Index

Activité de synthèse : fonction et suites …..1
Objectif : créer des liens entre les propriétés des fonctions et des suites …. : variations, comportement à l'infini..........1
Partie A/ : Étude d'une fonction..........1
Partie B/ : des suites..........1

Activité de synthèse : fonction et suites …

Objectif : créer des liens entre les propriétés des fonctions et des suites …. : variations, comportement à l'infini

Partie A/ : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{4x+5}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

$D_f = \left[-\frac{5}{4};+\infty\right[$ $(4x + 5 \geqslant 0)$

2) Étudier le sens de variations de f.

Une méthode :

La fonction affine $x \mapsto 4x + 5$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right[$, suivie de la fonction $\sqrt{\ }$ strictement croissante sur $[0;+\infty[$, d'où, f est strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right[$.

Une autre méthode :

f est dérivable sur $\left]\frac{-5}{4};+\infty\right[$ et la dérivée de f est $f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}}$ qui est strictement positive sur $\left]\frac{-5}{4};+\infty\right[$,

d'où, f est strictement croissante sur $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right[$.

3) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$\sqrt{4x+5} = x$ équivaut à $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 4x+5=x^2 \end{cases}$.

L'équation $4x + 5 = x^2$ **<u>du second degré</u>** a deux solutions dans ℝ, –1 et 5.

Comme $-1 < 0$ et $5 > 0$, l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution : 5

4) Tracer la courbe C_f représentative de f et la droite Δ d'équation $y = x$ dans un repère orthonormal d'unité

graphique 2 cm. (Prendre une page entière dans le sens de la longueur).

Interpréter graphiquement le résultat du 3°)

Comme $f(5) = 5$, le point A(5 ; 5) est le point d'intersection de C_f et de Δ.

5) Montrer que si $0 \leqslant a \leqslant 5$ alors $0 \leqslant f(a) \leqslant 5$.

f étant strictement croissante sur [0 ; 5], si $0 \leqslant a \leqslant 5$ alors $f(0) \leqslant f(a) \leqslant f(5)$.
Or, $f(0) = \sqrt{5}$ qui est positif et $f(5) = 5$.
Par conséquent : si $0 \leqslant a \leqslant 5$ alors $0 \leqslant f(a) \leqslant 5$.

Montrer que si $a \geqslant 5$ alors $f(a) \geqslant 5$.

f étant strictement croissante sur [5 ; +∞[, si $a \geqslant 5$ alors $f(a) \geqslant f(5)$.
$f(5) = 5$.
si $a \geqslant 5$ alors $f(a) \geqslant 5$.

Partie B/ : des suites

f, étant la fonction étudiée à la partie A/, on définit la suite (u_n), pour $a \geqslant 0$ par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) Cas où $a = 0$.
Calculer les valeurs approchées des premiers termes de (u_n).
Conjecturer la variation de (u_n) et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Programmation rapide à la calculatrice :
0 entrer
$\sqrt{(4 \times rep + 5)}$ entrer, entrer, entrer, ….
il semble que la suite (u_n) soit strictement croissante et converge vers 5.

2) Cas où $a = 10$.
Calculer les valeurs approchées des premiers termes de (u_n).
Conjecturer la variation de (u_n) et sa limite quand n tend vers $+\infty$.
Programmation rapide à la calculatrice :
10 entrer
$\sqrt{(4 \times rep + 5)}$ entrer, entrer, entrer, ….
il semble que la suite (u_n) soit strictement décroissante et converge vers 5.

3) Démontrer les propositions suivantes :
Si, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < u_{n+1}$, alors $u_{n+1} < u_{n+2}$
Si, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > u_{n+1}$, alors $u_{n+1} > u_{n+2}$
Quelle(s) conjecture(s) est (sont) ainsi vérifiée(s) ?

SI $u_n < u_{n+1}$		SI $u_n > u_{n+1}$
en appliquant f strictement croissante sur D_f on conserve l'ordre		
ALORS $f(u_n) < f(u_{n+1})$	Par définition de la suite (u_n), $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$	ALORS $f(u_n) > f(u_{n+1})$
d'où : $u_{n+1} < u_{n+2}$		d'où $u_{n+1} > u_{n+2}$

Or,lorsque $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{5}$, donc, $u_0 < u_1$.
On en déduit : $u_1 < u_2$, puis, $u_2 < u_3$, puis, $u_3 < u_4$ ….
La suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ est strictement croissante.

Lorsque $u_0 = 10$, $u_1 = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, donc, $u_0 > u_1$.
On en déduit : $u_1 > u_2$, puis, $u_2 > u_3$, puis, $u_3 > u_4$ ….
La suite (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ est strictement décroissante.

4) À l'aide d'un programme utilisant la boucle " TANT QUE " , déterminer la valeur minimale de n_0 telle que $|u_n - 5| < 10^{-3}$ lorsque $a = 0$, puis lorsque $a = 10$.
Remplacer 10^{-3} par 10^{-6}, puis par 10^{-12}
Quelle(s) conjecture(s) est (sont) ainsi vérifiée(s) ?

