Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. *Euclide d'Alexandrie*

On se place dans un repère orthonormé.
On considère les points A(5 ; 6), B(–3 ; 2), C(–1 ; –4).
Dans tout l'exercice M est un point de coordonnées (x ; y),
Calculer les coordonnées de l'orthocentre, du centre du cercle circonscrit, et, du centre de gravité du triangle ABC.

Plan d'étude :

	Orthocentre	**Centre du cercle circonscrit**	**Centre de gravité**
Caractérisation géométrique	Point de concours des hauteurs : Deux hauteurs suffisent	Point de concours des médiatrices des côtés : Deux médiatrices suffisent	Point de concours des médianes : Deux médianes suffisent
Caractérisation géométrique	Hauteur : Droite passant par … perpendiculaire à ...	Médiatrice : Droite passant par … perpendiculaire à ...	Médiane : Droite passant par … et par …
Caractérisation vectorielle	Hauteur issue de A : $\vec{AM}\cdot\vec{BC}=0$	I milieu de [BC] : $\vec{IM}\cdot\vec{BC}$	I milieu de [BC] : $\vec{AM}$ et $\vec{AI}$ colinéaires
Conséquence : Caractérisation analytique	Équation de droite (point et vecteur normal)	Équation de droite (point et vecteur normal)	Équation de droite (point et vecteur directeur)
Coordonnées	Résolution du système : $\begin{cases}\text{équation d'une hauteur}\\ \text{équation d'une autre hauteur}\end{cases}$	Résolution du système : $\begin{cases}\text{équation d'une médiatrice}\\ \text{équation d'une autre médiatrice}\end{cases}$	Résolution du système : $\begin{cases}\text{équation d'une médiane}\\ \text{équation d'une autre médiane}\end{cases}$

Résolution :
Soit H **l'orthocentre** du triangle ABC.

Hauteur issue de A : h_A

$M(x\,;y)\in h_A$ si et seulement si $\vec{AM}\cdot\vec{BC}=0$, or, $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-6\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$,

$M(x\,;y)\in h_A$ si et seulement si $2(x-5)+(-6)(y-6)=0$

Après réduction : une équation de h_A : $x-3y+13=0$

Hauteur issue de B : h_B

$M(x\,;y)\in h_B$ si et seulement si $\vec{BM}\cdot\vec{AC}=0$, or, $\vec{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-6\\-10\end{pmatrix}$,

$M(x\,;y)\in h_B$ si et seulement si $-6(x+2)+(-10)(y-1)=0$

Après réduction : une équation de h_B : $3x+5y-1=0$

Le système : $\begin{cases}x-3y+13=0\\3x+5y-1=0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}-3x+9y-39=0\\3x+5y-1=0\end{cases}$ et par somme, on a : $14y=40$

$y=\dfrac{20}{7}$, puis, $x=-13+\dfrac{60}{7}=\dfrac{-31}{7}$,

L'orthocentre $H\left(\dfrac{-31}{7};\dfrac{20}{7}\right)$

Soit Ω le **centre du cercle circonscrit** au triangle ABC.

médiatrice de [BC] : $Méd_{BC}$

I milieu de [BC] : $\begin{cases} x_I = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \\ y_I = \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$

$M(x\,;y) \in Méd_{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, or, $\overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$,

$M(x\,;y) \in Méd_{BC}$ si et seulement si $2(x+2) + (-6)(y+1) = 0$

Après réduction : une équation de $Méd_{BC}$: $x - 3y - 1 = 0$

médiatrice de [AC] : $Méd_{AC}$

J milieu de [AC] : $\begin{cases} x_J = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ y_J = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$

$M(x\,;y) \in Méd_{AC}$ si et seulement si $\overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, or, $\overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix}$,

$M(x\,;y) \in Méd_{AC}$ si et seulement si $-6(x-2) + (-10)(y-1) = 0$

Après réduction : une équation de $Méd_{AC}$: $3x + 5y - 11 = 0$

Le système : $\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ 3x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} -3x + 9y + 3 = 0 \\ 3x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$ et par somme, on a : $14y = 8$

$y = \dfrac{8}{7}$, puis, $x = 1 + \dfrac{12}{7} = \dfrac{19}{7}$,

le centre du cercle circonscrit : $\Omega\left(\dfrac{19}{7}\,;\dfrac{4}{7}\right)$.

Soit G le **centre de gravité du triangle** ABC.

Médiane issue de A : m_A

$M(x\,;y) \in m_A$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ colinéaires , or, $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y-6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$,

$M(x\,;y) \in m_A$ si et seulement si $7(x-5) - 7(y-6) = 0$

Après réduction : une équation de m_A : $x - y + 1 = 0$

Médiane issue de B : m_B

$M(x\,;y) \in m_B$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BJ}$ colinéaires, or, $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$M(x\,;y) \in m_B$ si et seulement si $1 \times (x+3) - (-5)(y-2) = 0$

Après réduction : une équation de m_B : $x + 5y - 7 = 0$

$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + 5y - 7 = 0 \end{cases}$

Par différence: $6y = 8$, soit: $y = \dfrac{4}{3}$, puis $x = -1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

$G\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{4}{3}\right)$

Vérification avec GeoGebra: