Index

Objectif :

Des points fixes sont donnés.

M est un point du plan caractérisé par une relation $\mathscr{R}$ (géométrique, analytique, longueur, produit scalaire, équation, …).

On cherche l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan (*tous et seulement eux*) vérifiant cette relation $\mathscr{R}$.

Autrement dit : $M \in \mathscr{E}$ si et seulement si $\mathscr{R}$ est vraie.

Quelques exemples déjà connus

Vous connaissez quelques cas depuis longtemps (et même plus!)

Exemple 1

a) A est donné, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = 3$?

Cercle de centre A et de rayon 3. $AM = 3$ si et seulement si $M \in \mathscr{C}(A, 3)$

b) A est donné, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = 0$?

Le point A. $AM = 0$ si et seulement si $M = A$.

c) A est donné, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = -1$?

L'ensemble vide. *On note : $\varnothing$ l'ensemble vide.*

Exemple 2

a) A et B sont donnés et distincts, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires ?

Droite (AB). $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires si et seulement si $M \in (AB)$.

b) A et B sont donnés et distincts, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux ?

Droite perpendiculaire à (AB) en A. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux si et seulement si $M \in \Delta$ avec $A \in \Delta$ et $\Delta \perp (AB)$.

c) A et B sont donnés et distincts, quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux ?

Cercle de diamètre [AB]. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux si et seulement si M appartient au cercle de diamètre [AB]

d) A et B sont donnés et distincts, et I milieu de [AB], quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux ?

Médiatrice de [AB] I milieu de [AB] et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux si et seulement si M appartient à la médiatrice de [AB].

Exemple 3

Dans un repère du plan, quel est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que

a) $2x - y + 5 = 0$

Droite d'équation $2x - y + 5 = 0$ (ou $y = 2x + 5 = 0$) ou droite passant par $A(0\ ;\ 5)$ et $B(1\ ;\ 7)$ ou ….

b) $y = (x - 1)^2 + 2$

Parabole d'équation $y = (x - 1)^2 + 2$, sommet $S(1\ ;\ 2)$, ….

c) $xy = 1$

Hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ (les asymptotes sont les axes de coordonnées)

d) $x = 5$

Droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par $A(5\ ;\ 0)$

e) $y = -1$

Droite parallèle à l'axe des abscisses passant par $A(0\ ;\ -1)$

f) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Le point de coordonnées $(3\ ;\ -2)$.

Quelques modèles à partir du produit scalaire

Dans ces quatre exemples, [AB] est un segment de longueur 4 et I est le milieu de [AB].

Exemple 1

a) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$?

On sait que $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$ *(c'est grâce à cette égalité que l'on peut passer des longueurs au produit scalaire).*

Or, $\overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\cdot\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}$

et $\overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\cdot\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}$

I, étant le milieu de [AB], on sait : $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (ou encore : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$)

La somme : $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

$$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\cdot\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}^2 + \left(-\overrightarrow{IA}\right)^2 - 2\cdot\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}$$

On en déduit donc : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2.IA^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ *(Dans le deuxième membre, l'inconnu (point M) n'apparaît qu'une seule fois.)*

La recherche de l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$

revient à celle de l'ensemble des points M du plan tels que $2MI^2 + 2.IA^2 = 26$.

Avec les données numériques : $IA = 2$, donc : $2MI^2 = 26 - 2\times4 = 18$

$$MI^2 = 9$$

et comme MI est une longueur, seule la solution positive est acceptable : $MI = 3$

L'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 26$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MI = 3$.

Conclusion : L'ensemble est le cercle de centre I et de rayon 3.

b) Cas général :

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$?

La démarche précédente s'applique …

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow 2MI^2 = k - \frac{AB^2}{2}$$

Si $k - \frac{AB^2}{2} < 0$ alors l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

Si $k - \frac{AB^2}{2} = 0$ alors l'ensemble cherché est réduit au seul point I.

Si $k - \frac{AB^2}{2} > 0$ alors l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon : $\frac{\sqrt{2k - AB^2}}{2}$.

<u>Exemple 2</u>

a) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5$?

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$.

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. *(Dans le dernier membre, l'inconnu (point M) n'apparaît qu'une seule fois.)*

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 5 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 5.$$

Comme $AB = 4$, on cherche l'ensemble des points M du plan tels que $MI = 3$. (Voir cas précédent).

Conclusion : L'ensemble est le cercle de centre I et de rayon 3.

b) Cas général :

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = k$?

La démarche précédente s'applique …

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5 \Leftrightarrow MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \dfrac{AB^2}{4}$.

Si $k + \dfrac{AB^2}{4} < 0$ alors l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

Si $k + \dfrac{AB^2}{4} = 0$ alors l'ensemble cherché est réduit au seul point I.

Si $k + \dfrac{AB^2}{4} > 0$ alors l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon : $\dfrac{\sqrt{4k + AB^2}}{2}$

Exemple 3

a) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 6$?

b) Cas général :

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$?

La démarche s'applique …

Exemple 4

a) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = 8$?

b) Cas général :

Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$?