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  //on demande le premier indice
  AFFICHER "indice de départ"
  LIRE n
  //on demande la valeur du premier terme
  AFFICHER "le premier terme est:"
  LIRE u
  //on demande l'écart entre u(n) et la limite suppposée
  AFFICHER "l'écart est:"
  LIRE e
  //on a une condition d'arrêt (un seuil), on introduit une boucle TANT QUE
  TANT_QUE (abs(u-5)>e) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    //on écrit la relation de récurrence
    u PREND_LA_VALEUR sqrt(4*u+5)
    //on compte le nombre de passage (ce qui donne l'indice)
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  //on affiche le plus petit entier n tel que abs(u-5)<=e
  AFFICHER "Dès que n est supérieur ou égal à "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
indice de départ
Entrer n : 0
le premier terme est:
Entrer u : 0
l'écart est:
Entrer e : pow(10,-3)
Dès que n est supérieur ou égal à 10
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
indice de départ
Entrer n : 0
le premier terme est:
Entrer u : 0
l'écart est:
Entrer e : pow(10,-6)
Dès que n est supérieur ou égal à 18
***Algorithme terminé***
```

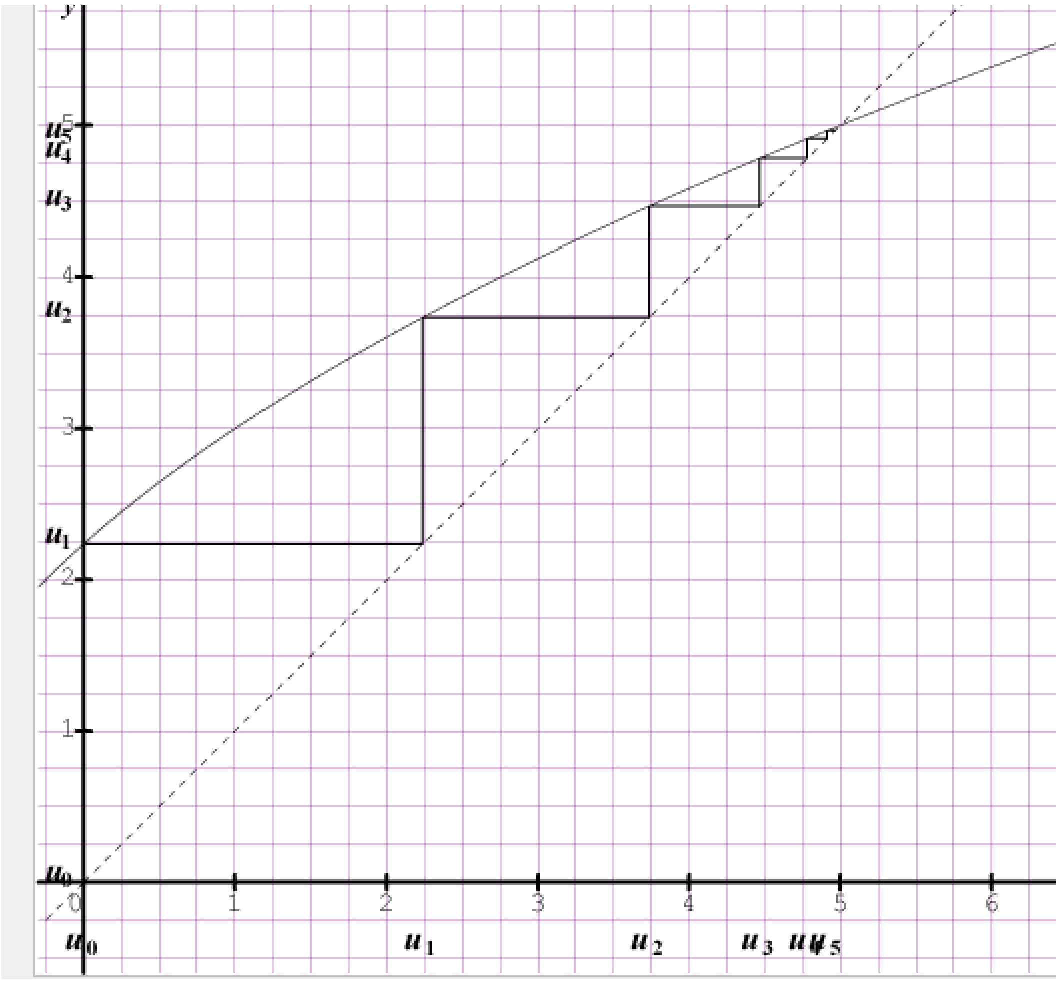
```
***Algorithme lancé***
indice de départ
Entrer n : 0
le premier terme est:
Entrer u : 0
l'écart est:
Entrer e : pow(10,-12)
Dès que n est supérieur ou égal à 33
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
indice de départ
Entrer n : 0
le premier terme est:
Entrer u : 10
l'écart est:
Entrer e : pow(10,-3)
Dès que n est supérieur ou égal à 10
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
indice de départ
Entrer n : 0
le premier terme est:
Entrer u : 10
l'écart est:
Entrer e : pow(10,-6)
Dès que n est supérieur ou égal à 17
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
indice de départ
Entrer n : 0
le premier terme est:
Entrer u : 10
l'écart est:
Entrer e : pow(10,-12)
Dès que n est supérieur ou égal à 32
***Algorithme terminé***
```

5) Représenter les premiers des suites du B1/ et du B2/ sur le graphique du A4/




y
7
u_1
6
u_2
u_3
u_4
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
u_4 u_3
u_2
u_1
u_0