Objectif : Dérivation …

distinguer la fonction initiale de sa fonction dérivée …

quelle(s) information(s) a-t-on avec la fonction dérivée ?

Énoncé :

On sait qu'une fonction f définie et dérivable sur ℝ a pour fonction dérivée f ' (x) = $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+1}$.

On sait aussi que f(0) = 1.
Chercher toutes les informations que l'on peut donner sur f ?

Correction :

Le signe de la dérivée $f'(x)$ donne la variation de la fonction f.
Comme $x^2+1>0$, il suffit de déterminer le signe de x^2-x-6.
discriminant $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times1\times(-6) = 25 = 5^2$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+5}{2} = 3$

Comme le coefficient 1 de x^2 est strictement positif, on a :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x^2-x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+1		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	M_{ax}	↘	M_{in}	↗	

Soit $A(0\,;1)$.
Comme $f(0)=1$, $A \in C_f$ et comme $f'(0)=-6$, une équation de la tangente T_A au point $A(0\,;1)$ est :
$y=-6(x-0)+1$, soit : $y=-6x+1$

Donner des valeur approchées (raisonnables) de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *et de* $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

Le calcul de $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ nous donne la pente de la courbe C_f aux points d'abscisses respectives $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$. Ces pentes sont " fortes ".

Comme on approche C_f par T_A, on peut prendre pour valeur approchée de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, le nombre $-6\times\dfrac{1}{2}+1 = -2$ et pour valeur approchée de $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)$, le nombre $-6\times\left(\dfrac{-1}{2}\right)+1 = 4$.

Bien remarquer que le fait d'avoir des coefficients directeurs " grands " la pente est forte et la tangente s'éloigne peu de la courbe.

Existe-t-il des points de C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$?
On résout l'équation : $f'(x)=1$

$\dfrac{x^2-x-6}{x^2+1} = 1$ si et seulement si $x^2-x-6 = x^2+1$ (car $x^2+1 \neq 0$)

si et seulement si $x = -7$
Il existe un et un seul point B d'abscisse -7 sur C_f tel que la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

m étant un réel donné, existe-t-il des points de C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = mx$?
plus généralement :
On résout l'équation : $f'(x) = m$.

$\dfrac{x^2-x-6}{x^2+1} = m$ si et seulement si $x^2 - x - 6 = mx^2 + m$ (car $x^2 + 1 \neq 0$)

Pour $m \neq 1$, on a une équation du second degré en x : $(m-1)x^2 + x + m + 6 = 0$.
Cette équation a des solutions si et seulement si $\Delta \geqslant 0$.
Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(m-1)(m+6) = -4m^2 - 20m + 25$

Δ est un polynôme en m du second degré : $\Delta_m = (-20)^2 - 4\times(-4)\times 25 = 800$

Le polynôme Δ possède deux racines : $m_1 = \dfrac{20-20\sqrt{2}}{-8} = \dfrac{5\sqrt{2}-5}{2}$ et $m_2 = \dfrac{20+20\sqrt{2}}{-8} = \dfrac{-5\sqrt{2}-5}{2}$

(Valeurs approchées de $m_1 \approx 1{,}036$ à 0,001 par excès et $m_2 \approx -6{,}036$ à 0,001 par défaut.)

Comme le coefficient -4 de m^2 est strictement négatif, $\Delta \geqslant 0$ si et seulement si $m \in [m_2 ; m_1]$
Résumé dans un tableau :

x	$-\infty$		m_2		1		m_1		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Si $m < m_2$ ou si $m > m_1$, il n'existe pas de tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = mx$.
Si $m_2 < m < m_1$, il existe deux points de C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = mx$.
Si $m = 1$ ou si $m = m_1$ ou si $m = m_2$, il existe un point de C_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = mx$.

Tracé (approché) de C_f sur l'intervalle [–2 ; 3]
La méthode a un nom : méthode d'Euler
Sur un tableur, compléter le tableau suivant :
On crée une liste de points :

Rappel du cours : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Ce qui signifie : si h (accroissement de la variable (en abscisse) est suffisamment petit, alors,
$f(a+h) = f'(a)\times h + f(a) + \varepsilon(h)$ $\varepsilon(h)$ est une expression dépendant de h qui tend vers 0 avec h.
$f(a+h) \approx f'(a)\times h + f(a)$

Construction approchée de C_f. Exploitation graphique de la relation : $f(a+h) \approx f'(a)\times h + f(a)$
le premier point (initialisation) est donné par les conditions initiales : $f(0) = 1$.
A_0 (0 ; 1).

Soit un point A_i déjà construit d'abscisse a.
Le point suivant A_{i+1} est obtenu comme extrémité du segment tangente à la courbe en A_i :
h est l'accroissement de la variable, $f(a)$ est l'ordonnée (approchée) du point A_i.
$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente.
Le point A_{i+1} a pour abscisse $a + h$ et pour ordonnée (de plus en plus éloignée de la valeur exacte) $f(a + h)$.
Plus h est proche de , meilleure est l'approximation.

Point A_i	**abscisse** x_i	**ordonnée** y_i	**équation de la tangente en** A_i	**approximation à droite : point** A_{i+1}
A_0	0	1	$y = ...$	A_1 : point de la tangente d'abscisse 0,1 et d'ordonnée ...
A_1	0,1			

Faire de même avec une approximation à gauche en partant de A_0 .

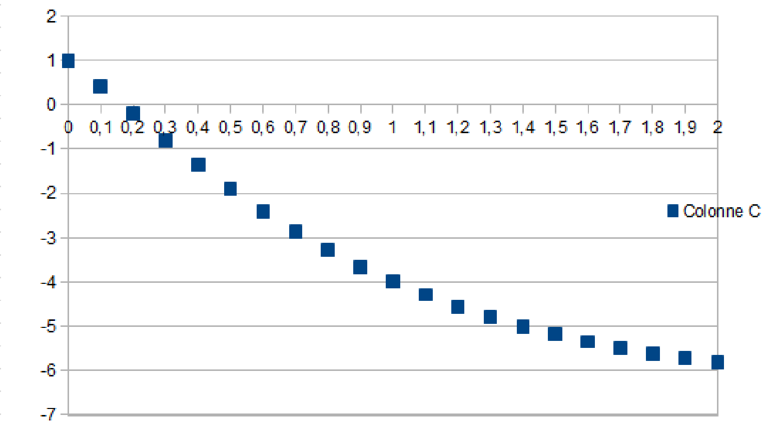
(Sur le tableur, on ne donne pas directement une équation de la tangente, mais, le coefficient directeur)

Pour avoir un pas variable, on peut écrire le pas dans une cellule (par exemple en H1)
En ce cas, dans la cellule B, on tape : =B2+H1, et, dans la cellule E2, on écrit : =D2*H1+C2.

le symbole $ devant le nom de colonne fixe la colonne, devant le numéro de ligne fixe la ligne.

(Voir les fichiers : .ods)

indice	abscisse	ordonnée	coefficient directeur de la tangente	ordonnée du point suivant
0	0	1	-6	0,4
1	0,1	0,4	-6,02970297	-0,2029703
2	0,2	-0,2029703	-5,92307692	-0,79527799
3	0,3	-0,79527799	-5,69724771	-1,36500276
4	0,4	-1,36500276	-5,37931034	-1,90293379
5	0,5	-1,90293379	-5	-2,40293379
6	0,6	-2,40293379	-4,58823529	-2,86175732
7	0,7	-2,86175732	-4,16778523	-3,27853585
8	0,8	-3,27853585	-3,75609756	-3,6541456
9	0,9	-3,6541456	-3,36464088	-3,99060969
10	1	-3,99060969	-3	-4,29060969
11	1,1	-4,29060969	-2,66515837	-4,55712553
12	1,2	-4,55712553	-2,36065574	-4,7931911
13	1,3	-4,7931911	-2,08550186	-5,00174129
14	1,4	-5,00174129	-1,83783784	-5,18552507
15	1,5	-5,18552507	-1,61538462	-5,34706353
16	1,6	-5,34706353	-1,41573034	-5,48863657
17	1,7	-5,48863657	-1,23650386	-5,61228695
18	1,8	-5,61228695	-1,0754717	-5,71983412
19	1,9	-5,71983412	-0,93058568	-5,81289269
20	2	-5,81289269	-0,8	-5,89289269



