.Pour chaque fonction f,

- déterminer l'ensemble de définition
- déterminer les intervalles de dérivabilité
- déterminer la fonction dérivée f'
- déterminer le signe de $f'(x)$. (sauf pour le N°15)
- dresser le tableau complet de variations. (sauf pour le N°15)

1) $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{x}$

$E_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

f (fonction rationnelle) dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = 5x^4 + \dfrac{1}{x^2}$

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$E_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

f (inverse de ...) dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Pour tout $x \neq 1$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

3) $f(x) = 2x + \sqrt{x}$

$E_f = [0;+\infty[$

f (somme de …) dérivable sur $]0;+\infty[$.

$f'(x) = 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

4) $f(x) = \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2-x-1}$

E_f est l'ensemble des réels tels que $2x^2 - x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

$E_f = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$

f (fonction rationnelle) dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

pour $x \neq -\dfrac{1}{2}$ et $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(10x-3)(2x^2-x-1)-(4x-1)(5x^2-3x+2)}{(2x^2-x-1)^2} = \dfrac{x^2-18x+5}{(x^2-x-1)^2}$

Signe de $f'(x)$: c'est le signe de $x^2 - 18x + 5$

$\Delta = 304 = 16 \times 19$

$x_1 = 9-2\sqrt{19}$ ($\approx$ 0,28) $x_2 = 9+2\sqrt{19}$ ($\approx$ 17,72)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	↗	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	↗	Max	↘	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	min	↗	$\frac{5}{2}$

5) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{5}$

f est un polynôme du second degré défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x - \dfrac{1}{2}$ (premier degré)

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	min	↗	$+\infty$

6) $f(x) = (2 + \sqrt{x})^2$

$E_f = [0;+\infty[$

f (somme de …) dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2\times\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\times(2+\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	4	↗	$+\infty$

7) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}$

$E_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

f (fonction rationnelle) dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x^2}$

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

8) $f(x) = (x + \dfrac{1}{x})^2$

$E_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

f (fonction rationnelle) dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = 2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2(x^2-1)(x^2+1)}{x^3} = \dfrac{2(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$

Comme $2 > 0$ et $x^2 + 1 > 0$, on a :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

9) $f(x) = \dfrac{2}{3x}$ Remarquer : $f(x) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{x}$

$E_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

f (fonction rationnelle) dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

10) $f(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{x}}$

$E_f =]0 ; +\infty[$

f (quotient de …) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-2\times\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times(1-2x)}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{-4x-1+2x}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{-2x-1}{2x\sqrt{x}}$

Comme $x > 0$, $f'(x) < 0$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘ $-\infty$

11) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x}{9}}$ Remarque : $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x}$

$E_f = [0 ; +\infty[$

f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Comme $x > 0$, $f'(x) > 0$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.

$E_f = [0 ; +\infty[$

f (quotient de …) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)-2x\times\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$-3x^2 + 1$ possède une seule racine positive qui vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	Max	↘ 0

13) $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x}$

$E_f = [0 ; +\infty[$

f (produit de …) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x \times \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$

Comme $x > 0$, $f'(x) > 0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

14) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$E_f =]0 ; +\infty[$

f (inverse de …) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0

15) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{3} - 2x\right)\left(1 - \dfrac{3x}{2}\right)$

f, étant un polynôme de degré 4, est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x^2-2)\left(1-\dfrac{3}{2}x\right) + \left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}x^3 - 2x\right)$

$f'(x)$ est un polynôme du troisième degré sans racine évidente …. (hors programme pour une étude du signe " autonome ")

16) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2$

$E_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

f, (fonction rationnelle) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{2 \times (-1)}{(x+1)^2} \times \left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

$f'(x)$ est donc du signe opposé à celui de $x + 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$-$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$	$\|\|$	$+\infty$ ↘ 0

17) $f(x) = (x^2 + 1)(1 + \sqrt{x})$

$E_f = [0 ; +\infty[$

f (produit de …) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x(1 + \sqrt{x}) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 1)$

Comme $x > 0$, $f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

18) $f(x) = \dfrac{8\sqrt{x} - x}{x + \sqrt{x}}$

$E_f =]0 ; +\infty[$

f (quotient de …) est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\left(8 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)(x + \sqrt{x}) - \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)(8\sqrt{x} - x)}{(x + \sqrt{x})^2} = \dfrac{-9x}{2\sqrt{x}(x + \sqrt{x})^2}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ 8	↘	-1

19) $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$

$E_f =]-\infty ; -4[\cup]-4 ; +\infty[$

f (fonction homographique) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq -4$, $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - 1 \times (3x - 2)}{(x+4)^2} = \dfrac{14}{(x+4)^2}$

Pour $x \neq -4$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	3

20) $f(x) = \dfrac{3}{2x} + 1$ remarque : $f(x) = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{x} + 1$

$E_f = \left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$

f (fonction rationnelle) dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$

Pour tout $x \neq 0, f'(x) < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

21) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-3}$

$E_f = \left]-\infty;3\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

f (fonction homographique) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq 3, f'(x) = \dfrac{-2(x-3)-1\times(-2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{5}{(x-3)^2}$

Pour $x \neq 3, f'(x) > 0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -2$

22) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

$E_f = \left]-\infty;-2\right[\cup\left]-2;+\infty\right[$

f (fonction homographique) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq -2, f'(x) = \dfrac{1\times(x+2)-1\times(x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

Pour $x \neq -2, f'(x) > 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$

23) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

$E_f = \mathbb{R}$ (car, $x^2 + 2 > 0$)

f, étant une fonction rationnelle, est dérivable sur $E_f = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+2)-2x(x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{6x}{(x^2+2)^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	-2	↗	1

24) $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$ Remarque : $f(x) = 1 - 3\times\dfrac{1}{x}$

$E_f =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

f (fonction homographique) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1\times x-1\times(x-3)}{x^2} = \dfrac{3}{x^2}$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

25) $f(x) = \dfrac{100x}{100+x}$

$E_f =]-\infty;-100[\cup]-1000;+\infty[$

f (fonction homographique) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq -100$, $f'(x) = \dfrac{100\times(100+x)-1\times 100x}{(100+x)^2} = \dfrac{10000}{(100+x)^2}$.

Pour $x \neq -100$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	100	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	100

26) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

$E_f = \left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$

f (fonction homographique) est dérivable sur chacun des intervalles de E_f.

Pour $x \neq -1$, $f'(x) = \dfrac{1\times(x+1)-1\times(x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

Pour $x \neq -1$, $f'(x) > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 1$