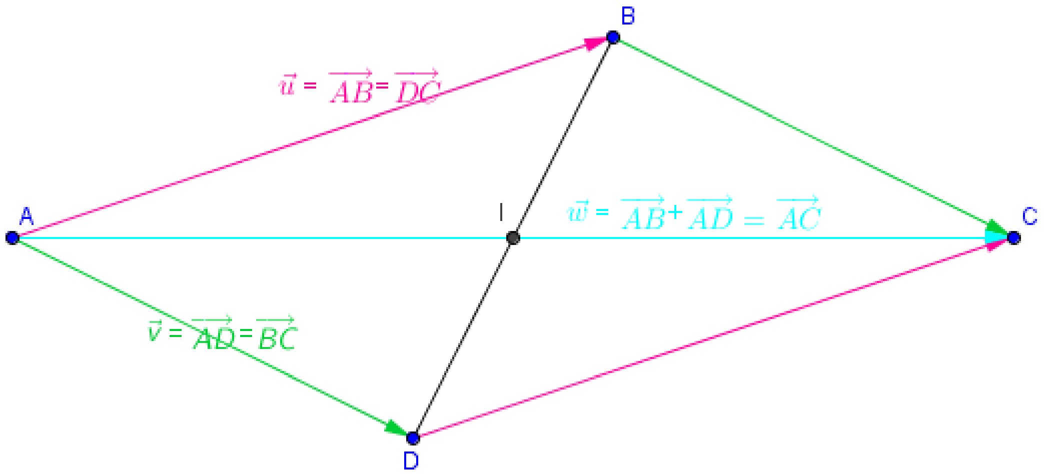
L'équivalence est par conséquent démontrée.

On déduit de cette équivalence les propriétés suivantes :
Dans le cas particulier où les quatre points forment un quadrilatère, on a :
(1) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $ABCD$ est un parallélogramme.

(2) : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

(3) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque : Pour retenir ces propriétés, une figure bien comprise est suffisante.



II- Colinéarité de vecteurs. *(Notion vue en seconde)*

Définition

Des propositions équivalentes pour définir la colinéarité de vecteurs.
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction (1)
si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\ \vec{u}$.
Dans un repère, $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $XY' = X'Y$
si et seulement si $XY' - X'Y = 0$
si et seulement si les coordonnées de $\vec{u}$ et les coordonnées de $\vec{v}$ sont proportionnelles.

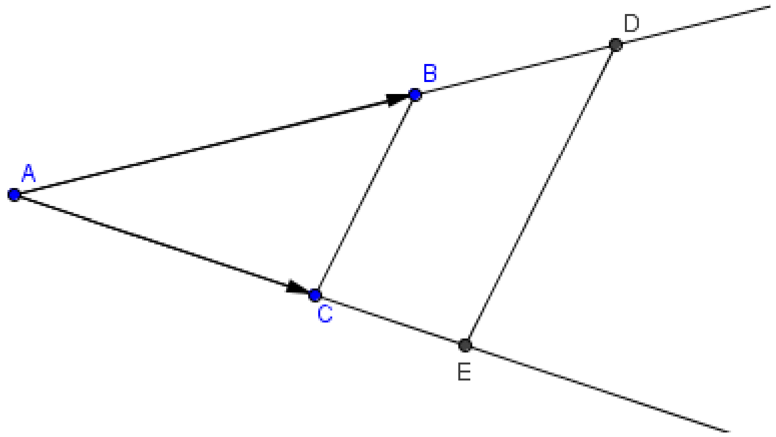
Conséquences pour les démonstrations :
(1) On sait que les points A, B sont sur une droite d_1 parallèle à une droite d_2 contenant les points C et D
On en déduit : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires.
Réciproquement : On sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires, on en déduit : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
(2) Par construction, par calculs, on sait qu'on peut écrire $\overrightarrow{CD} = k\ \overrightarrow{AB}$ où k est un réel, (k est alors connu)
On en déduit : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires.
Réciproquement : On sait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires, on en déduit : il existe un réel k tel que on peut écrire $\overrightarrow{CD} = k$ $\overrightarrow{AB}$ (k existe, on ne l'a pas nécessairement déterminé)
(3) On se situe dans un repère :
On connaît les coordonnées, on applique la relation de colinéarité.
Notamment, cette relation permet de déterminer une équation de n'importe quelle droite dans un repère du plan.

Configuration de Thalès :

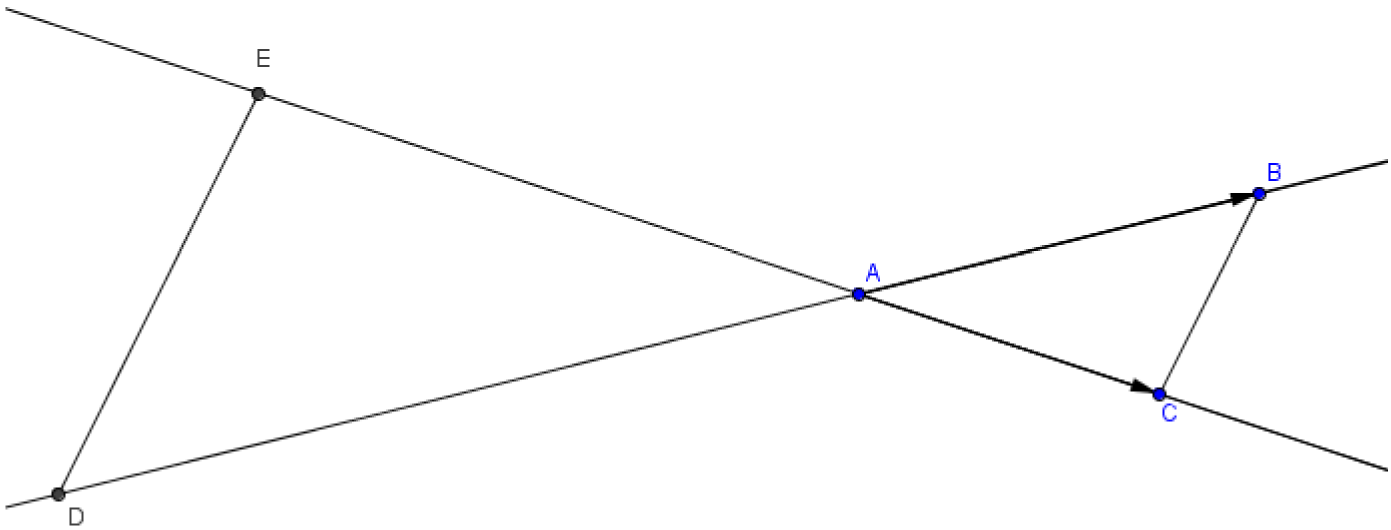
$\overrightarrow{AD} = k\ \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$, d'où, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{BA} + k\ \overrightarrow{AC} = k\,(\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\ ) = k\ \overrightarrow{BC}$.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = |k|$$

Un exemple avec $k = \dfrac{3}{2}$



Un exemple avec $k = -2$



Remarquer : Configuration de Thalès, colinéarité de vecteurs, proportionnalité, fonction affine, équation de droites ont des liens extrêmement forts …. (mais l'un n'est pas l'autre).

Thalès	Vecteurs colinéaires	Fonction affine	équation de droites
proportionnalité des longueurs	proportionnalité des coordonnées	proportionnalité des accroissements	le coefficient directeur est le coefficient de proportionnalité des accroissements

Droite : définition à partir des vecteurs, équations de droites

Droite définie par un point et un vecteur directeur. (*Comprendre comment on redéfinit la notion de droite)*

On se donne un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul.

L'**ensemble** des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est

la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarquer :

* Si A et B sont deux points distincts alors la droite (AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

** Tout vecteur non nul $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite

Équation cartésienne d'une droite

Recherche et démonstration :

Soit un point $A(x_A ; y_A)$ du plan et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

On note d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

D'après ce qui précède : $M(x ; y)$ appartient à d si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$

En réorganisant le calcul, on obtient :

$\beta x - \alpha y + \gamma = 0$ où le couple $(x ; y)$ est le couple de coordonnées d'un point, $(\alpha ; \beta)$ est le couple de coordonnées d'un vecteur directeur et γ un nombre réel obtenu en réduisant le calcul algébrique .

Énoncé de la propriété (par cœur)

$ax + by + c = 0$ où $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ est une équation de droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Toute droite a une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$

C'est lorsque l'équation est écrite sous cette forme qu'on la nomme " équation cartésienne " de la droite (*en l'honneur de René Descartes, né le 31 mars 1596 en Touraine, et mort le 11 février 1650 à Stockholm, mathématicien, physicien et philosophe français*).

Lien avec l'équation réduite d'une droite (vue en seconde)

Dans ce premier tableau, on suppose connue l'équation réduite de la droite :

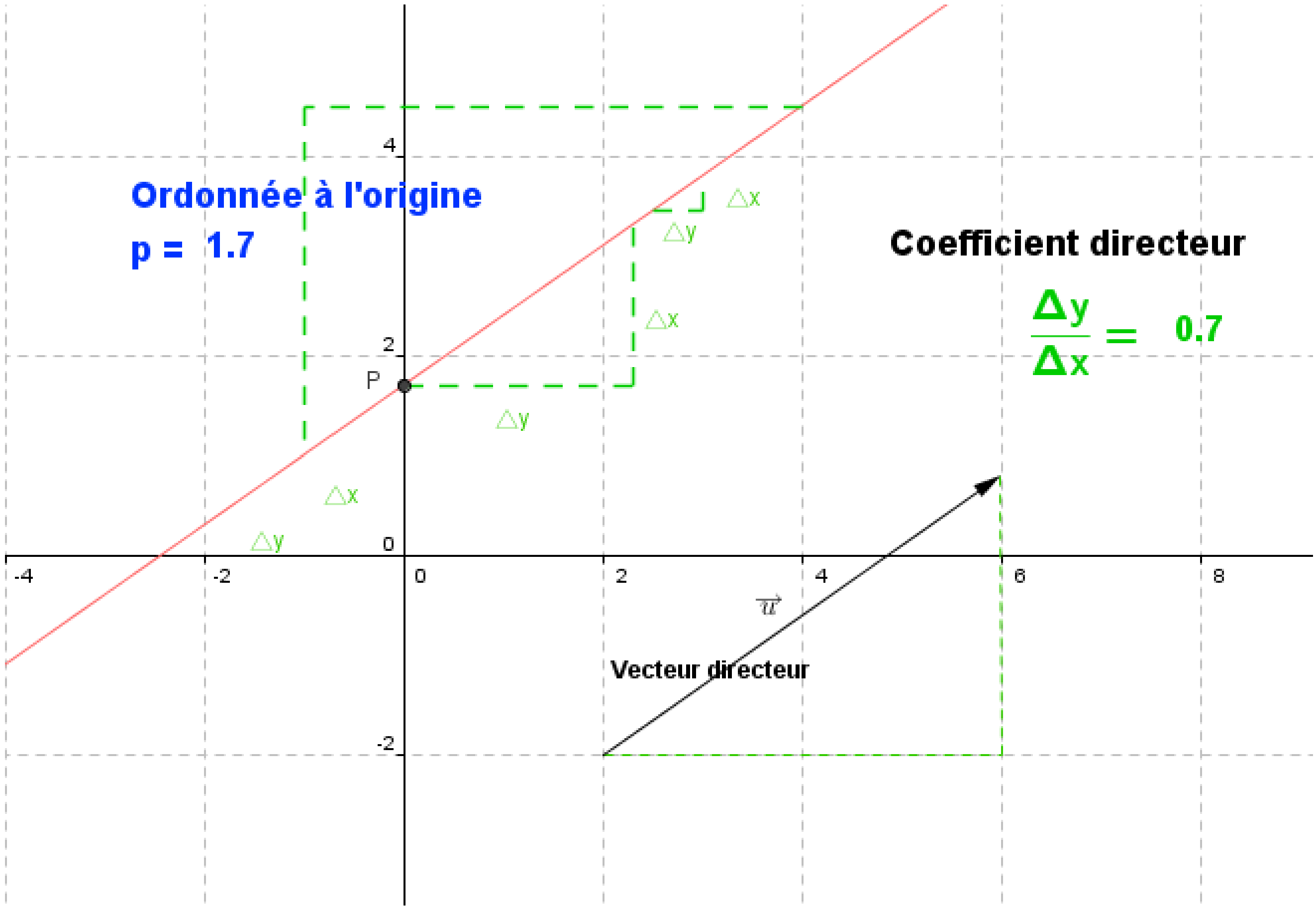
Fonctions représentées	**Droites**	**Équation réduite**	**Coefficient directeur**	**Ordonnée à l'origine**	**Équation cartésienne**	**Vecteur directeur**
aucune	Parallèles à l'axe des ordonnées	$x = k$	Aucun	Aucune	$x - k = 0$	$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Fonction affine constante : $x \mapsto b$	Parallèles à l'axe des abscisses	$y = b$	0	b	$y - b = 0$	$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
Fonction affine $x \mapsto ax + b$ où $a \neq 0$	Non parallèles aux axes	$y = ax + b$ $a \neq 0$	a	b	$ax - y + b = 0$	$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$

Dans ce deuxième tableau, on suppose connue une équation cartésienne de la droite :

Fonctions représentées	**Droites**	**Équation réduite**	**Coefficient directeur**	**Ordonnée à l'origine**	**Équation cartésienne**	**Vecteur directeur**
aucune	Parallèles à l'axe des ordonnées	$x=-c$	Aucun	Aucune	$x+c=0$	$\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
Fonction affine constante $x\mapsto -c$	Parallèles à l'axe des abscisses	$y=-c$	0	$-c$	$y+c=0$	$\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
Fonction affine $x\mapsto -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$	Non parallèles aux axes	$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$	$-\frac{a}{b}$	$-\frac{c}{b}$	$ax+by+c=0$ $(a;b)\neq(0;0)$ $b\neq 0$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

Illustration sur un quadrillage.

Le coefficient directeur d'une droite est définie par $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



III- Décomposition d'un vecteur en somme de deux vecteurs non colinéaires.

Chaque mot de ce titre est important … tout est dans ce titre …

Principe de la décomposition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs donnés non colinéaires. (Par conséquent : aucun de ces deux vecteurs n'est le vecteur nul).

$\vec{w}$ est un vecteur quelconque.

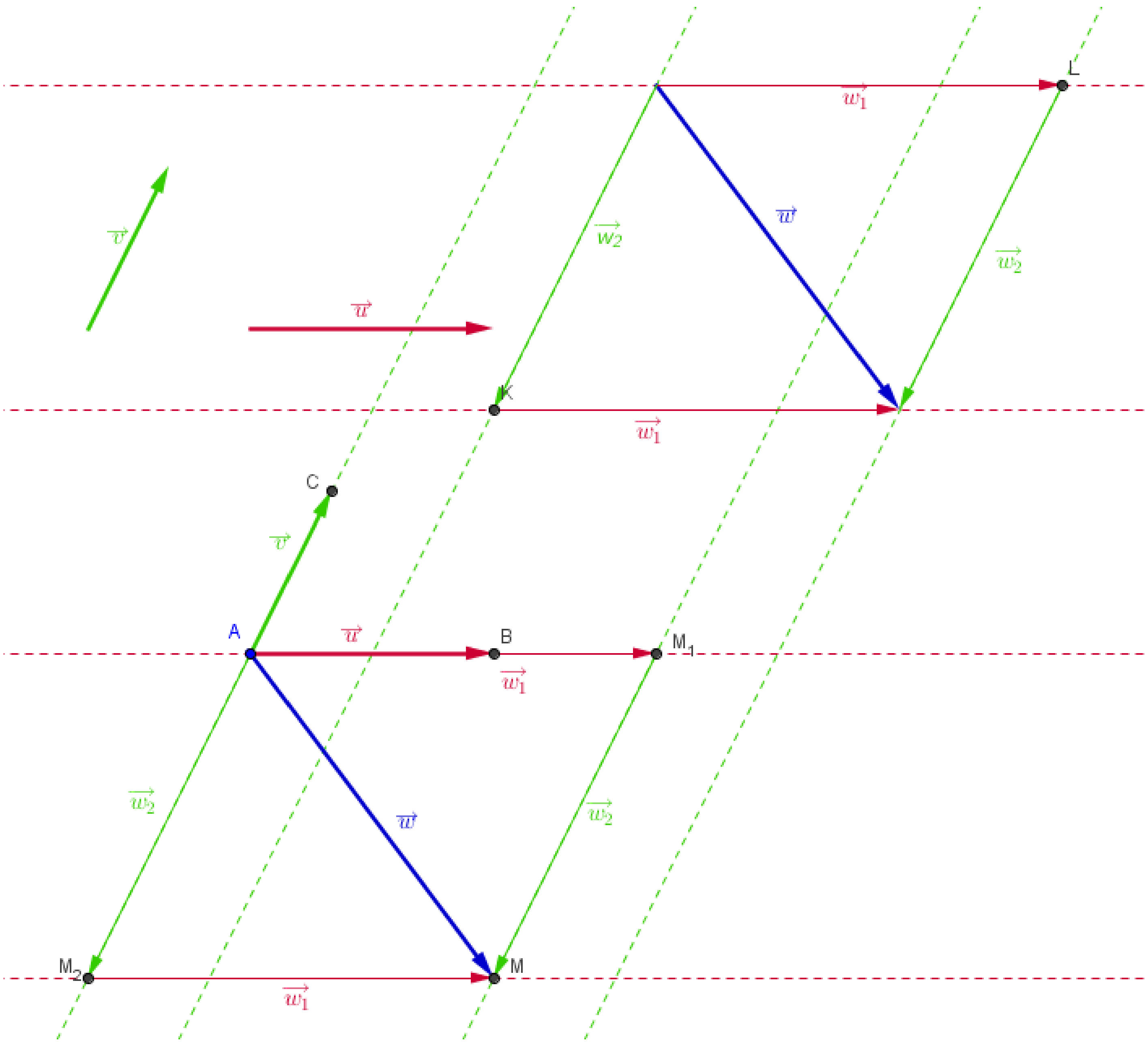
Il s'agit d'écrire $\vec{w}$ comme somme de deux vecteurs $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$, l'un colinéaire à $\vec{u}$, l'autre colinéaire à $\vec{v}$.

Cette somme est possible d'après les propriétés du parallélogramme.

Comme $\vec{w_1}$ est colinéaire à $\vec{u}$, il existe un réel x tel que $\vec{w_1} = x\ \vec{u}$.

Comme $\vec{w_2}$ est colinéaire à $\vec{v}$, il existe un réel y tel que $\vec{w_2} = y\ \vec{v}$

On a alors : $\vec{w} = \vec{w_1} + \vec{w_2} = x\ \vec{u} + y\ \vec{v}$



Avec des points non alignés

A, B, C sont trois points non alignés.

Pour tout point M du plan,

d'après ce qui précède, il existe un couple (x ; y) de réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$.

(Dans le cas particulier du parallélogramme *ABDC*, on a : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$)

Repères (*une nouvelle approche de la notion ...*)

A, *B*, *C* étant des points non alignés, le triplet noté (*A*, *B*, *C*) ou (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un repère du plan.

Par définition, *A* est l'origine du repère.

La droite (*AB*) est l'axe des abscisses tel que l'abscisse de *B* est 1.

La droite (*AC*) est l'axe des ordonnées tel que l'ordonnée de *C* est 1.

La propriété précédente devient :

Le point *M* a pour coordonnées (*x* ; *y*) dans le repère (*A*, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) si et seulement si $\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$.

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{w}$ sont les coordonnées du point *M* défini par $\overrightarrow{AM} = \vec{w}$ où *A* est l'origine du repère.

La relation de Chasles mène à : $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$ **puisque** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$ **.**

Voir les exercices traités en classe ...