=(B2^2-B2-6)/(B2^2+1)

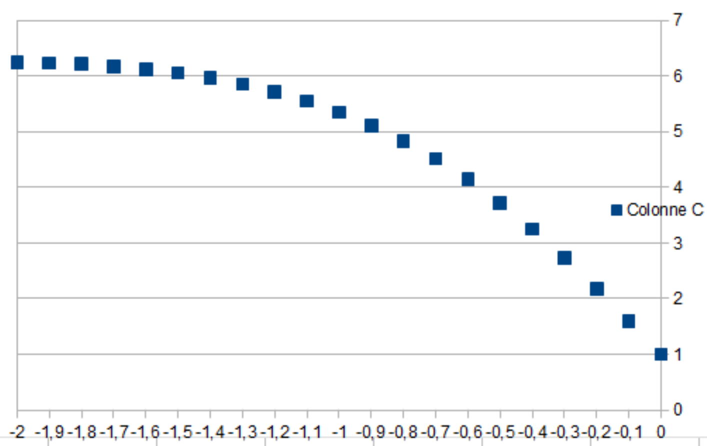
D2*\$H\$1+C2

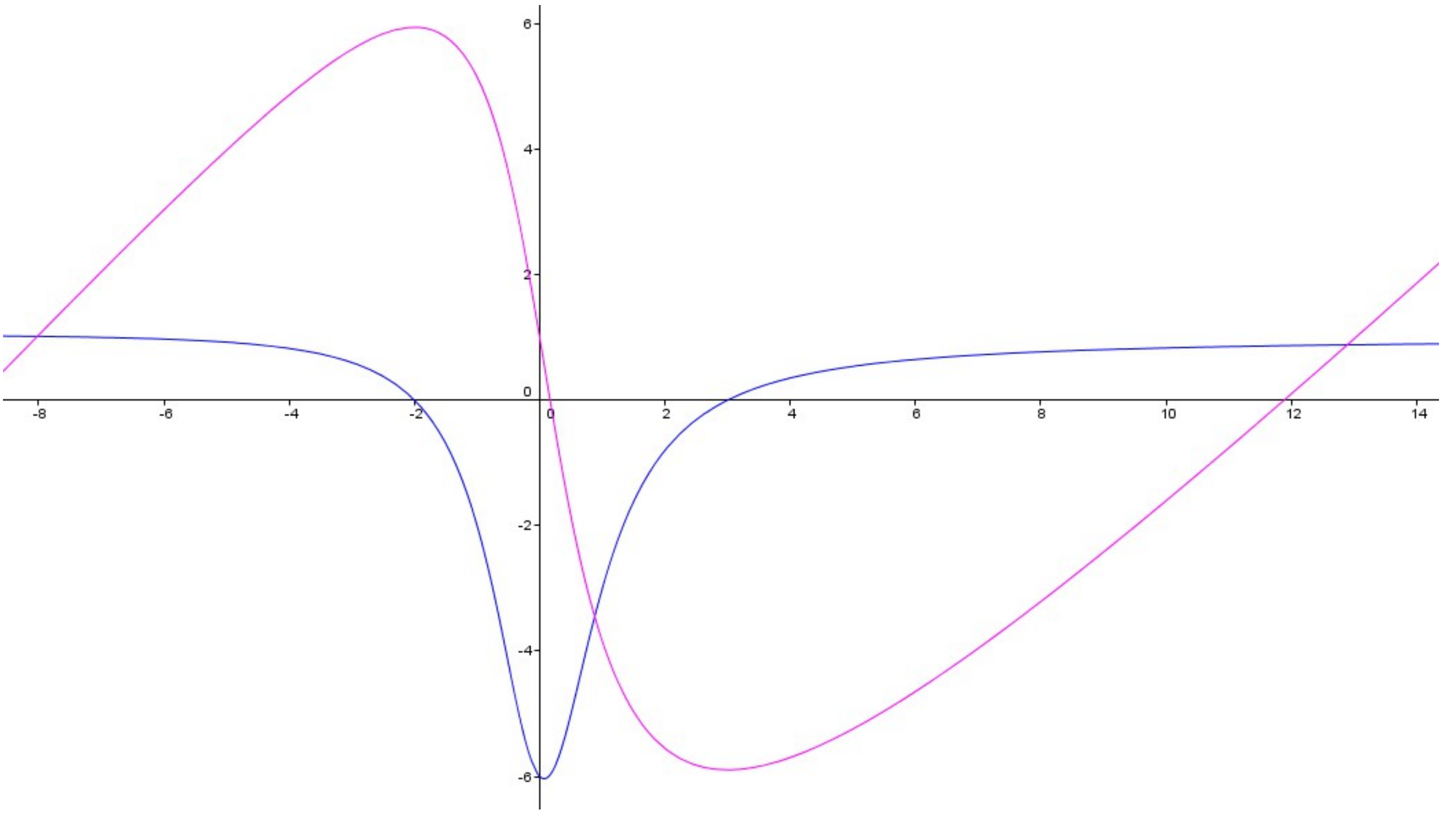
	A	B	C	D	E
1	indice	abscisse	ordonnée	coefficient directeur de la tangente	ordonnée du point suivant
2	0	0	1	-6	0,4
3	1	0,1	0,4	-6,02970297	-0,2029703
4	2	0,2	-0,2029703	-5,92307692	-0,79527799
5	3	0,3	-0,79527799	-5,69724771	-1,36500276
6	4	0,4	-1,36500276	-5,37931034	-1,90293379
7	5	0,5	-1,90293379	-5	-2,40293379

=E2

=B2+\$H\$1

indice	abscisse	ordonnée	coefficient directeur de la tangente	ordonnée du point suivant
0	0	1	-6	1,6
-1	-0,1	1,6	-5,83168317	2,183168317
-2	-0,2	2,183168317	-5,53846154	2,737014471
-3	-0,3	2,737014471	-5,14678899	3,25169337
-4	-0,4	3,25169337	-4,68965517	3,720658887
-5	-0,5	3,720658887	-4,2	4,140658887
-6	-0,6	4,140658887	-3,70588235	4,511247122
-7	-0,7	4,511247122	-3,22818792	4,834065914
-8	-0,8	4,834065914	-2,7804878	5,112114695
-9	-0,9	5,112114695	-2,37016575	5,349131269
-10	-1	5,349131269	-2	5,549131269
-11	-1,1	5,549131269	-1,66968326	5,716099595
-12	-1,2	5,716099595	-1,37704918	5,853804513
-13	-1,3	5,853804513	-1,11895911	5,965700424
-14	-1,4	5,965700424	-0,89189189	6,054889613
-15	-1,5	6,054889613	-0,69230769	6,124120382
-16	-1,6	6,124120382	-0,51685393	6,175805776
-17	-1,7	6,175805776	-0,36246787	6,212052562
-18	-1,8	6,212052562	-0,22641509	6,234694072
-19	-1,9	6,234694072	-0,10629067	6,245323139
-20	-2	6,245323139	0	6,245323139




6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14